УДК 519.6: 539.3

І. І. Дияк[1], І. І. Прокопишин[1,2]

ЗБІЖНІСТЬ ПАРАЛЕЛЬНОЇ СХЕМИ НЕЙМАНА МЕТОДУ ДЕКОМПОЗИЦІЇ ОБЛАСТІ ДЛЯ ЗАДАЧ КОНТАКТУ БЕЗ ТЕРТЯ ДЕКІЛЬКОХ ПРУЖНИХ ТІЛ

На основі варіаційного формулювання та методу штрафу розглянуто паралельну схему Неймана методу декомпозиції області для розв'язування задач одностороннього контакту просторових пружних тіл. Показано існування та єдиність розв'язку варіаційної задачі зі штрафом і збіжність за параметром штрафу. Доведено збіжність схеми та визначено оптимальне значення ітераційного параметра.

Вступ. Контактні задачі механіки деформівного твердого тіла актуальні для багатьох галузей науки та техніки. Основні досягнення стосовно аналітичних і числових методів розв'язування цих задач відображено у роботах [6, 18].

Розвиток методів декомпозиції області (МДО) за останнє десятиліття дав новий поштовх дослідженням контактних задач для багатьох тіл. Короткий огляд існуючих підходів МДО до контактних задач дано у працях [14, 18]. Серед них слід виділити алгоритми на основі методу множників Лагранжа та двоїстого формулювання задачі квадратичного програмування [10, 14], алгоритми типу Діріхле − Неймана [13, 17] та Неймана [11, 12].

У праці [7] на основі варіаційного принципу Лагранжа, методу штрафу та методу простої ітерації для варіаційних рівнянь запропоновано схеми Неймана та Діріхле для розв'язування задач контакту без тертя двох пружних тіл та досліджено їхню числову ефективність. У праці [2] ці методи узагальнено на випадок контакту багатьох просторових пружних тіл та апробовано для плоских задач контакту багатошарових композитів. Позитивами такого підходу є простота алгоритмів та регуляризація контактної задачі завдяки використанню штрафу.

У пропонованій роботі дано обґрунтування та доведення збіжності побудованої у [2, 7] паралельної схеми МДО Неймана, яке базується на загальній теорії мінімізації опуклих функціоналів [9], варіаційному формулюванні контактної задачі [3, 4], методі штрафу для варіаційних нерівностей [1, 5, 15, 16], методі простої ітерації для варіаційних рівнянь [1].

Основним результатом роботи є узагальнення теореми про збіжність методу простої ітерації для варіаційних рівнянь [1, с. 30], на основі чого доведено збіжність розглянутої схеми МДО.

1. Постановка контактної задачі. Розглянемо задачу про контакт без тертя N пружних тіл $\Omega_\alpha \subset \mathbb{R}^3$ з кусково-гладкими межами $\Gamma_\alpha = \partial\Omega_\alpha$, $\alpha = 1,\dots,N$ (див. рис. 1).

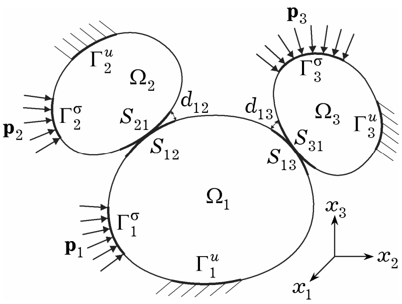

Рис. 1

Напружено-деформований стан кожного з тіл описують вектор переміщень $\mathbf{u}_\alpha = \sum_{i=1}^{3} u_{\alpha i}\mathbf{e}_i$, тензори деформацій $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_\alpha = \sum_{i,j=1}^{3} \varepsilon_{\alpha ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$ і напружень $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_\alpha = \sum_{i,j=1}^{3} \sigma_{\alpha ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$.

Деформації визначаються за співвідношеннями Коші

$$\varepsilon_{\alpha ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_{\alpha i}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{\alpha j}}{\partial x_i}\right), \qquad i, j = 1, 2, 3\,, \tag{1}$$

а напруження − за законом Гука

ISSN 0130−9420. Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2009. − 52, № 3. − С. 78-89.

$$\sigma_{\alpha ij} = \sum_{k,\ell=1}^{3} C_{\alpha ijk\ell}\, \varepsilon_{\alpha k\ell}, \qquad i, j = 1,2,3. \tag{2}$$

Також виконуються рівняння рівноваги

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{\alpha ij}}{\partial x_j} + f_{\alpha i} = 0, \qquad i = 1,2,3, \tag{3}$$

де $f_{\alpha i}$, $i = 1,2,3$, – компоненти вектора об'ємних сил $\mathbf{f}_\alpha = \sum_{i=1}^{3} f_{\alpha i}\, \mathbf{e}_i$.

