УДК 532.5

Е. А. Уварова

МЕТОД R-ФУНКЦИЙ КАК УСИЛИТЕЛЬНЫЙ БЛОК ДЛЯ МЕТОДОВ РИТЦА И НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Проведён сравнительный анализ решений двух модельных задач, полученных методами Ритца и наименьших квадратов с использованием метода R-функций. Вычислительные эксперименты выполнены в системе «ПОЛЕ».

Хорошо известно, что применение классических вариационных методов на протяжении долгого времени сдерживалось отсутствием возможности построения в явном виде координатных функций, которые точно удовлетворяют заданным краевым условиям для областей сложной формы и обладают свойством полноты. Эта проблема казалась практически неразрешимой многим ученым [2]. В. Л. Рвачев при помощи конструктивного аппарата теории R-функций разработал единый подход к проблеме построения координатных последовательностей для основных вариационных и проекционных методов (методы Ритца, Галёркина, наименьших квадратов) [1, 3–6].

Решение краевой задачи обычно сводится к отысканию в области Ω решения уравнений

$$Au = f \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$L_i u|_{\partial\Omega_i} = \varphi_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{2}$$

где $\partial\Omega_1, \partial\Omega_2, \ldots, \partial\Omega_m$ – покрытие границы $\partial\Omega$ области Ω.

В постановке краевой задачи присутствует два вида информации – аналитическая (A, L_i, f и φ) и геометрическая (Ω, $\partial\Omega$ и $\partial\Omega_i$).

В общем случае структура решения задачи (1), (2) – это формула вида

$$u = B(\omega, \omega_i, \Phi). \tag{3}$$

Здесь B – оператор, зависящий от формы границы $\partial\Omega$ и её участков $\partial\Omega_i$, который строится так, что при любом выборе неопределённой функции Φ формула (3) точно удовлетворяет тем или иным краевым условиям [3].

После того, как структура решения построена, возникает вопрос об отыскании неопределенных компонент. В случае применения вариационных методов каждая из неопределенных компонент представляется в виде

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i \psi_i(x),$$

где $\{\psi_i\}$ – некоторая известная последовательность функций (в качестве $\{\psi_i\}$ можно взять полиномы или сплайны); неопределенные постоянные C_i находятся по обычным схемам применения вариационных методов.

Целью работы является сравнительный анализ, проверка достоверности решений методами Ритца и наименьших квадратов и выработка методических указаний по использованию конструктивных средств *RFM*.

Рассмотрим следующие две модельные задачи:

1°) задача о ламинарном течении жидкости по каналу сложного поперечного сечения (рис. 1)

$$-\Delta u = 1, \qquad u|_{\partial\Omega} = 0;$$

2°) задача об отыскании распределения электрического потенциала

$$\Delta u = 0, \qquad u|_{\partial\Omega_1} = 1, \qquad u|_{\partial\Omega_2} = -1, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega_3} = 0.$$

Область Ω и участки её границы $\partial\Omega_i$ изображены на рис. 2.

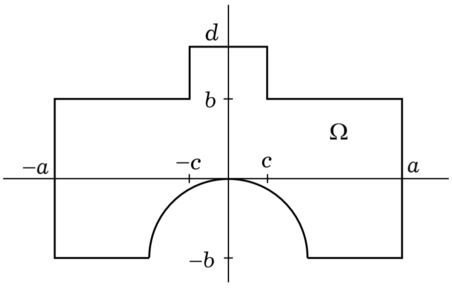

Рис.1

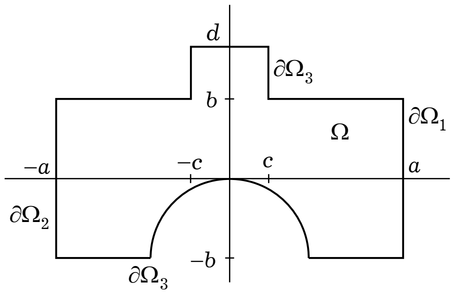

Рис. 2

Для построения нормализованного уравнения границы области Ω были использованы следующие примитивы:

$\Sigma_1 = \left(f_1 \equiv \dfrac{a^2 - x^2}{2a} \geq 0 \right)$ – вертикальная полоса между прямыми $x = \pm a$,

$\Sigma_2 = (f_2 \equiv b - y \geq 0)$ – полуплоскость под прямой $y = b$,

$\Sigma_3 = \left(f_3 \equiv \dfrac{c^2 - x^2}{2c} \geq 0 \right)$ – вертикальная полоса между прямыми $x = \pm c$,

$\Sigma_4 = \left(f_4 \equiv \dfrac{(b + y)(d - y)}{b + d} \geq 0 \right)$ – горизонтальная полоса между прямыми $y = -b$ и $y = d$,

$\Sigma_5 = \left(f_5 \equiv \dfrac{x^2 - (y + b)^2 - b^2}{2b} \geq 0 \right)$ – внешность круга радиуса b с центром в точке $(0, -b)$.

