УДК 517.95

Ю. Б. Дмитришин

ДИНАМІЧНА КРАЙОВА ЗАДАЧА БЕЗ ПОЧАТКОВИХ УМОВ ДЛЯ МАЙЖЕ ЛІНІЙНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

Вивчається динамічна крайова задача без початкових умов для лінійних і майже лінійних параболічних рівнянь. Спочатку встановлено умови існування єдиного розв'язку задачі без початкових умов для деякого абстрактного неявного еволюційного рівняння у класі функцій з експоненціальною поведінкою при $t \to -\infty$. На основі цих результатів доведено існування єдиного розв'язку вихідної задачі в класі функцій з експоненціальною поведінкою на нескінченності.

Вступ. Нехай Ω – обмежена область в просторі $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, точок $x = (x_1, \ldots, x_n)$; межа $\partial\Omega$ області Ω є C^1-многовидом розмірності $n-1$ [25, с. 56]; Γ_0 – замикання відкритої на $\partial\Omega$ множини або порожня множина; $\Gamma_1 \overset{\text{def}}{=} \partial\Omega \setminus \Gamma_0$; $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ – одиничний вектор зовнішньої до $\partial\Omega$ нормалі; $S \overset{\text{def}}{=} (-\infty, 0]$ – промінь числової осі змінної t. Покладемо $Q \overset{\text{def}}{=} \Omega \times S$, $\Sigma_0 \overset{\text{def}}{=} \Gamma_0 \times S$, $\Sigma_1 \overset{\text{def}}{=} \Gamma_1 \times S$. Ці позначення і припущення будуть використовуватися упродовж усієї роботи.

Розглянемо *динамічну крайову задачу без початкових умов*:

знайти дійснозначну функцію $u(x,t)$, $(x,t) \in \bar{\Omega} \times S$, таку, що

$$\frac{\partial}{\partial t}\big(b_1(x)u\big) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(x,t,u,\nabla u) + a_0(x,t,u,\nabla u) = f_1(x,t) \quad \text{в} \quad Q, \tag{1$'$}$$

$$u = 0 \qquad \text{на} \qquad \Sigma_0, \tag{1$''$}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\big(b_2(x)u\big) + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t,u,\nabla u)\nu_i + d(x,t,u) = f_2(x,t) \qquad \text{на} \quad \Sigma_1, \tag{1$'''$}$$

де $a_0, \ldots, a_n$, b_1, b_2, d, f_1 і f_2 – деякі задані дійснозначні функції.

Надалі цю задачу коротко називатимемо задачею $(\mathbf{P})$.

Мета цієї роботи полягає у встановленні достатніх умов на вихідні дані $a_0, \ldots, a_n$, b_1, b_2, d, f_1 і f_2 задачі $(\mathbf{P})$, при яких вона має єдиний розв'язок. Розглядатимемо лише лінійний і майже лінійний випадки, тобто, коли функції $a_i(x,t,r,\xi)$, $(x,t,r,\xi) \in Q \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $i = 0, \ldots, n$, та $d(x,t,r)$, $(x,t,r) \in \Sigma_1 \times \mathbb{R}$, задовольняють умови лінійного росту за змінними r і ξ, зокрема, вони можуть бути лінійними за цими змінними. Крім того, вивчатимемо лише випадок слабкого виродження (див. [24, с. 132]), тобто, коли функції $b_1 \ge 0$ та $b_2 \ge 0$ зануляються хіба що на підмножинах нульової міри відповідно Ω та Γ_1. Як випливає з модельних прикладів для однозначної розв'язності задачі $(\mathbf{P})$ у розглядуваній ситуації потрібно задати додаткові умови на поведінку розв'язку та зростання вихідних даних при $t \to -\infty$.

Динамічні крайові задачі виникають при математичному моделюванні багатьох процесів, зокрема процесів теплопровідності [8, 25, 27], дифузійних процесів [15], процесів електропровідності [19], процесів гідродинаміки [17] і багатьох інших. Зауважимо також, що динамічні крайові задачі з початковими умовами для лінійних і майже лінійних параболічних рівнянь розглядалися і в роботах [12, 16, 22, 23, 26] та інших. Динамічна крайова задача без початкових умов вивчалася у роботі [2], де було досліджено умови існування, єдиності та неперервної залежності від вихідних даних узагальненого розв'язку динамічної крайової задачі для квазілінійного еліптичного рівняння.

У **п. 1** вводимо основні позначення і поняття, які використовуватимемо надалі. У **п. 2** даємо означення узагальненого розв'язку задачі (**P**) і формулюємо основний результат. У **п. 3** встановлюємо умови існування єдиного розв'язку задачі без початкових умов для абстрактного неявного еволюційного рівняння, а потім, використовуючи ці результати, доводимо існування єдиного розв'язку задачі (**P**).

1. Основні позначення і поняття. Для довільного банахового простору X норму в ньому позначатимемо через $\|\cdot\|_X$. Через X' позначатимемо простір, спряжений до X, а через $\langle\cdot,\cdot\rangle_X$ – канонічний скалярний добуток між просторами X' і X. Під $L^2_{\text{loc}}(S;X)$ розумітимемо простір (класів еквівалентності) X-значних функцій, вимірних за Бохнером на S, звуження яких на будь-який відрізок $[t_1, t_2] \subset S$ належить до $L^2(t_1, t_2; X)$. Простір $L^2_{\text{loc}}(S;X)$ є локально опуклим топологічним векторним простором стосовно системи півнорм $p_{t_1,t_2}(v) = \left(\int\limits_{t_1}^{t_2} \|v(t)\|^2_X\, dt\right)^{1/2}$, $t_1, t_2 \in S$, $t_1 < t_2$. Через $\mathcal{D}'(S;X)$ позначатимемо простір X_w-значних розподілів на $(-\infty, 0)$ [3, с. 166]. Відомо, що простір $L^2_{\text{loc}}(S;X)$ можна ототожнити з деяким підпростором у $\mathcal{D}'(S;X)$. Для функції $v \in L^2_{\text{loc}}(S;X)$ через v' позначатимемо її похідну в сенсі простору $\mathcal{D}'(S;X)$. Локально опуклий векторний простір неперервних функцій з S в X, топологія якого визначається системою півнорм $p_{t_1,t_2}(v) = \sup\limits_{t\in[t_1,t_2]} \|v(t)\|_X$, $t_1, t_2 \in S$, $t_1 < t_2$, позначатимемо через $C(S;X)$. Більше про простори векторнозначних функцій можна дізнатися в [3, 4, 10].