Пружні сталі $C_{\alpha ijk\ell}$ – вимірні функції просторових координат, симетричні, обмежені та еліптичні в такому сенсі [13]:

$$b_\alpha \sum_{i,j=1}^{3} \varepsilon_{\alpha ij}^2 \le \sum_{i,j,k,\ell=1}^{3} C_{\alpha ijk\ell}\, \varepsilon_{\alpha ij}\, \varepsilon_{\alpha k\ell} \le d_\alpha \sum_{k,\ell=1}^{3} \varepsilon_{\alpha k\ell}^2, \qquad 0 < b_\alpha \le d_\alpha < \infty.$$

Позначимо $\Omega = \bigcup_{\alpha=1}^{N} \Omega_\alpha$. На поверхні Γ_α кожного із тіл введемо локальну ортонормовану систему координат $\boldsymbol{\xi}_\alpha, \boldsymbol{\eta}_\alpha, \mathbf{n}_\alpha$ та подамо переміщення і напруження на Γ_α у цих координатах:

$$\mathbf{u}_\alpha = u_{\alpha\xi}\boldsymbol{\xi}_\alpha + u_{\alpha\eta}\boldsymbol{\eta}_\alpha + u_{\alpha n}\mathbf{n}_\alpha,$$

$$\boldsymbol{\sigma}_\alpha = \hat{\boldsymbol{\sigma}}_\alpha \cdot \mathbf{n}_\alpha = \sigma_{\alpha\xi}\boldsymbol{\xi}_\alpha + \sigma_{\alpha\eta}\boldsymbol{\eta}_\alpha + \sigma_{\alpha n}\mathbf{n}_\alpha.$$

Припустимо, що поверхня Γ_α кожного з тіл складається з трьох частин: $\Gamma_\alpha = \Gamma_\alpha^u \cup \Gamma_\alpha^\sigma \cup \mathcal{S}_\alpha$, де $\mathcal{S}_\alpha = \bigcup_{\beta\in B_\alpha} \mathcal{S}_{\alpha\beta}$, $\mathcal{S}_{\alpha\beta} \subset \Gamma_\alpha$ – частина поверхні тіла Ω_α, що може контактувати з тілом Ω_β, $\mathcal{B}_\alpha \subset \{1,\ldots,N\}$ – множина індексів усіх тіл, які контактують з тілом Ω_α, $\mathcal{B}_\alpha \ne \varnothing$, $\alpha = 1,\ldots,N$. Вважаємо, що $\mathcal{S}_{\alpha\beta} \subset \Gamma_\alpha$ та $\mathcal{S}_{\beta\alpha} \subset \Gamma_\beta$ є достатньо близькі, так що $\mathbf{n}_\alpha(\mathbf{x}) \approx -\mathbf{n}_\beta(\mathbf{x}')$, де $\mathbf{x}' = P(\mathbf{x}) \in \mathcal{S}_{\beta\alpha}$ є проекцією точки $\mathbf{x} \in \mathcal{S}_{\alpha\beta}$ на поверхню $\mathcal{S}_{\beta\alpha}$ [3]. Відстань між тілами Ω_α та Ω_β по нормалі до деформації позначимо через $d_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|$. Припустимо, що функції $d_{\alpha\beta}(\mathbf{x})$ обмежені та інтегровні на поверхнях можливого контакту $\mathcal{S}_{\alpha\beta}$.

На частині Γ_α^u поверхні Γ_α задамо кінематичні крайові умови:

$$\mathbf{u}_\alpha(\mathbf{x}) = \mathbf{z}_\alpha(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in \Gamma_\alpha^u, \tag{4}$$

а на частині Γ_α^σ – статичні крайові умови:

$$\boldsymbol{\sigma}_\alpha(\mathbf{x}) = \mathbf{p}_\alpha(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in \Gamma_\alpha^\sigma, \tag{5}$$

де $\mathbf{z}_\alpha = (z_{\alpha\xi}, z_{\alpha\eta}, z_{\alpha n})^\top$, $\mathbf{p}_\alpha = (p_{\alpha\xi}, p_{\alpha\eta}, p_{\alpha n})^\top$ – задані переміщення і зусилля.

На поверхнях можливого контакту тіл ($\mathbf{x} \in \mathcal{S}_{\alpha\beta}$, $\mathbf{x}' = P(\mathbf{x}) \in \mathcal{S}_{\beta\alpha}$) виконуються умови:

– *нерозтягування*

$$\sigma_{\alpha n}(\mathbf{x}) = \sigma_{\beta n}(\mathbf{x}') \le 0; \tag{6}$$

– *відсутності тертя*

$$\sigma_{\alpha\xi}(\mathbf{x}) = \sigma_{\beta\xi}(\mathbf{x}') = 0, \qquad \sigma_{\alpha\eta}(\mathbf{x}) = \sigma_{\beta\eta}(\mathbf{x}') = 0; \tag{7}$$

– *взаємного непроникнення тіл*

$$u_{\alpha n}(\mathbf{x}) + u_{\beta n}(\mathbf{x}') \le d_{\alpha\beta}(\mathbf{x}); \tag{8}$$