Предикатное уравнение области Ω имеет вид

$$\Omega = \left((\Sigma_1 \bigcap (\Sigma_2 \bigcup \Sigma_3)) \bigcap \Sigma_4 \right) \bigcap \Sigma_5 = 1 .$$

Перейдём от предикатного способа задания сложной области к аналитическому. При этом символы $\bigcap$, $\bigcup$, $\bar{\ }$ заменяют символами какой-нибудь из достаточно полных систем R-функций [3, 4].

Уравнение границы сложной области Ω выглядит следующим образом:

$$\omega = \left((f_1 \wedge_* (f_2 \vee_* f_3)) \wedge_* f_4 \right) \wedge_* f_5 = 0 .$$

В качестве операций $\vee_*$, $\wedge_*$, $\bar{\ }$ в дальнейшем будут использованы R-операции систем $\{R_0\}$ и $\{R_\rho\}$:

$$\{R_0\} = \begin{cases} x \wedge_0 y \equiv x + y - \sqrt{x^2 + y^2}, \\ x \vee_0 y \equiv x + y + \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \bar{x} \equiv -x, \end{cases}$$

$$\{R_\rho\} = \begin{cases} x \wedge_\rho y = x + y - \sqrt{x^2 + y^2 + \dfrac{1}{8\rho^2}\psi(\psi + |\psi|)}, \\ x \vee_\rho y = x + y + \sqrt{x^2 + y^2 + \dfrac{1}{8\rho^2}\psi(\psi + |\psi|)}, \\ \bar{x} = -x. \end{cases}$$

Здесь $\psi = \rho^2 - x^2 - y^2$, а параметр ρ определяет радиус округления углов.

Картины линий уровня функции ω, построенной с помощью $\{R_0\}$ и $\{R_\rho\}$, приведены на рис. 3.

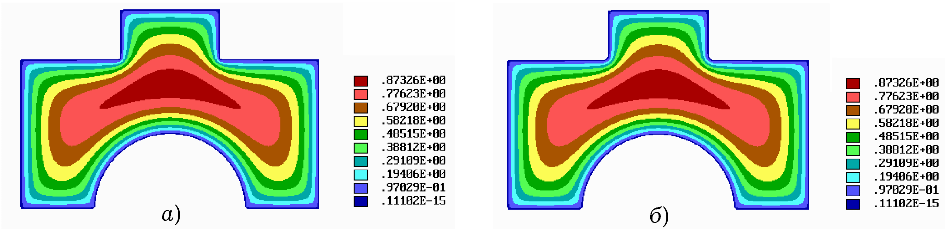

Рис. 3. Картины линий уровня функции ω:
а) с использованием $\{R_0\}$; *б*) с использованием $\{R_\rho\}$.

Рассмотрим решение ***задачи 1°***. Структура решения имеет вид $u = \omega\Phi$. При использовании R-операции $\{R_0\}$ решения, полученные методами Ритца (МР) (рис. 4*а*) и наименьших квадратов (МНК) (рис. 4*б*), существенно отличаются (количественно и качественно). Видно влияние входящих углов при вычислении второй производной для МНК. На рис. 4*в* и рис. 4*г* представлено решение задачи с применением на входящих углах R-операции $\{R_\rho\}$ ($\rho = 0.2$) и МР и МНК. Обратим внимание, что решения, полученные методом Ритца с использованием $\{R_0\}$ и $\{R_\rho\}$, отличаются на $0.87\,\%$, отличие решения по методу наименьших квадратов (рис. 4*г*) от решения по методу Ритца с использованием $\{R_0\}$ (рис. 4*а*) составляет $1\,\%$, а отличие решения по методу наименьших квадратов (рис. 4*г*) от решения по методу Ритца с использованием $\{R_\rho\}$ (рис. 4*в*) составляет $2\,\%$.