Через $H^1(\Omega)$ позначимо простір Соболєва, який складається з функцій дійсного простору $L^2(\Omega)$, що мають узагальнені похідні першого порядку з простору $L^2(\Omega)$, з нормою $\|w\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int\limits_\Omega \left(\sum\limits_{i=1}^n |w_{x_i}|^2 + |w|^2\right) dx\right)^{1/2}$. Через $H^{1/2}(\partial\Omega)$ позначатимемо простір слідів на $\partial\Omega$ функцій з $H^1(\Omega)$ (див., наприклад, [6, 11]). Відомо, що вкладення $H^{1/2}(\partial\Omega) \subset L^2(\partial\Omega)$ є неперервним. Оператор сліду на просторі $H^1(\Omega)$ позначатимемо через γ. Зауважимо, що оператор $\gamma : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ є лінійним і неперервним. Норму оператора сліду γ означимо як $\|\gamma\|_{\mathcal{L}} \overset{\text{def}}{=} \sup_{\|v\|_{H^1(\Omega)}\le 1} \|\gamma v\|_{L^2(\partial\Omega)}$. Символом $\mathcal{D}(S)$ позначатимемо простір нескінченно диференційовних дійсних функцій на S з компактними носіями в $(-\infty, 0)$, наділений відповідною топологією (див. [3, с. 41]). Через $L^2_{\text{loc}}(Q)$ (відповідно $L^2_{\text{loc}}(\Sigma_1)$) позначатимемо простір визначених на Q (відповідно Σ_1) дійснозначних функцій, звуження яких на множину $\Omega \times (t_1, t_2)$ (відповідно $\Gamma_1 \times (t_1, t_2)$) для будь-яких чисел t_1, $t_2 \in S$, $t_1 < t_2$, належить $L^2(\Omega \times (t_1, t_2))$ (відповідно $L^2(\Gamma_1 \times (t_1, t_2))$). Неперервне вкладення одного топологічного простору в інший позначатимемо символом «$\hookrightarrow$». Для будь-якого вектора $\xi \in \mathbb{R}^n$ означимо норму $|\xi| = \left(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2\right)^{1/2}$.

Означимо простір

$$V \overset{\text{def}}{=} \{v \in H^1(\Omega) : \gamma v(x) = 0 \text{ для майже всіх } x \in \Gamma_0\}.$$

Очевидно, що V є замкненим підпростором простору $H^1(\Omega)$, а, отже, V є рефлексивним сепарабельним банаховим простором відносно норми $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ [4, с. 32, 79]. Зауважимо, що $V = H_0^1(\Omega)$ при $\Gamma_0 = \partial\Omega$.

Покладемо

$$\mathbb{B} \overset{\text{def}}{=} \{b = (b_1, b_2) : b_1 \in L^\infty(\Omega),\ b_1(x) > 0 \quad \text{для майже всіх} \quad x \in \Omega;$$
$$b_2 \in L^\infty(\Gamma_1),\ b_2(x) > 0 \quad \text{для майже всіх} \quad x \in \Gamma_1\}.$$

Для довільного елемента $b = (b_1, b_2) \in \mathbb{B}$ означимо гільбертові простори з відповідними скалярними добутками:

$$b_1^{1/2}L^2(\Omega) \overset{\text{def}}{=} \{b_1^{1/2}v : v \in L^2(\Omega)\}, \qquad (w, \tilde{w})_{b_1^{1/2}L^2(\Omega)} \overset{\text{def}}{=} \int_\Omega (b_1)^{-1} w\tilde{w}\, dx,$$

$$b_2^{1/2}L^2(\Gamma_1) \overset{\text{def}}{=} \{b_2^{1/2}v : v \in L^2(\Gamma_1)\}, \quad (w, \tilde{w})_{b_2^{1/2}L^2(\Gamma_1)} \overset{\text{def}}{=} \int_{\Gamma_1} (b_2)^{-1} w\tilde{w}\, d\Gamma.$$

Норми у просторах $b_1^{1/2}L^2(\Omega)$ і $b_2^{1/2}L^2(\Gamma_1)$ відповідно означимо як

$$\|w\|_{b_1^{1/2}L^2(\Omega)} = (w, w)^{1/2}_{b_1^{1/2}L^2(\Omega)}, \qquad w \in b_1^{1/2}L^2(\Omega),$$

$$\|w\|_{b_2^{1/2}L^2(\Gamma_1)} = (w, w)^{1/2}_{b_2^{1/2}L^2(\Gamma_1)}, \qquad w \in b_2^{1/2}L^2(\Gamma_1).$$

Означимо локально опуклий топологічний векторний простір

$$\mathbb{U}_b \overset{\text{def}}{=} \{u \in L^2_{\text{loc}}(S; V) : b_1 u \in C(S; b_1^{1/2}L^2(\Omega)),\ b_2\gamma u \in C(S; b_2^{1/2}L^2(\Gamma_1))\}$$

з системою півнорм

$$p_{t_1,t_2}(u) = \left(\int_{t_1}^{t_2} \|u(t)\|_V^2\, dt\right)^{1/2} + \sup_{t\in[t_1,t_2]} \|u(t)\|_{b_1^{1/2}L^2(\Omega)} +$$
$$+ \sup_{t\in[t_1,t_2]} \|\gamma u(t)\|_{b_2^{1/2}L^2(\Gamma_1)}, \qquad t_1,\ t_2 \in S, \qquad t_1 < t_2.$$

Для функції $u \in \mathbb{U}_b$ інколи будемо використовувати позначення $u(x,t) \overset{\text{def}}{=} u(t)(x)$ і $\gamma u(x,t) \overset{\text{def}}{=} (\gamma u(t))(x)$.

Розглянемо множину, що складається з упорядкованих наборів з $n+1$ дійснозначних функцій, визначених на множині $Q \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, будь-який елемент $a = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ якої складений з каратеодорівських функцій (тобто для кожного $i \in \{0, \ldots, n\}$ функція $a_i(x,t,\cdot,\cdot) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ неперервна для м. в. $(x,t) \in Q$, а функція $a_i(\cdot,\cdot,r,\xi) : Q \to \mathbb{R}$ вимірна для всіх $r \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$) і задовольняє такі умови:

(*i*) для м. в. $(x,t) \in Q$ і довільних $r \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$|a_i(x,t,r,\xi)| \le q_{1,a}(t)(|r| + |\xi|) + q_{2,a}(x,t), \qquad i = 0, \ldots, n,$$

де $q_{1,a} \in L^\infty_{\text{loc}}(S)$, $q_{2,a} \in L^2_{\text{loc}}(Q)$;

(***ii***) для м. в. $(x,t)\in Q$ і будь-яких $r,\ r'\in\mathbb{R}$, $\xi,\ \xi'\in\mathbb{R}^n$ маємо

$$\sum_{i=1}^{n}\big(a_i(x,t,r,\xi)-a_i(x,t,r',\xi')\big)(\xi_i-\xi'_i)+$$
$$+\big(a_0(x,t,r,\xi)-a_0(x,t,r',\xi')\big)(r-r')\ge K_{1,a}\big(|r-r'|^2+|\xi-\xi'|^2\big),$$

де $K_{1,a}$ – деяка залежна від a додатна стала.

На цій множині введемо відношення еквівалентності, вважаючи що два набори a^1, a^2 еквівалентні, якщо $a_i^1(x,t,r,\xi)=a_i^2(x,t,r,\xi)$, $i=0,1,\dots,n$, для м. в. $(x,t)\in Q$ і всіх $r\in\mathbb{R}$, $\xi\in\mathbb{R}^n$. Фактор-множину за цим відношенням еквівалентності позначатимемо через $\mathbb{A}$.