– *контактної альтернативи*

$$\left(u_{\alpha n}(\mathbf{x}) + u_{\beta n}(\mathbf{x}') - d_{\alpha\beta}(\mathbf{x})\right)\sigma_{\alpha n}(\mathbf{x}) = 0\,. \tag{9}$$

2. Варіаційне формулювання контактної задачі. Використовуючи результати праць [3, 4], дамо варіаційне формулювання цієї задачі. Для спрощення вважаємо, що всі тіла жорстко закріплені на поверхні Γ_α^u:

$$\mathbf{u}_\alpha(\mathbf{x}) = 0, \qquad \mathbf{x} \in \Gamma_\alpha^u, \qquad \alpha = 1,\ldots,N\,. \tag{10}$$

Для кожного з тіл Ω_α розглянемо простори Соболєва $V_\alpha = \left(H^1(\Omega_\alpha)\right)^3$, $\alpha = 1,\ldots,N$, зі скалярним добутком

$$(\mathbf{u}_\alpha,\mathbf{v}_\alpha)_{V_\alpha} = \sum_{i=1}^{3}\int\limits_{\Omega_\alpha}\left(u_{\alpha i}v_{\alpha i} + \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial u_{\alpha i}}{\partial x_j}\frac{\partial v_{\alpha i}}{\partial x_j}\right)d\Omega, \qquad \mathbf{u}_\alpha,\mathbf{v}_\alpha \in V_\alpha\,,$$

та нормою

$$\|\mathbf{u}_\alpha\|_{V_\alpha} = \sqrt{(\mathbf{u}_\alpha,\mathbf{u}_\alpha)_{V_\alpha}}\,, \qquad \mathbf{u}_\alpha \in V_\alpha, \qquad \alpha = 1,\ldots,N\,.$$

Уведемо в V_α замкнені підпростори

$$V_\alpha^0 = \left\{\mathbf{v}_\alpha : \mathbf{v}_\alpha \in V_\alpha;\ \mathbf{v}_\alpha(\mathbf{x}) = 0,\ \mathbf{x} \in \Gamma_\alpha^u\right\}, \qquad \alpha = 1,\ldots,N\,.$$

Розглянемо прямий добуток цих просторів

$$V_0 := V_1^0 \times \ldots \times V_N^0 = \left\{\mathbf{v} : \mathbf{v} = (\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_N)^\top,\ \mathbf{v}_\alpha \in V_\alpha^0,\ \alpha = 1,\ldots,N\right\}.$$

У просторі V_0 означимо скалярний добуток $(\mathbf{u},\mathbf{v})_{V_0} = \sum\limits_{\alpha=1}^{N}(\mathbf{u}_\alpha,\mathbf{v}_\alpha)_{V_\alpha^0}$ та норму $\|\mathbf{u}\|_{V_0} = \sqrt{(\mathbf{u},\mathbf{u})_{V_0}}$, $\mathbf{u},\mathbf{v} \in V_0$. Зазначимо, що гільбертовий простір V_0 є рефлексивним банаховим простором.

Уведемо в V_0 множину кінематично допустимих переміщень

$$K = \left\{\mathbf{v} : \mathbf{v} \in V_0;\ \ v_{\alpha n}(\mathbf{x}) + v_{\beta n}(\mathbf{x}') \le d_{\alpha\beta}(\mathbf{x}),\ \ \mathbf{x} \in \mathcal{S}_{\alpha\beta},\ \ \mathbf{x}' \in \mathcal{S}_{\beta\alpha},\ \{\alpha,\beta\} \in Q\right\}, \tag{11}$$

де $Q = \left\{\{\alpha,\beta\} : \alpha \in \{1,\ldots,N\},\ \beta \in \mathcal{B}_\alpha\right\}$ – множина всіх можливих невпорядкованих пар індексів тіл, що контактують між собою. Елементами множини (11) є такі вектори переміщень, які на поверхнях можливого контакту задовольняють умову непроникнення (8). Легко бачити, що K – опукла замкнена множина, але вона не є підпростором гільбертового простору V_0.

У працях [3, 4] показано, що вихідна контактна задача (1)–(3), (5)–(10) еквівалентна задачі мінімізації на множині K квадратичного функціонала Лагранжа

$$F(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}A(\mathbf{u},\mathbf{u}) - L(\mathbf{u}) \to \min_{\mathbf{u}\in K}, \tag{12}$$

де $A(\mathbf{u},\mathbf{v})$ – білінійна форма, що відповідає сумарній енергії деформації пружних тіл:

$$A(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \sum_{\alpha=1}^{N} a_\alpha(\mathbf{u}_\alpha,\mathbf{v}_\alpha), \qquad \mathbf{u},\mathbf{v} \in V_0\,,$$

$$a_\alpha(\mathbf{u}_\alpha,\mathbf{v}_\alpha) = \int\limits_{\Omega_\alpha}\hat{\boldsymbol{\sigma}}_\alpha(\mathbf{u}_\alpha) : \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_\alpha(\mathbf{v}_\alpha)\,d\Omega, \qquad \mathbf{u}_\alpha,\mathbf{v}_\alpha \in V_\alpha^0, \quad \alpha = 1,\ldots,N\,,$$