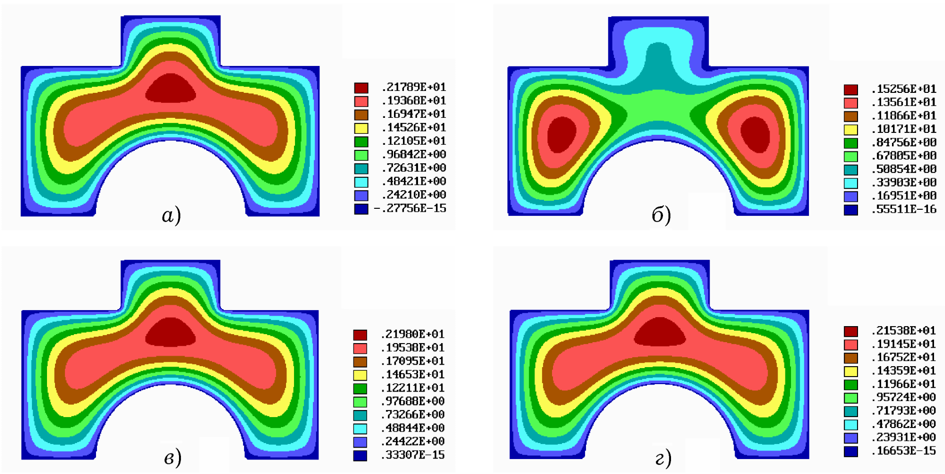

Рис. 4. Распределение поля скоростей в задаче ***1°***: *а*) метод Ритца с использованием на входящих углах операции $\{R_0\}$; *б*) метод наименьших квадратов с $\{R_0\}$; *в*) метод Ритца с $\{R_\rho\}$; *г*) метод наименьших квадратов с $\{R_\rho\}$.

Рассмотрим решение ***задачи 2°***. Вычислительный эксперимент проводился с использованием следующих трёх структур решения:

$$u = \omega_d P_1 + \varphi_d\,, \tag{4}$$

$$\varphi_d = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_1 + \omega_2}, \qquad \omega_1 = a - x, \qquad \omega_2 = a + x, \qquad \omega_d = f_1\,,$$

$$u = \omega_d P_1 + \frac{\omega_d \omega_n}{\omega_d + \omega_n}\left[-D_1^{(n)}(\omega_n P_1) - D_1^{(n)}(\varphi_d)\right] + \varphi_d\,, \tag{5}$$

$$\omega_n = ((f_2 \vee_* f_3) \wedge_* f_4) \wedge_* f_5 ,$$

$$u = \frac{u_d \omega_n^2 + u_n \omega_d}{\omega_n^2 + \omega_d} ,$$

$$u_d = \omega_d P_1 + \varphi_d , \qquad u_n = P_2 - \omega_n D_1^{(n)} P_2 . \tag{6}$$

Структура (4) используется при удовлетворении только главным граничным условиям, структуры (5) и (6) учитывают все граничные условия. При этом обратим внимание, что в структуре (5) использована одна неопределённая компонента, а в (6) – две.

При использовании структуры (4) отыскание неопределённых компонент возможно лишь методом Ритца, т. к. для применения метода наименьших квадратов необходимо удовлетворение всем граничным условиям. Решения представлены на рис. 5. Результаты совпадают как в случае с применением операций $\{R_0\}$, так и с $\{R_\rho\}$.

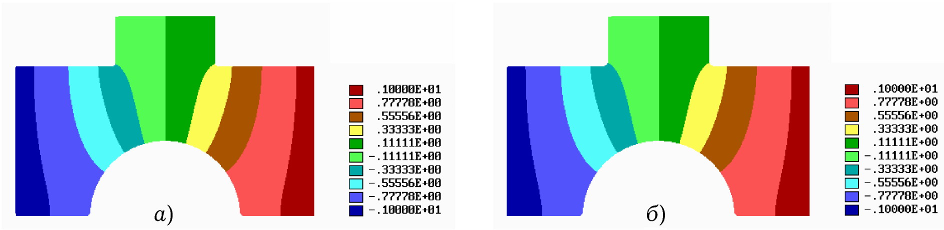

Рис. 5. Линии уровня распределения электрического потенциала для структуры (4): **а**) метод Ритца с $\{R_0\}$; **б**) метод Ритца с $\{R_\rho\}$.

При использовании структуры (5) и R-операции $\{R_0\}$ решения задачи методами Ритца и наименьших квадратов значительно отличаются (рис. 6*а* и рис. 6*б*). Это хорошо видно на рис. 7 (кривые *1* и *2*).