Розглянемо множину визначених на $\Sigma_1\times\mathbb{R}$ дійснозначних функцій, будь-який елемент d якої є каратеодорівською функцією (тобто функція $d(x,t,\cdot):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ є неперервною для м. в. (у сенсі n-вимірної міри на Σ_1) $(x,t)\in\Sigma_1$, а функція $d(\cdot,\cdot,r):\Sigma_1\to\mathbb{R}$ вимірна для будь-якого $r\in\mathbb{R}$) і задовольняє такі умови:

(***iii***) для м. в. $(x,t)\in\Sigma_1$ і довільного $r\in\mathbb{R}$

$$|d(x,t,r)|\le q_{1,d}(t)|r|+q_{2,d}(x,t),$$

де $q_{1,d}\in L^\infty_{\mathrm{loc}}(S)$, $q_{2,d}\in L^2_{\mathrm{loc}}(\Sigma_1)$, та $d(x,t,0)=0$;

(***iiii***) для м. в. $(x,t)\in\Sigma_1$ і будь-яких $r,\ r'\in\mathbb{R}$

$$\big(d(x,t,r)-d(x,t,r')\big)(r-r')\ge 0.$$

На цій множині також введемо відношення еквівалентності, вважаючи, що два елементи $d_1,\ d_2$ еквівалентні, якщо $d_1(x,t,r)=d_2(x,t,r)$ для м. в. $(x,t)\in\Sigma_1$ і всіх $r\in\mathbb{R}$. Фактор-множину за цим відношенням еквівалентності позначатимемо через $\mathbb{D}$.

Також означимо локально опуклий топологічний векторний простір

$$\mathbb{F}\overset{\mathrm{def}}{=}\{f=(f_1,f_2):f_1\in L^2_{\mathrm{loc}}(Q),\ f_2\in L^2_{\mathrm{loc}}(\Sigma_1)\}$$

із системою півнорм

$$p_{t_1,t_2}(f)=\left(\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega|f_1(x,t)|^2dx\,dt\right)^{1/2}+\left(\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Gamma_1}|f_2(x,t)|^2d\Gamma\,dt\right)^{1/2},$$
$$t_1,\ t_2\in S,\qquad t_1<t_2.$$

2. Означення розв'язку і основний результат. Нехай $b=(b_1,b_2)\in\mathbb{B}$, $a=(a_0,a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{A}$, $d\in\mathbb{D}$ і $f=(f_1,f_2)\in\mathbb{F}$ – деякі задані елементи. Розглядатимемо узагальнені розв'язки задачі (**P**).

Означення 1. *Узагальненим розв'язком* задачі (**P**) називатимемо функцію $u\in\mathbb{U}_b$ таку, що для довільних функцій $v\in V$ і $\varphi\in\mathcal{D}(S)$ задовольняє інтегральну тотожність

$$\iint_Q\left\{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i(x,t,u,\nabla u)v_{x_i}+a_0(x,t,u,\nabla u)v\right)\varphi-b_1(x)uv\varphi'\right\}dx\,dt+$$
$$+\iint_{\Sigma_1}\{d(x,t,\gamma u)\,\gamma v\,\varphi-b_2(x)\,\gamma u\,\gamma v\,\varphi'\}\,d\Gamma\,dt=$$
$$=\iint_Q f_1(x,t)\,v\,\varphi\,dx\,dt+\iint_{\Sigma_1}f_2(x,t)\,\gamma v\,\varphi\,d\Gamma\,dt. \qquad (2)$$

Сформулюємо тепер результат про існування і єдиність узагальненого розв'язку задачі $(\mathbf{P})$.

Теорема 1. *Нехай для деякого* $\lambda \in \mathbb{R}$ *такого, що*

$$|\lambda| < K_{1,a} \cdot \left(\|b_1\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\gamma\|_{\mathcal{L}}^2 \|b_2\|_{L^\infty(\Gamma_1)} \right)^{-1},$$

і кожного $t \in S$ *виконується нерівність*

$$\int_{t-1}^{t} \left(\|f_1(\cdot,\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|f_2(\cdot,\tau)\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 \right) d\tau + \int_{t-1}^{t} \int_\Omega |q_{2,a}(x,\tau)|^2 dx\, d\tau \le C_1 e^{-\lambda t}, \qquad (3)$$

де C_1 *– додатна стала, що залежить від функцій* f_1, f_2 *та* $q_{2,a}$.

Тоді існує єдиний узагальнений розв'язок задачі $(\mathbf{P})$, *що задовольняє умову*

$$\int_\Omega b_1(x)|u(x,t)|^2\, dx + \int_{\Gamma_1} b_2(x)|\gamma u(x,t)|^2\, d\Gamma = o[e^{-2K_1 t}] \quad \text{при} \quad t \to -\infty, \qquad (4)$$

де $K_1 \overset{\text{def}}{=} K_{1,a} \cdot \left(\|b_1\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\gamma\|_{\mathcal{L}}^2 \|b_2\|_{L^\infty(\Gamma_1)} \right)^{-1}$.

Більше того, цей розв'язок для кожного $t \in S$ *задовольняє оцінку*

$$\|b_1 u(t)\|_{b_1^{1/2} L^2(\Omega)}^2 + \|b_2 \gamma u(t)\|_{b_2^{1/2} L^2(\Gamma_1)}^2 + \int_{t-1}^{t} \|u(t)\|_V^2\, dt \le C_2 e^{-\lambda t}, \qquad (5)$$

де $C_2 > 0$ *– стала, що залежить від* C_1, $K_{1,a}$, λ, $\|\gamma\|_{\mathcal{L}}$, b_1 *і* b_2.

3. Доведення основного результату. Перш ніж перейти безпосередньо до доведення теореми 1, розглянемо задачу без початкових умов для деякого абстрактного неявного еволюційного рівняння. Потім, використовуючи результати стосовно цієї задачі, доведемо теорему 1.