а $L(\mathbf{v})$ – лінійна форма, що дорівнює роботі зовнішніх сил:

$$L(\mathbf{v}) = \sum_{\alpha=1}^{N} \ell_\alpha(\mathbf{v}_\alpha), \qquad \mathbf{v} \in V_0,$$

$$\ell_\alpha(\mathbf{v}_\alpha) = \int_{\Gamma_\alpha^\sigma} \mathbf{p}_\alpha \cdot \mathbf{v}_\alpha \, d\mathcal{S} + \int_{\Omega_\alpha} \mathbf{f}_\alpha \cdot \mathbf{v}_\alpha \, d\Omega, \qquad \mathbf{v}_\alpha \in V_\alpha^0, \qquad \alpha = 1,\ldots,N.$$

Можна довести [3, 4], що білінійна форма $A(\mathbf{u},\mathbf{v})$ симетрична, неперервна та коерцитивна у V_0, а лінійна форма $L(\mathbf{v})$ неперервна у V_0, тобто

$$(\forall \mathbf{u},\mathbf{v} \in V_0) \qquad \{A(\mathbf{u},\mathbf{v}) = A(\mathbf{v},\mathbf{u})\}, \tag{13}$$

$$(\exists M > 0) \quad (\forall \mathbf{u},\mathbf{v} \in V_0) \quad \{|A(\mathbf{u},\mathbf{v})| \le M \|\mathbf{u}\|_{V_0} \|\mathbf{v}\|_{V_0}\}, \tag{14}$$

$$(\exists B > 0) \quad (\forall \mathbf{u} \in V_0) \quad \{A(\mathbf{u},\mathbf{u}) \ge B \|\mathbf{u}\|_{V_0}^2\}, \qquad B \le M, \tag{15}$$

$$(\exists S > 0) \quad (\forall \mathbf{v} \in V_0) \quad \{|L(\mathbf{v})| \le S \|\mathbf{v}\|_{V_0}\}. \tag{16}$$

Симетрія білінійної форми $A(\mathbf{u},\mathbf{v})$ випливає із симетрії пружних сталих у законі Гука (2), а неперервність та коерцитивність – з неперервності та коерцитивності білінійних форм $a_\alpha(\mathbf{u}_\alpha,\mathbf{v}_\alpha)$ для кожного з тіл. Неперервність $L(\mathbf{v})$ випливає із неперервності лінійних форм $\ell_\alpha(\mathbf{v}_\alpha)$, $\alpha = 1,\ldots,N$, яку доводять за допомогою теореми про сліди [8, с. 340].

Тепер розглянемо детальніше властивості функціонала (12). Функціонал F є двічі диференційовний за Ґато:

$$F'(\mathbf{u},\mathbf{v}) = A(\mathbf{u},\mathbf{v}) - L(\mathbf{v}), \qquad F''(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) = A(\mathbf{v},\mathbf{w}), \qquad \mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w} \in K.$$

З коерцитивності білінійної форми $A(\mathbf{u},\mathbf{v})$ випливає, що $(\forall \mathbf{u})$ $(\forall \mathbf{v} \ne 0)$ $\{F''(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{v}) > 0\}$, отже, функціонал $F(\mathbf{u})$ строго опуклий вниз. З неперервності $A(\mathbf{u},\mathbf{v})$ та $L(\mathbf{v})$ випливає неперервність $F'(\mathbf{u},\mathbf{v})$ за $\mathbf{v}$. Оскільки $F(\mathbf{u})$ опуклий, $F'(\mathbf{u},\mathbf{v})$ лінійний та неперервний за $\mathbf{v}$, то $F(\mathbf{u})$ слабко напівнеперервний знизу [9, с. 65], тобто

$$(\forall \mathbf{u} \in V_0)\ (\forall \{\mathbf{u}^k\} \subset V_0 : \mathbf{u}^k \underset{k\to\infty}{\to} \mathbf{u} \text{ слабко в } V_0)\ \left\{F(\mathbf{u}) \le \varliminf_{k\to\infty} F(\mathbf{u}^k)\right\}.$$

З нерівності $\frac{B}{2}\|\mathbf{u}\|_{V_0}^2 - S\|\mathbf{u}\|_{V_0} \le F(\mathbf{u})$ випливає, що $\lim\limits_{\|\mathbf{u}\|_{V_0}\to\infty} F(\mathbf{u}) = \infty$.

Оскільки V_0 – гільбертовий простір, K – опукла замкнута підмножина V_0, F – слабко напівнеперервний знизу та строго опуклий функціонал, $\lim\limits_{\|\mathbf{u}\|_{V_0}\to\infty} F(\mathbf{u}) = \infty$, то згідно з теоремою про мінімум функціоналів на опуклій множині [9, с. 126] існує єдиний розв'язок задачі (12) на множині K.