Рассмотрим, как изменятся решения с применением на входящих углах R-операции $\{R_\rho\}$. Проведём сравнительный анализ графиков решений в сечении $y = 2$. На рис. 7 (кривая *3*) видно, как изменилось решение МНК (рис. 6*г*) в сечении $y = 2$. Решение МР (рис. 6*в*) не изменилось. Решение МНК (рис. 6*г*) отличается от решения МР на 1.5 %.

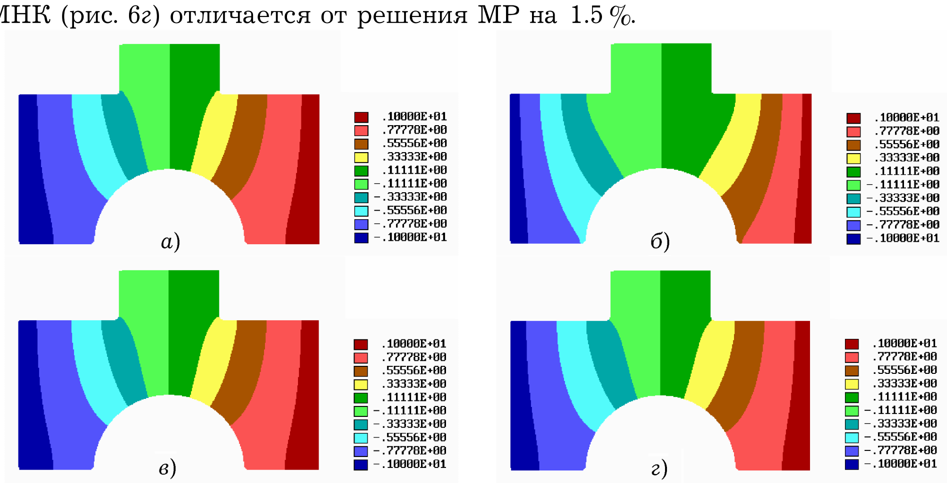

Рис. 6. Распределение электрического потенциала для структуры (5): *а*) метод Ритца с $\{R_0\}$; *б*) метод наименьших квадратов с $\{R_0\}$; *в*) метод Ритца с $\{R_\rho\}$; *г*) метод наименьших квадратов с $\{R_\rho\}$.

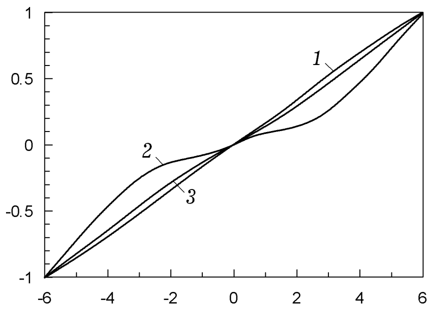

Рис. 7. Распределение электрического потенциала в сечении $y = 2$:

кривая *1* – решение методом Ритца; *2* – решение методом наименьших квадратов с использованием $\{R_0\}$; *3* – решение методом наименьших квадратов с использованием $\{R_\rho\}$.

При использовании структуры (6) и R-операции $\{R_0\}$ решения методом Ритца и методом наименьших квадратов также отличаются (рис. 8*а* и рис. 8*б*). Применим на входящих углах R-операции $\{R_\rho\}$. Решение МР (рис. 8*в*) не изменилось. На рис. 8*г* представлено решение МНК, которое совпадает с решением по МР с точностью до 0.5 %.

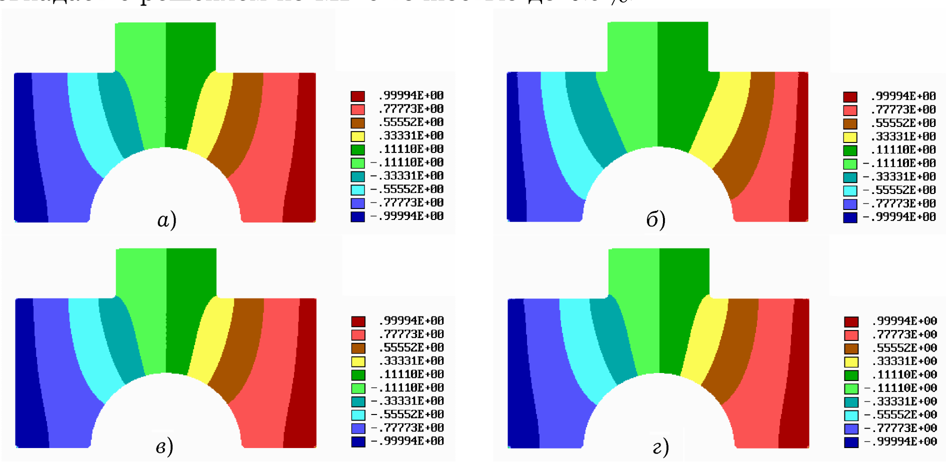

Рис. 8. Распределение электрического потенциала для структуры (6):
а) метод Ритца с $\{R_0\}$; *б*) метод наименьших квадратов с $\{R_0\}$;
в) метод Ритца с $\{R_\rho\}$; *г*) метод наименьших квадратов с $\{R_\rho\}$.