Нехай $\mathcal{V}$ – дійсний рефлексивний сепарабельний банахів простір, а $\mathcal{B} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}'$ – лінійний неперервний оператор такий, що $\langle \mathcal{B} v_1, v_2 \rangle_{\mathcal{V}} = \langle \mathcal{B} v_2, v_1 \rangle_{\mathcal{V}}$ для довільних $v_1, v_2 \in \mathcal{V}$ і $\langle \mathcal{B} v, v \rangle_{\mathcal{V}} > 0$ для будь-якого $v \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$. Тоді білінійна форма $\langle \mathcal{B} \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{V}}$ визначає скалярний добуток, а функціонал $\langle \mathcal{B} \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{V}}^{1/2}$ – норму на $\mathcal{V}$. Через $\mathcal{V}_{\mathcal{B}}$ позначимо поповнення простору $\mathcal{V}$ у нормі $\langle \mathcal{B} \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{V}}^{1/2}$. Очевидно, що вкладення $\mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{V}_{\mathcal{B}}$ є щільним і для довільного $v \in \mathcal{V}$ виконується нерівність $\|v\|_{\mathcal{V}_{\mathcal{B}}} \le \sqrt{\|\mathcal{B}\|_{\mathcal{L}}} \cdot \|v\|_{\mathcal{V}}$, де $\|\mathcal{B}\|_{\mathcal{L}}$ – норма оператора $\mathcal{B} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}'$. Через ототожнення функціоналів маємо щільне вкладення $\mathcal{V}'_{\mathcal{B}} \hookrightarrow \mathcal{V}'$, причому $\|w\|_{\mathcal{V}'} \le \sqrt{\|\mathcal{B}\|_{\mathcal{L}}} \cdot \|w\|_{\mathcal{V}'_{\mathcal{B}}}$ для кожного $w \in \mathcal{V}'_{\mathcal{B}}$. Простори $\mathcal{V}_{\mathcal{B}}$ та $\mathcal{V}'_{\mathcal{B}}$ є гільбертовими. Оператор $\mathcal{B}$ має єдине лінійне неперервне продовження $\mathcal{B} : \mathcal{V}_{\mathcal{B}} \to \mathcal{V}'_{\mathcal{B}}$. Скалярний добуток на $\mathcal{V}'_{\mathcal{B}}$ задовольняє умову

$$(w, \mathcal{B} v)_{\mathcal{V}'_{\mathcal{B}}} = \langle w, v \rangle_{\mathcal{V}}, \qquad w \in \mathcal{V}'_{\mathcal{B}}, \qquad v \in \mathcal{V}, \qquad (6)$$

звідки, поклавши $w = \mathcal{B} v$, маємо

$$\|\mathcal{B} v\|_{\mathcal{V}'_{\mathcal{B}}} = \|v\|_{\mathcal{V}_{\mathcal{B}}}, \qquad v \in \mathcal{V}_{\mathcal{B}}. \qquad (7)$$

Отже, оператор $\mathcal{B} : \mathcal{V}_{\mathcal{B}} \to \mathcal{V}'_{\mathcal{B}}$ є рісовським ізоморфізмом. Обґрунтування цих фактів можна знайти в монографіях [24, с. 136–137] і [25, с. 137–138].

Надалі буде потрібне таке

Твердження 1 [**13**, лема 2.1]. *Нехай* $v \in L^2_{\mathrm{loc}}(S;\mathcal{V})$, $(\mathcal{B}v)' \in L^2_{\mathrm{loc}}(S;\mathcal{V}')$.

Тоді $v \in C(S;\mathcal{V}_{\mathcal{B}})$, $\mathcal{B}v \in C(S;\mathcal{V}'_{\mathcal{B}})$ *і функція* $t \mapsto \|v(t)\|^2_{\mathcal{V}_{\mathcal{B}}} \equiv \|\mathcal{B}v(t)\|^2_{\mathcal{V}'_{\mathcal{B}}}$ *є абсолютно неперервною на кожному відрізку з* S. *Більше того,*

$$\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{\mathcal{V}_{\mathcal{B}}} = \frac{d}{dt}\|\mathcal{B}v(t)\|^2_{\mathcal{V}'_{\mathcal{B}}} = 2\Big\langle\big(\mathcal{B}v(t)\big)', v(t)\Big\rangle_{\mathcal{V}} \tag{8}$$

для м. в. $t \in S$.

Нехай $\mathcal{A}(t,\cdot) : \mathcal{V} \to \mathcal{V}'$, $t \in S$, – сім'я операторів таких, що

1°) для кожної вимірної функції $v : S \to \mathcal{V}$ функція $\mathcal{A}(\cdot, v(\cdot)) : S \to \mathcal{V}'$ вимірна;

2°) якщо $v \in L^2_{\mathrm{loc}}(S;\mathcal{V})$, то $\mathcal{A}(\cdot, v(\cdot)) \in L^2_{\mathrm{loc}}(S;\mathcal{V}')$.

Розглянемо *задачу без початкових умов для абстрактного неявного еволюційного рівняння*

$$(\mathcal{B}u(t))' + \mathcal{A}(t, u(t)) = \mathcal{F}(t), \qquad t \in S, \tag{9}$$

де $\mathcal{F} \in L^2_{\mathrm{loc}}(S;\mathcal{V}')$ – деяка функція. Далі цю задачу називатимемо просто *задачею* (9).

Означення 2. Функцію $u \in L^2_{\mathrm{loc}}(S;\mathcal{V})$ називатимемо *розв'язком* задачі (9), якщо вона задовольняє рівняння (9) у просторі $D'(S;\mathcal{V}')$.

Зауваження 2. Якщо функція $u \in L^2_{\mathrm{loc}}(S;\mathcal{V})$ є розв'язком задачі (9), то з твердження 1 випливає, що $u \in C(S;\mathcal{V}_{\mathcal{B}})$ і $\mathcal{B}u \in C(S;\mathcal{V}'_{\mathcal{B}})$.

Теорема 2. *Нехай вкладення* $\mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{V}_{\mathcal{B}}$ *компактне, а сім'я операторів* $\mathcal{A}(t,\cdot)$, $t \in S$, *задовольняє такі умови:*

3°) *існують функції* $\alpha_1 \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(S)$ *і* $\alpha_2 \in L^2_{\mathrm{loc}}(S)$ *такі, що для м. в.* $t \in S$ *маємо*

$$\|\mathcal{A}(t,v)\|_{\mathcal{V}'} \le \alpha_1(t)\|v\|_{\mathcal{V}} + \alpha_2(t), \qquad v \in \mathcal{V};$$

4°) *існують число* $\beta_1 > 0$ *та функція* $\beta_2 \in L^1_{\mathrm{loc}}(S)$, $\beta_2 \ge 0$, *такі, що для м. в.* $t \in S$ *маємо*

$$\langle \mathcal{A}(t,v), v\rangle_{\mathcal{V}} \ge \beta_1\|v\|^2_{\mathcal{V}} - \beta_2(t), \qquad v \in \mathcal{V};$$

5°) *для майже всіх* $t \in S$ *і довільних елементів* $v, w \in \mathcal{V}$ *дійснозначна функція* $s \mapsto \langle \mathcal{A}(t, v+sw), w\rangle_{\mathcal{V}}$ *є неперервною на* $\mathbb{R}$;

6°) *існує стала* $K_2 > 0$ *така, що для м. в.* $t \in S$ *і довільних* $v, w \in \mathcal{V}$ *виконується нерівність*

$$\langle \mathcal{A}(t,v) - A(t,w), v-w\rangle_{\mathcal{V}} \ge K_2\|v-w\|^2_{\mathcal{V}_{\mathcal{B}}}.$$