Крім цього, оскільки функціонал F диференційовний за Ґато на K, то згідно з теоремою про необхідні та достатні умови мінімуму функціоналів на опуклій замкненій множині [9, с. 126] розв'язування задачі (12) еквівалентне розв'язуванню на множині K варіаційної нерівності

$$F'(\mathbf{u},\mathbf{v}-\mathbf{u}) = A(\mathbf{u},\mathbf{v}-\mathbf{u}) - L(\mathbf{v}-\mathbf{u}) \ge 0 \qquad \forall \mathbf{v} \in K, \qquad \mathbf{u} \in K. \tag{17}$$

3. Варіаційне формулювання зі штрафом. Для отримання задачі мінімізації у вихідному просторі V_0 застосуємо до задачі опуклого програмування (12) метод штрафу [1, 5, 9, 15, 16].

Уведемо штраф за порушення умов непроникнення (8) у такій формі:

$$j_\theta(\mathbf{u}) = \frac{1}{2\theta} \sum_{\{\alpha,\beta\}\in Q} \int_{\mathcal{S}_{\alpha\beta}} \left[\left(d_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) - u_{\alpha n}(\mathbf{x}) - u_{\beta n}(\mathbf{x}')\right)^-\right]^2 d\mathcal{S}\,, \tag{18}$$

де $\theta > 0$, $y^- = \begin{cases} y, & y \le 0, \\ 0, & y > 0. \end{cases}$

Розглянемо задачу мінімізації функціонала зі штрафом

$$F_\theta(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} A(\mathbf{u},\mathbf{u}) - L(\mathbf{u}) + j_\theta(\mathbf{u}) \to \min_{\mathbf{u}\in V_0} \tag{19}$$

у вихідному просторі.

Зазначимо, що введення штрафу відповідає введенню між тілами умовного проміжного вінклерового шару з коефіцієнтом жорсткості $1/\theta$. При цьому величина $w_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = \left(d_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) - u_{\alpha n}(\mathbf{x}) - u_{\beta n}(\mathbf{x}')\right)^-$, $\mathbf{x} \in \mathcal{S}_{\alpha\beta}$, $\mathbf{x}' \in \mathcal{S}_{\beta\alpha}$, має сенс обтиснення цього шару, величина $\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = \sigma_{\alpha n}(\mathbf{x}) = \sigma_{\beta n}(\mathbf{x}') = w_{\alpha\beta}(\mathbf{x})/\theta$, $\mathbf{x} \in \mathcal{S}_{\alpha\beta}$, $\mathbf{x}' \in \mathcal{S}_{\beta\alpha}$, має сенс нормального контактного напруження, а штрафний доданок $j_\theta(\mathbf{u})$ дорівнює роботі нормального контактного напруження.

Теорема 1. *Для будь-якого* $\theta > 0$ *існує єдиний розв'язок* $\bar{\mathbf{u}}_\theta \in V_0$ *задачі* (19), *який при* $\theta \to 0$ *збігається сильно у просторі* V_0 *до розв'язку* $\mathbf{u}$ *вихідної варіаційної задачі* (17): $\|\bar{\mathbf{u}}_\theta - \bar{\mathbf{u}}\|_{V_0} \underset{\theta\to 0}{\to} 0$.

Д о в е д е н н я. Розглянемо властивості штрафного доданка $j_\theta(\mathbf{u})$. Функціонал (18) є двічі диференційовним за Ґато:

$$j'_\theta(\mathbf{u},\mathbf{v}) = -\frac{1}{\theta} \sum_{\{\alpha,\beta\}\in Q} \int_{\mathcal{S}_{\alpha\beta}} (d_{\alpha\beta} - u_{\alpha n} - u_{\beta n})^- (v_{\alpha n} + v_{\beta n})\, d\mathcal{S}\,,$$

$$j''_\theta(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) = \frac{1}{2\theta} \sum_{\{\alpha,\beta\}\in Q} \int_{\mathcal{S}_{\alpha\beta}} [1 - \operatorname{sgn}(d_{\alpha\beta} - u_{\alpha n} - u_{\beta n})](v_{\alpha n} + v_{\beta n}) \times$$
$$\times (w_{\alpha n} + w_{\beta n})\, d\mathcal{S}\,.$$

Також $(\forall \mathbf{u} \in V_0)$ $\{j_\theta(\mathbf{u}) \ge 0\}$, функціонал $j'_\theta(\mathbf{u},\mathbf{v})$ лінійний за $\mathbf{v}$, а $j''_\theta(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})$ лінійний за $\mathbf{v}$ та $\mathbf{w}$ і виконується умова

$$(\forall \mathbf{u},\mathbf{v} \in V_0) \qquad \{j''_\theta(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{v}) \ge 0\}. \tag{20}$$