Представление решения в аналитическом виде позволяет получать дифференциальные характеристики. На рис. 9*а* приведены эквипотенциальные линии (поверхности), на рис. 9*б* – линии тока.

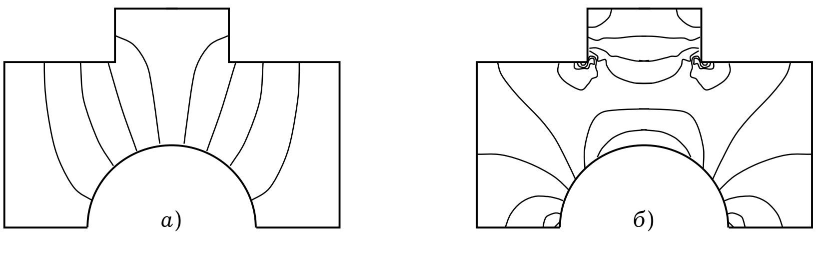

Рис. 9. *а*) эквипотенциальные линии; *б*) линии тока.

Заключение. На примере решения двух модельных задач показано, что в ряде случаев стандартных конструктивных средств теории R-функций, предоставляемых пользователю системой «ПОЛЕ», недостаточно.

При использовании R-операций $\{R_0\}$ для построения нормализованного уравнения границы области, имеющей входящие углы, решения задач методами Ритца и наименьших квадратов отличаются (в некоторых случаях существенно).

Сравнительный анализ применения R-операций $\{R_0\}$ и $\{R_\rho\}$ показал, что для получения достоверного решения методом наименьших квадратов необходимо применение R-операций $\{R_\rho\}$. Решение методом Ритца при использовании R-операций $\{R_\rho\}$ не изменяется.

1. *Максименко-Шейко К. В., Шейко Т. И.* Математическое и компьютерное моделирование движения несжимаемой вязкой жидкости по цилиндрическим трубам с пристеночными винтовыми вставками методом R-функций // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – **48,** № 1. – С. 163–169.
2. *Ортега Дж., Рейнболдт В.* Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. – Москва: Мир, 1975. – 558 с.
3. *Рвачев В. Л.* Теория R-функций и некоторые её приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. – 552 с.
4. *Rvachev V. L., Sheyko T. I.* R-functions in boundary-value problems in mechanics // Appl. Mech. Rev. – 1995. – 48, No. 4. – P. 151–188.
5. *Rvachev V. L., Sheyko T. I., Shapiro V.* The R-function method in boundary-value problems with geometric and physical symmetry // J. Math. Sci. – 1999. – **97,** No. 1. – P. 3888–3899.

   То же: *Рвачев В. Л., Шейко Т. И., Шапиро В.* Метод R-функций (*RFM*) в краевых задачах с геометрической и физической симметрией // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1998. – **41,** № 1. – С. 146–159.
6. *Rvachev V. L., Sheiko T. I., Shapiro V., Tsukanov I.* On completeness of *RFM*-solution structure // Computat. Mech. – 2000. – **25**. – P. 305–316.

МЕТОД R-ФУНКЦІЙ ЯК ПІДСИЛЮВАЛЬНИЙ БЛОК ДЛЯ МЕТОДІВ РІТЦА ТА НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ

Проведено порівняльний аналіз розв'язків двох модельних задач, отриманих методами Рітца та найменших квадратів з використанням методу R-функцій. Обчислювальні експерименти виконано в системі «ПОЛЕ».

R-FUNCTIONS METHOD AS SUPPORTIVE EXTENSION FOR RITZ METHOD AND LEAST SQUARES METHOD

The comparative analysis of solutions for two model problems, obtained by Ritz method and least squares method, is carried out with use of the R-functions method. Calculating experiments are processed in the system «POLYE».

Ин-т проблем машиностроения
им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков

Получено
08.05.08