Тоді, якщо для деякого $\lambda \in \mathbb{R}$, $|\lambda| < \beta_1/\|\mathcal{B}\|_{\mathcal{L}}$ *і* $\lambda < K_2$, *виконується нерівність*

$$\int_{t-1}^{t} \|\mathcal{F}(\tau)\|^2_{\mathcal{V}'} d\tau + \int_{t-1}^{t} \beta_2(\tau)\, d\tau \le C_3 e^{-\lambda t}, \qquad t \in S, \tag{10}$$

де C_3 *– деяка залежна від* $\mathcal{F}$ *та* β_2 *додатна стала, то існує єдиний розв'язок задачі* (9), *що при* $t \to -\infty$ *задовольняє умову*

$$\|\mathcal{B}u(t)\|^2_{\mathcal{V}'_{\mathcal{B}}} = o[e^{-2K_2 t}]. \tag{11}$$

Більше того, для цього розв'язку виконується оцінка

$$\|\mathcal{B}u(t)\|^2_{\mathcal{V}'_{\mathcal{B}}} + \int\limits_{t-1}^{t} \|u(\tau)\|^2_{\mathcal{V}}\, d\tau \le C_4 e^{-\lambda t}, \qquad t \in S\,, \tag{12}$$

де $C_4 > 0$ *– стала, що залежать від* C_3, β_1, λ *і оператора* $\mathcal{B}$.

Д о в е д е н н я. Оскільки оператор $\mathcal{B} : \mathcal{V}_{\mathcal{B}} \to \mathcal{V}'_{\mathcal{B}}$ – рісовський ізоморфізм, то ототожнивши простори $\mathcal{V}_{\mathcal{B}}$ та $\mathcal{V}'_{\mathcal{B}}$ за допомогою теореми Ріса (див. [5, с. 132]), ототожнимо кожний елемент $v \in \mathcal{V}_{\mathcal{B}}$ з елементом $\mathcal{B}v \in \mathcal{V}'_{\mathcal{B}}$. Крім того, для будь-якого елемента $w \in \mathcal{V}'_{\mathcal{B}}$ знайдеться єдиний елемент $v \in \mathcal{V}_{\mathcal{B}}$ такий, що $w = \mathcal{B}v$. Після вказаного ототожнення рівняння (9) перепишемо у вигляді

$$u'(t) + \mathcal{A}\big(t, u(t)\big) = \mathcal{F}(t), \qquad t \in S\,.$$

Твердження теореми 2 випливає з теорем 3.2, 3.4 і наслідку 3.1 роботи [1]. ◊

Д о в е д е н н я **теореми 1**. Основна ідея міркувань така: спочатку покажемо, що задача $(\mathbf{P})$ є конкретною реалізацією задачі (9) (при відповідному виборі $\mathcal{V}$, $\mathcal{B}$ та $\mathcal{A}$). Далі, використовуючи результати теореми 2, покажемо існування і єдиність розв'язку цієї задачі, а, отже, й узагальненого розв'язку задачі $(\mathbf{P})$.

Етап 1. Нехай $b = (b_1, b_2) \in \mathbb{B}$. Означимо оператор $B : V \to V'$ за правилом

$$\langle Bv, w\rangle_V = \int\limits_{\Omega} b_1(x) v w\, dx + \int\limits_{\Gamma_1} b_2(x) \gamma v \gamma w\, d\Gamma, \qquad v, w \in V\,. \tag{13}$$

Очевидно, що оператор B є лінійним, неперервним і задовольняє умови симетричності $\langle Bv, w\rangle_V = \langle Bw, v\rangle_V$ для довільних v, $w \in V$ і строгої монотонності $\langle Bv, v\rangle_V > 0$ для будь-якого $v \in V$, $v \ne 0$. Тому функціонал $\langle B\cdot,\cdot\rangle_V^{1/2}$ є нормою, а білінійна форма $\langle B\cdot,\cdot\rangle_V$ – скалярним добутком на V.

Означимо гільбертові простори з відповідними скалярними добутками:

$$b_1^{-1/2} L^2(\Omega) \overset{\text{def}}{=} \{b_1^{-1/2} v : v \in L^2(\Omega)\}, \qquad (v, w)_{b_1^{-1/2} L^2(\Omega)} \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{\Omega} b_1(x) v w\, dx\,,$$

$$b_2^{-1/2} L^2(\Gamma_1) \overset{\text{def}}{=} \{b_2^{-1/2} v : v \in L^2(\Gamma_1)\}, \qquad (v, w)_{b_2^{-1/2} L^2(\Gamma_1)} \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{\Gamma_1} b_2(x) v w\, d\Gamma\,.$$

Тоді простір $V_B \overset{\text{def}}{=} b_1^{-1/2} L^2(\Omega) \times b_2^{-1/2} L^2(\Gamma_1)$ стає гільбертовим простором, якщо на ньому ввести скалярний добуток

$$([v_1, v_2], [w_1, w_2])_{V_B} \overset{\text{def}}{=} (v_1, w_1)_{b_1^{-1/2} L^2(\Omega)} + (v_2, w_2)_{b_2^{-1/2} L^2(\Gamma_1)}\,,$$

де $[v_1, v_2]$, $[w_1, w_2] \in V_B$. Норма на V_B для будь-якого $[v_1, v_2] \in V_B$ визначається так: $\|[v_1, v_2]\|_{V_B} \overset{\text{def}}{=} ([v_1, v_2], [v_1, v_2])_{V_B}^{1/2}$. Легко переконатися, що простір V_B є поповненням простору V стосовно норми $\langle B\cdot,\cdot\rangle_V^{1/2}$ (див. [24, с. 12], а також [25, с. 141]), якщо кожний елемент $v \in V$ ототожнити з елементом $[v, \gamma v] \in V_B$.

Спряженим до V_B є гільбертів простір $V'_B = b_1^{1/2} L^2(\Omega) \oplus b_2^{1/2} L^2(\Gamma_1)$ зі скалярним добутком $(v_1 \oplus v_2, w_1 \oplus w_2)_{V'_B} \overset{\text{def}}{=} (v_1, w_1)_{b_1^{1/2} L^2(\Omega)} + (v_2, w_2)_{b_2^{1/2} L^2(\Gamma_1)}$, де $v_1 \oplus v_2$, $w_1 \oplus w_2 \in V_B'$. Норму на V_B' означуємо як $\|v_1 \oplus v_2\|_{V_B'} \overset{\text{def}}{=}$ $\overset{\text{def}}{=} (v_1 \oplus v_2, v_1 \oplus v_2)_{V_B'}^{1/2}$ для будь-якого $v_1 \oplus v_2 \in V_B'$. Очевидно, що маємо неперервне вкладення $V_B' \hookrightarrow V'$, визначене за правилом

$$\langle w, v\rangle_V \overset{\text{def}}{=} \langle w_1 \oplus w_2, [v, \gamma v]\rangle_{V_B} = \int_\Omega w_1 v\, dx + \int_{\Gamma_1} w_2 \gamma v\, d\Gamma$$

для довільних $w \equiv w_1 \oplus w_2 \in V_B'$ і $v \in V$.

Стосовно добутків і прямих сум топологічних векторних просторів відсилаємо до монографій [7, с. 130–141] та [9, с. 31–33, 174].