Легко бачити, що функціонал $j'_\theta(\mathbf{u},\mathbf{v})$ неперервний за $\mathbf{v}$, а функціонал $j''_\theta(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})$ є неперервним за $\mathbf{v}$ і за $\mathbf{w}$, тобто

$$(\forall \mathbf{u} \in V_0) \quad (\exists \tilde{R} > 0) \quad (\forall \mathbf{v} \in V_0) \quad \left\{\left|j'_\theta(\mathbf{u},\mathbf{v})\right| \le \tilde{R}\,\|\mathbf{v}\|_{V_0}\right\}, \tag{21}$$

$$(\exists D > 0) \qquad (\forall \mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w} \in V_0) \qquad \left\{\left|j''_\theta(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})\right| \le D\,\|\mathbf{v}\|_{V_0}\,\|\mathbf{w}\|_{V_0}\right\}. \tag{22}$$

Це випливає з теореми про сліди [8, с. 340] з урахуванням властивостей функції $d_{\alpha\beta}(\mathbf{x})$ та нерівності

$$(\forall \mathbf{u} \in V_0) \qquad \{1 - \operatorname{sgn}(d_{\alpha\beta} - u_{\alpha n} - u_{\beta n}) \le 2\}.$$

Тепер розглянемо властивості функціонала зі штрафом

$$F_\theta(\mathbf{u}) = F(\mathbf{u}) + j_\theta(\mathbf{u}), \qquad \mathbf{u} \in V_0.$$

Функціонал $F_\theta(\mathbf{u})$ є двічі диференційовним за Ґато на V_0:

$$F'_\theta(\mathbf{u},\mathbf{v}) = F'(\mathbf{u},\mathbf{v}) + j'_\theta(\mathbf{u},\mathbf{v}), \qquad F''_\theta(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) = F''(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) + j''_\theta(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}).$$

Із властивостей штрафного доданка $j_\theta(\mathbf{u})$ та функціонала $F(\mathbf{u})$ випливає, що $F_\theta(\mathbf{u})$ є строго опуклим, $F'_\theta(\mathbf{u},\mathbf{v})$ є лінійним і неперервним за $\mathbf{v}$. Отже, $F_\theta(\mathbf{u})$ слабко напівнеперервний знизу [9, с. 65]. Також очевидно, що $\lim\limits_{\|\mathbf{u}\|_{V_0}\to\infty} F_\theta(\mathbf{u}) = \infty$.

Тому згідно з теоремою про існування мінімуму функціоналів у рефлексивному банаховому просторі [9, с. 72] існує розв'язок задачі (19) у просторі V_0.

Окрім цього, функціонал $F_\theta(\mathbf{u})$ є строго опуклим та диференційовним за Ґато на V_0. Тому за теоремою про необхідні та достатні умови мінімуму функціоналів у рефлексивному банаховому просторі [9, с. 73] розв'язок задачі (19) єдиний і є розв'язком у просторі V_0 варіаційного рівняння

$$F'_\theta(\mathbf{u},\mathbf{v}) = A(\mathbf{u},\mathbf{v}) - L(\mathbf{v}) + j'_\theta(\mathbf{u},\mathbf{v}) = 0 \qquad \forall \mathbf{v}\in V_0, \qquad \mathbf{u}\in V_0. \tag{23}$$

Тепер покажемо, що розв'язок варіаційного рівняння зі штрафом (23) при $\theta\to 0$ збігається до розв'язку вихідної варіаційної нерівності (17).

Перепишемо задачі (17), (19) та (23) у такому еквівалентному вигляді:

$$F'(\mathbf{u},\mathbf{v}-\mathbf{u}) = A(\mathbf{u},\mathbf{v}-\mathbf{u}) - \langle L,\mathbf{v}-\mathbf{u}\rangle \ge 0 \quad \forall \mathbf{v}\in K, \quad \mathbf{u}\in K, \tag{24}$$

$$F_\theta(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}A(\mathbf{u},\mathbf{u}) - \langle L,\mathbf{u}\rangle + \frac{1}{\theta}\psi(\mathbf{u}) \to \min_{\mathbf{u}\in V_0}, \tag{25}$$

$$F'_\theta(\mathbf{u},\mathbf{v}) = A(\mathbf{u},\mathbf{v}) - \langle L,\mathbf{v}\rangle + \frac{1}{\theta}\langle \Phi(\mathbf{u}),\mathbf{v}\rangle = 0 \quad \forall \mathbf{v}\in V_0, \quad \mathbf{u}\in V_0, \tag{26}$$

де $\langle X,\mathbf{u}\rangle = X(\mathbf{u})$ – дія функціонала $X\in V_0^*$ на елемент $\mathbf{u}\in V_0$; V_0^* – простір, спряжений до V_0; $\psi(\mathbf{u}) = \theta j_\theta(\mathbf{u})$; $\Phi : V_0 \to V_0^*$, $\Phi(\mathbf{u}) = \psi'(\mathbf{u})$ – похідна Ґато функціонала ψ, а $\langle \Phi(\mathbf{u}),\mathbf{v}\rangle = \langle \psi'(\mathbf{u}),\mathbf{v}\rangle = \psi'(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \theta j'_\theta(\mathbf{u},\mathbf{v})$.

Покажемо, що оператор $\Phi : V_0 \to V_0^*$ є оператором штрафу [1, с. 31] для опуклої замкнутої підмножини K гільбертового простору V_0, тобто виконуються умови

(*i*) Φ задовольняє умову Ліпшиця на V_0:

$$(\exists C>0) \quad (\forall \mathbf{u},\mathbf{v}\in V_0) \quad \left\{\|\Phi(\mathbf{u})-\Phi(\mathbf{v})\|_{V_0^*} \le C\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|_{V_0}\right\};$$

(*ii*) Φ монотонний на V_0:

$$(\forall \mathbf{u},\mathbf{v}\in V_0) \quad \left\{\langle \Phi(\mathbf{u})-\Phi(\mathbf{v}),\mathbf{u}-\mathbf{v}\rangle \ge 0\right\};$$

(*iii*) $\operatorname{Ker}(\Phi) = K$, де $\operatorname{Ker}(\Phi) = \{\mathbf{v} : \mathbf{v}\in V_0,\ \Phi(\mathbf{v}) = 0\}$ – ядро оператора Φ.

Оскільки функціонал $\psi : V_0 \to \mathbb{R}$ опуклий та диференційовний за Ґато на V_0, то оператор $\Phi = \psi' : V_0 \to V_0^*$ є монотонним [5, с. 169]. Крім цього, ψ двічі диференційовний за Ґато на V_0, $\psi'(\mathbf{u},\mathbf{v})$ є неперервним за $\mathbf{v}$ і $|\psi''(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})| \le D'\|\mathbf{v}\|_{V_0}\|\mathbf{w}\|_{V_0}$, $D' = \theta D > 0$. Легко довести, що з цих властивостей випливає виконання умови Ліпшиця на V_0 для оператора Φ.

Якщо $\mathbf{u}\in K$, то $\Phi(\mathbf{u}) \equiv 0$, і навпаки, коли $\Phi(\mathbf{u}) \equiv 0$, то $\mathbf{u}\in K$. Отже, $\operatorname{Ker}(\Phi) = K$.

Оскільки існує єдиний розв'язок $\bar{\mathbf{u}}\in K$ задачі (24) та для будь-якого $\theta>0$ існує єдиний розв'язок $\bar{\mathbf{u}}_\theta\in V_0$ задачі (26), оператор $\Phi : V_0 \to V_0^*$ –

оператор штрафу для множини K, то згідно з теоремою про збіжність методу штрафу для варіаційних нерівностей [1, с. 32] розв'язок задачі (23) при $\theta \to 0$ збігається сильно у просторі V_0 до розв'язку вихідної варіаційної задачі (17), тобто $\|\bar{\mathbf{u}}_\theta - \bar{\mathbf{u}}\|_{V_0} \underset{\theta \to 0}{\to} 0$. Теорему доведено. ◊

4. Методи простої ітерації для варіаційних рівнянь. Розглянемо абстрактне варіаційне рівняння вигляду

$$A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - L(\mathbf{v}) = 0 \qquad \forall \mathbf{v} \in V_0, \qquad \mathbf{u} \in V_0, \tag{27}$$

де V_0 – замкнений рефлексивний банаховий простір, $A(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ – білінійна форма, а $L(\mathbf{v})$ – лінійна форма. Припустимо, що розв'язок задачі (27) існує і є єдиним. Для цього достатньо виконання умов (13)–(16).

Нехай у просторі V_0 задана білінійна форма $G(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, така, що для будь-якого лінійного обмеженого функціонала $X \in V_0^*$ задача

$$G(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - X(\mathbf{v}) = 0 \qquad \forall \mathbf{v} \in V_0, \qquad \mathbf{u} \in V_0$$

має єдиний розв'язок, який простіше знайти, ніж розв'язок вихідної задачі (27).

У праці [1, с. 30] для числового розв'язування варіаційного рівняння (27) запропоновано метод простої ітерації у такій формі:

$$G(\mathbf{u}^{k+1}, \mathbf{v}) = G(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}) - \gamma[A(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}) - L(\mathbf{v})], \qquad k = 0, 1, \ldots, \tag{28}$$

де $\gamma \in \mathbb{R}$ – ітераційний параметр, $\mathbf{u}^k \in V_0$ – k-те наближення до розв'язку задачі (27). У цій праці також доведено таке твердження про збіжність методу (28).

Теорема 2 [1, с. 30]. *Нехай білінійна форма* $G(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ *є симетричною, неперервною і коерцитивною*:

$$(\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_0) \qquad \{G(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = G(\mathbf{v}, \mathbf{u})\}, \tag{29}$$

$$(\exists \tilde{M} > 0) \quad (\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_0) \quad \{|G(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \le \tilde{M} \|\mathbf{u}\|_{V_0} \|\mathbf{v}\|_{V_0}\}, \tag{30}$$

$$(\exists \tilde{B} > 0) \quad (\forall \mathbf{u} \in V_0) \quad \{G(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \ge \tilde{B} \|\mathbf{u}\|_{V_0}^2\}, \tag{31}$$

і нехай білінійна форма $A(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ *є неперервною* (14) *і коерцитивною* (15), *а лінійна форма* $L(\mathbf{v})$ *є неперервною* (16).