Надалі буде потрібна така

Лема 1. *Вкладення* $V \hookrightarrow V_B$ *компактне.*

Д о в е д е н н я. Нехай $\{v_k\}_{k=1}^{+\infty}$ – довільна обмежена послідовність у просторі V. Тоді з огляду на рефлексивність простору V, компактність вкладення $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ (див. [11, с. 168]) і компактність оператора сліду $\gamma : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ (див., наприклад, [14, теорема 2.79]) випливає існування підпослідовності $\{v_{k_j}\}_{j=1}^{+\infty}$ послідовності $\{v_k\}_{k=1}^{+\infty}$ такої, що $v_{k_j} \underset{j\to\infty}{\to} v$ сильно в $L^2(\Omega)$ і $\gamma v_{k_j} \underset{j\to\infty}{\to} \gamma v$ сильно в $L^2(\partial\Omega)$, а тому і в $L^2(\Gamma_1)$. Звідси маємо

$$\left\|v_{k_j} - v\right\|^2_{b_1^{-1/2}L^2(\Omega)} = \int_\Omega b_1(x)\left|v_{k_j} - v\right|^2 dx \le \|b_1\|_{L^\infty(\Omega)}\left\|v_{k_j} - v\right\|^2_{L^2(\Omega)} \underset{j\to\infty}{\to} 0$$

та

$$\left\|\gamma v_{k_j} - \gamma v\right\|^2_{b_2^{-1/2}L^2(\Gamma_1)} = \int_{\Gamma_1} b_2(x)\left|\gamma v_{k_j} - \gamma v\right|^2 d\Gamma \le$$

$$\le \|b_1\|_{L^\infty(\Gamma_1)}\left\|\gamma v_{k_j} - \gamma v\right\|^2_{L^2(\Gamma_1)} \underset{j\to\infty}{\to} 0.$$

Отже, $v_{k_j} \underset{j\to\infty}{\to} v$ сильно в V_B, що й доводить компактність вкладення $V \hookrightarrow V_B$. ◊

Нехай $a = (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}$, $d \in \mathbb{D}$. Означимо сім'ю операторів $A(t,\cdot)$: $: V \to V'$, $t \in S$, за правилом

$$\langle A(t,v), w\rangle_V = \int_\Omega \left\{\sum_{i=1}^n a_i(x,t,v,\nabla v) w_{x_i} + a_0(x,t,v,\nabla v) w\right\} dx +$$
$$+ \int_{\Gamma_1} d(x,t,\gamma v)\, \gamma w\, d\Gamma, \tag{14}$$

для будь-яких $v, w \in V$.

Нехай $f = (f_1, f_2) \in \mathbb{F}$. Означимо функцію $F \in L^2_{\text{loc}}(S; V')$ за правилом

$$\langle F(t), w\rangle_V = \int_\Omega f_1(x,t) w\, dx + \int_{\Gamma_1} f_2(x,t)\gamma w\, d\Gamma \qquad \forall w \in V. \tag{15}$$

Розглянемо задачу без початкових умов

$$\left(Bu(t)\right)' + A\left(t, u(t)\right) = F(t) \qquad \text{в} \qquad \mathcal{D}'(S; V'), \tag{16}$$

під *розв'язком* якої розумітимемо функцію $u \in L^2_{\text{loc}}(S; V)$, що задовольняє рівняння (16).

Правильним є

Твердження 2. *Якщо функція* $u \in \mathbb{U}_b$ – *узагальнений розв'язок задачі* $(\mathbf{P})$, *то вона є розв'язком задачі* (16) *і, навпаки, якщо функція* $u \in L^2_{\mathrm{loc}}(S;V)$ *є розв'язком задачі* (16), *то* u – *узагальнений розв'язок задачі* $(\mathbf{P})$.

Д о в е д е н н я. Нехай функція $u \in \mathbb{U}_b$ – узагальнений розв'язок задачі $(\mathbf{P})$, тобто u задовольняє інтегральну тотожність (2). Перепишемо цю тотожність у вигляді

$$-\int_S \left\{ \int_\Omega b_1(x) uv\, dx + \int_{\Gamma_1} b_2(x)\gamma u \gamma v\, d\Gamma \right\} \varphi'\, dt + \int_S \left\{ \int_\Omega \Big(\sum_{i=1}^n a_i(x,t,u,\nabla u) v_{x_i} + \right.$$

$$\left. + a_0(x,t,u,\nabla u) v \Big) dx + \int_{\Gamma_1} b(s,t,\gamma u)\gamma v\, d\Gamma \right\} \varphi\, dt =$$

$$= \int_S \left\{ \int_\Omega f_1(x,t) v\, dx + \int_{\Gamma_1} f_2(x,t)\gamma v\, d\Gamma \right\} \varphi\, dt, \tag{17}$$

для довільних функцій $v \in V$ і $\varphi \in \mathcal{D}(S)$. З тотожності (17) з урахуванням (13)–(15) випливає, що функція u задовольняє рівняння (16).

Навпаки, нехай $u \in L^2_{\mathrm{loc}}(S;V)$ – розв'язок задачі (16), тоді u задовольняє інтегральну тотожність (17), а, отже, й (2). Покажемо, що $u \in \mathbb{U}_b$. Оскільки $Bu \in C(S;V_B')$ (див. зауваження 2), то з рівності

$$\|Bv\|^2_{V_B'} = \|v\|^2_{V_B} = \int_\Omega b_1(x)|v|^2\, dx + \int_{\Gamma_1} b_2(x)|\gamma v|^2\, d\Gamma, \qquad v \in V, \tag{18}$$

і означень норм $\|\cdot\|_{b_1^{1/2}L^2(\Omega)}$, $\|\cdot\|_{b_2^{1/2}L^2(\Gamma_1)}$ отримуємо, що $b_1 u \in C\big(S; b_1^{1/2}L^2(\Omega)\big)$ і $b_2\gamma u \in C\big(S; b_2^{1/2}L^2(\Gamma_1)\big)$. Тому $u \in \mathbb{U}_b$. ◊

Етап 2. Покажемо, що задача (16) має єдиний розв'язок, що задовольняє умову

$$\|Bu(t)\|^2_{V_B'} = o\big[e^{-2K_2 t}\big] \qquad \text{при} \qquad t \to -\infty.$$

Для цього використаємо твердження 2 і теорему 2. Отже, потрібно переконатися в тому, що у нашому випадку виконуються умови теореми 2.

Виконання умови ***1°***) для сім'ї операторів $A(t,\cdot)$, $t \in S$, випливає з (14) і того, що функції a_i, $i = 0,\dots,n$, d – каратеодорівські.

Покажемо, що сім'я операторів $A(t,\cdot)$, $t \in S$, задовольняє умову ***3°***). З (14), умов (***i***), (***iii***) та нерівності Гельдера для м. в. $t \in S$ і довільних $v,\ w \in V$ отримаємо

$$|\langle A(t,v), w\rangle_V| \le \int_\Omega \left\{ \sum_{i=1}^n |a_i(x,t,v,\nabla v) w_{x_i}| + |a_0(x,t,v,\nabla v) w| \right\} dx +$$

$$+ \int_{\Gamma_1} |d(x,t,\gamma v)\gamma w|\, d\Gamma \le C_5\big(q_{1,a}(t)\|v\|_V + \|q_{2,a}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\big)\|w\|_V +$$

$$+ C_6\big(q_{1,d}(t)\|\gamma v\|_{L^2(\Gamma_1)} + \|q_{2,d}(\cdot,t)\|_{L^2(\Gamma_1)}\big)\|\gamma w\|_{L^2(\Gamma_1)}, \tag{19}$$

де $C_5 > 0$, $C_6 > 0$ – деякі сталі. Оскільки $\|\gamma w\|_{L^2(\Gamma_1)} = \|\gamma w\|_{L^2(\partial\Omega)}$ для будь-якого $w \in V$, то з (19) і неперервності оператора сліду $\gamma : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ маємо виконання умови ***3°***) з функціями $\alpha_1(t) \overset{\mathrm{def}}{=} C_7\big(q_{1,a}(t) + q_{1,d}(t)\big)$, $\alpha_2(t) \overset{\mathrm{def}}{=}$

$\stackrel{\text{def}}{=} C_8\left(\left\|q_{2,a}(\cdot,t)\right\|_{L^2(\Omega)} + \left\|q_{2,d}(\cdot,t)\right\|_{L^2(\Gamma_1)}\right)$, де C_7, C_8 – додатні сталі, що залежать лише від норми оператора сліду $\gamma : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$.

Відмітимо, що умова ***2°***) є наслідком умов ***1°***) та ***3°***).

Нехай, як і раніше, $\lambda \in \mathbb{R}$ таке, що $|\lambda| < K_{1,a} \cdot \left(\|b_1\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\gamma\|_{\mathcal{L}}^2 \|b_2\|_{L^\infty(\Gamma_1)}\right)^{-1}$, і виконується нерівність (3). Тоді знайдеться таке дійсне число $\delta > 0$, що справджується нерівність $|\lambda|\left(\|b_1\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\gamma\|_{\mathcal{L}}^2 \|b_2\|_{L^\infty(\Gamma_1)}\right) < 2(K_{1,a} - \delta)$. З умов (***i***), (***ii***) і нерівності Коші отримуємо, що

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x,t,r,\xi)\xi_i + a_0(x,t,r,\xi)r \ge K_{1,a}(|r|^2 + |\xi|^2) + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t,0,0)\xi_i +$$

$$+ a_0(x,t,0,0)r \ge K_{1,a}(|r|^2 + |\xi|^2) - |q_{2,a}(x,t)|\left(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i| + |r|\right) \ge$$

$$\ge (K_{1,a} - \delta)(|r|^2 + |\xi|^2) - \frac{n+1}{4\delta}|q_{2,a}(x,t)|^2,$$

для м. в. $(x,t) \in Q$ і будь-яких $r \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$. Звідси і з умови (***iiii***) отримуємо, що для м. в. $t \in S$ і будь-якого $v \in V$ виконується нерівність

$$\langle A(t,v), v\rangle_V \ge (K_{1,a} - \delta)\|v\|_V^2 - \frac{n+1}{4\delta}\int_\Omega |q_{2,a}(x,t)|^2 dx.$$

Отже, маємо виконання умови ***4°***) зі сталою $\beta_1 = K_{1,a} - \delta$ і функцією $\beta_2(t) = \frac{n+1}{4\delta}\int_\Omega |q_{2,a}(x,t)|^2 dx$.

Тепер доведемо виконання умови ***5°***) сім'єю операторів $A(t,\cdot)$, $t \in S$, тобто покажемо, що для м. в. $t \in S$ і довільних v, $w \in V$ дійснозначна функція $\Psi(s) \stackrel{\text{def}}{=} \langle A(t, v+sw), w\rangle_V$ є неперервною на $\mathbb{R}$. З умов (***i***), (***iii***) та теореми Красносєльського (див. [18, теорема 1.4.7] або [25, наслідок II.3.4]) для м. в. $t \in S$ маємо

$$\int_\Omega |a_i(x,t,v+sw,\nabla v + s\nabla w) - a_i(x,t,v,\nabla v)|^2\, dx \underset{s\to 0}{\to} 0, \qquad i = 0,\ldots,n,$$

та

$$\int_{\Gamma_1} |d(x,t,\gamma v + s\gamma w) - d(x,t,\gamma v)|^2\, d\Gamma \underset{s\to 0}{\to} 0.$$

Звідси, а також з (14) і нерівності Гельдера випливає, що функція Ψ неперервна в точці 0, а тому і в будь-якій точці числової осі.

Нехай $\lambda \in \mathbb{R}$, як і раніше, є таким, що $|\lambda|\left(\|b_1\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\gamma\|_{\mathcal{L}}^2 \|b_2\|_{L^\infty(\Gamma_1)}\right) < 2(K_{1,a} - \delta)$ для деякого $\delta > 0$ і виконується нерівність (3). Покажемо, що тоді $|\lambda| < \beta_1/\|B\|_{\mathcal{L}}$ і виконується нерівність (10). Справді, оскільки

$$\|B\|_{\mathcal{L}} = \sup_{\|v\|_V \le 1}\ \sup_{\|w\|_V \le 1} \langle Bv, w\rangle_V =$$

$$= \sup_{\|v\|_V \le 1}\ \sup_{\|w\|_V \le 1}\left(\int_\Omega b_1(x) v w\, dx + \int_{\Gamma_1} b_2(x)\gamma v\, \gamma w\, d\Gamma\right) \le$$

$$\le \sup_{\|v\|_V \le 1} \sup_{\|w\|_V \le 1} \left(\|b_1\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\gamma\|_{\mathcal{E}}^2 \|b_2\|_{L^\infty(\Gamma_1)} \right) \|v\|_V \|w\|_V =$$

$$= \|b_1\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\gamma\|_{\mathcal{E}}^2 \|b_2\|_{L^\infty(\Gamma_1)} \tag{20}$$

і $\beta_1 = K_{1,a} - \delta > 0$, то маємо $|\lambda| < \beta_1 / \|B\|_{\mathcal{E}}$. Виконання нерівності (10) випливає з (3) і з того, що

$$\|F(\tau)\|_{V'} = \sup_{\|w\|_V \le 1} \langle F(\tau), w \rangle_V = \sup_{\|w\|_V \le 1} \left(\int_\Omega f_1(x,\tau) w\, dx + \int_{\Gamma_1} f_2(x,\tau) \gamma w\, d\Gamma \right) \le$$

$$\le \sup_{\|w\|_V \le 1} \left(\|f_1(\cdot,\tau)\|_{L^2(\Omega)} + \|\gamma\|_{\mathcal{E}} \|f_2(\cdot,\tau)\|_{L^2(\Gamma_1)} \right) \|w\|_V \le$$

$$\le (1 + \|\gamma\|_{\mathcal{E}}) \left(\|f_1(\cdot,\tau)\|_{L^2(\Omega)} + \|f_2(\cdot,\tau)\|_{L^2(\Gamma_1)} \right), \tag{21}$$

для м. в. $\tau < 0$ та $\beta_2(t) = \dfrac{n+1}{4\delta} \displaystyle\int_\Omega |q_{2,a}(x,t)|^2\, dx \ge 0$.

З (14), умов (*ii*), (*iiii*), неперервності вкладення $V \hookrightarrow V_B$ та з нерівності (20) для м. в. $t \in S$ і будь-яких $v, w \in V$, $v \ne w$, маємо

$$\langle A(t,v) - A(t,w), v - w \rangle_V \ge K_{1,a} \|v - w\|_V^2 \ge$$

$$\ge \frac{K_{1,a} \|v - w\|_{V_B}^2}{\|b_1\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\gamma\|_{\mathcal{E}}^2 \|b_2\|_{L^\infty(\Gamma_1)}}. \tag{22}$$

Таким чином, сім'я операторів $A(t,\cdot)$, $t \in S$, задовольняє умову **6°**) теореми 2 зі сталою $K_2 = K_{1,a} \cdot \left(\|b_1\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\gamma\|_{\mathcal{E}}^2 \|b_2\|_{L^\infty(\Gamma_1)} \right)^{-1}$.

Отже, з теореми 2 випливає існування розв'язку задачі (16), а тому й узагальненого розв'язку задачі (**P**). Врахувавши рівність (18) і нерівність (22), отримуємо, що цей узагальнений розв'язок є єдиним у класі функцій з $\mathbb{U}_b$, що задовольняють умову (4), крім того, він задовольняє оцінку (5). ◊

1. *Бокало Н. М.* О задаче без начальных условий для некоторых классов нелинейных параболических уравнений // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. – 1989. – Вып. 14. – С. 3–44.
2. *Бокало М. М., Дмитришин Ю. Б.* Нелінійна динамічна крайова задача без початкової умови для квазілінійних еліптичних рівнянь // Нелинейные граничные задачи. – 2007. – **17**. – С. 1–19.
3. *Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – Москва: Мир, 1978. – 336 с.
4. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. Общая теория. Т. 1. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. – 898 с.
5. *Иосида К.* Функциональный анализ. – Москва: Мир, 1967. – 624 с.
6. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. – Москва: Мир, 1971. – 372 с.
7. *Робертсон А. П., Робертсон В. Дж.* Топологические векторные пространства. – Москва: Мир, 1967. – 257 с.
8. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. – Москва: Наука, 1972. – 736 с.
9. *Шефер Х.* Топологические векторные пространства. – Москва: Мир, 1971. – 359 с.
10. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. Теория и приложения. – Москва: Мир, 1969. – 1072 с.
11. *Adams R. A., Fournier J. J. F.* Sobolev spaces. – Oxford: Elsevier, 2003. – xiv + 306 p.
12. *Arrieta J. M., Quittner P., Rodríguez-Bernal A.* Parabolic problems with nonlinear dynamical boundary conditions and singular initial data // Different. and Integral Equations. – 2001. – **14**, No. 12. – P. 1487–1510.

13. *Bokalo M., Dmytryshyn Yu.* Problems without initial conditions for degenerate implicit evolution equations // Electron. J. Different. Equations. – 2008. – No. 4. – P. 1–16.
14. *Carl S., Le V. K., Motreanu D.* Nonsmooth variational problems and their inequalities. Comparison principles and applications. – New York: Springer, 2007. – xi + 395 p.
15. *Crank J.* The mathematics of diffusion. – Oxford: Clarendon Press, 1975. – ix + 414 p.
16. *Escher J.* Quasilinear parabolic systems with dynamical boundary conditions // Commun. Partial Different. Equations. – 1993. – **18**, No. 7–8. – P. 1309–1364.
17. *Galiano G., Velasco J.* A dynamic boundary value problem arising in the ecology of mangroves // Nonlinear Anal. – 2006. – **7**, No. 5. – P. 1129–1144.
18. *Gasiński L., Papageorgiou N. S.* Nonsmooth critical point theory and nonlinear boundary value problems. – Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2005. – xiii + 775 p.
19. *Gröger K.* Initial boundary value problems from semiconductor device theory // Z. Angew. Math. Mech. – 1987. – **67**. – P. 345–355.
20. *Hintermann T.* Evolution equations with dynamic boundary conditions // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. – 1989. – **113A**, No. 1/2. – P. 43–60.
21. *Showalter R. E.* Existence and representation theorems for a semilinear Sobolev equation in Banach space // SIAM J. Math. Anal. – 1972. – **3**, No. 3. – P. 527–543.
22. *Showalter R. E.* Degenerate evolution equations and applications // Indiana Univ. Math. J. – 1974. – **23**, No. 8. – P. 655–677.
23. *Showalter R. E.* Nonlinear degenerate evolution equations and partial differential equations of mixed type // SIAM J. Math. Anal. – 1975. – **6**, No. 1. – P. 25–42.
24. *Showalter R. E.* Hilbert space methods for partial differential equations. – London e. c.: Pitman Publ. Ltd., 1977. – xii + 196 p. – Ser. Monographs and Studies in Mathematics. – Vol. 1.
25. *Showalter R. E.* Monotone operators in Banach space and nonlinear partial differential equations. – Providence: Amer. Math. Soc., 1997. – xiv + 278 p. – Ser. Mathematical Surveys and Monographs. – Vol. 49
26. *Vázquez J. L., Vitillaro E.* Heat equation with dynamical boundary conditions of reactive type // Commun. Partial Differ. Equations. – 2008. – **33**, No. 4. – P. 561–612.
27. *Vitillaro E.* On the Laplace equation with non-linear dynamical boundary conditions // Proc. London Math. Soc. – 2006. – **93**, No. 3. – P. 418–446.

ДИНАМИЧЕСКАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА БЕЗ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ ПОЧТИ ЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Изучается динамическая краевая задача без начальных условий для линейных и почти линейных параболических уравнений. Сначала установлены условия существования единственного решения задачи без начальных условий для некоторого абстрактного неявного эволюционного уравнения в классе функций с экспоненциальным поведением при $t \to -\infty$. *На основании этих результатов доказано существование единственного решения исходной задачи в классе функций с экспоненциальным поведением на бесконечности.*

DYNAMIC BOUNDARY-VALUE PROBLEMS WITHOUT INITIAL CONDITIONS FOR ALMOST LINEAR PARABOLIC EQUATIONS

We study the problem without initial conditions for linear and almost linear parabolic equations. First, we establish conditions for existence and uniqueness of solution of the problem without initial conditions for some abstract implicit evolution equation in the class of functions with the exponential behavior as $t \to -\infty$. *Then, using these results, we prove the existence and uniqueness of solution of the original problem in the class of functions with the exponential behavior at infinity.*

ПАТ «Концерн Галнафтогаз», Львів

Одержано
26.02.09