Тоді при $\gamma \in (0, \gamma_2)$, $\gamma_2 = 2B\tilde{B}/M^2$, *послідовність* $\{\mathbf{u}^k\}$, *отримана ітераційним методом* (28), *збігається сильно у просторі* V_0 *до розв'язку* $\bar{\mathbf{u}}$ *задачі* (27)*:* $\|\mathbf{u}^k - \bar{\mathbf{u}}\|_{V_0} \underset{k \to \infty}{\to} 0$.

Тепер розглянемо метод простої ітерації для варіаційного рівняння зі штрафом (23) у вигляді

$$G(\mathbf{u}^{k+1}, \mathbf{v}) = G(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}) - \gamma[A(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}) + j'_\theta(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}) - L(\mathbf{v})], \quad k = 0, 1, \ldots. \tag{32}$$

Безпосередньо застосувати теорему 2 до методу (32) не можна, оскільки варіаційне рівняння (23) містить нелінійний за $\mathbf{u}$ доданок $j'_\theta(\mathbf{u}, \mathbf{v})$. Дамо узагальнення теореми 2 для цього випадку.

Теорема 3. *Нехай білінійна форма* $G(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ *задовольняє умови* (29)–(31), *білінійна форма* $A(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ – *умови* (14), (15), *лінійна форма* $L(\mathbf{v})$ – *умову* (16), *нелінійний доданок* $j'_\theta(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ *неперервний за* $\mathbf{v}$ (21) *та диференційовний за Ґато за* $\mathbf{u}$, *а функціонал* $j''_\theta(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ *є лінійним за* $\mathbf{v}$ *і* $\mathbf{w}$ *та має властивості* (20), (22).

Тоді при $\gamma \in (0, \gamma_2)$, $\gamma_2 = 2B\tilde{B}/M_*^2$, $M_* = M + D$, *послідовність* $\{\mathbf{u}^k\}$ *ітераційного методу* (32) *збігається сильно у* V_0 *до розв'язку* $\bar{\mathbf{u}}$ *задачі* (23):

$$\left\|\mathbf{u}^k - \bar{\mathbf{u}}\right\|_{V_0} \underset{k\to\infty}{\to} 0 .$$

Д о в е д е н н я. Оскільки білінійна форма $G(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ є симетричною, неперервною та коерцитивною, то можна ввести скалярний добуток і норму:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_G := G(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \qquad \|\mathbf{u}\|_G = \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})_G} = \sqrt{G(\mathbf{u}, \mathbf{u})}, \qquad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_0 .$$

З умов (30), (31) випливають нерівності

$$\sqrt{\tilde{B}}\,\|\mathbf{u}\|_{V_0} \le \|\mathbf{u}\|_G \le \sqrt{\tilde{M}}\,\|\mathbf{u}\|_{V_0}, \quad \frac{1}{\sqrt{\tilde{M}}}\|\mathbf{u}\|_G \le \|\mathbf{u}\|_{V_0} \le \frac{1}{\sqrt{\tilde{B}}}\|\mathbf{u}\|_G, \quad \tilde{B} \le \tilde{M} .$$

Тому норми $\|\cdot\|_G$ та $\|\cdot\|_{V_0}$ еквівалентні.

На кожному кроці $k \in \{0,1,\ldots\}$ методу (32) потрібно розв'язувати задачу

$$G(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - X^k(\mathbf{v}) = 0 \qquad \forall \mathbf{v} \in V_0, \qquad \mathbf{u} \in V_0 , \tag{33}$$

де $X^k(\mathbf{v}) = G(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}) - \gamma\left[A(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}) + j'_\theta(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}) - L(\mathbf{v})\right]$, $\mathbf{u}^k \in V_0$, – лінійний функціонал. З властивостей (14), (16), (21) та (30) випливає неперервність лінійної форми $X^k(\mathbf{v})$:

$$(\exists Z_k > 0) \qquad (\forall \mathbf{v} \in V_0) \qquad \left\{\left|X^k(\mathbf{v})\right| \le Z_k \|\mathbf{v}\|_{V_0}\right\}, \tag{34}$$

де $Z_k = \tilde{M}\left\|\mathbf{u}^k\right\|_{V_0} + |\gamma|\left(M\left\|\mathbf{u}^k\right\|_{V_0} + \tilde{R}(\mathbf{u}^k) + S\right) + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Оскільки виконуються умови (29)–(31) і (34), то задача (33) має єдиний розв'язок $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{k+1} \in V_0$.

Тепер покажемо, що послідовність розв'язків задач (33) збігається до розв'язку варіаційного рівняння (23). Нехай $\bar{\mathbf{u}} \in V_0$ – розв'язок задачі (23). Позначимо $\boldsymbol{\varphi}^k := \mathbf{u}^k - \bar{\mathbf{u}} \in V_0$, $k = 0,1,\ldots$, і перепишемо рівняння (32) так:

$$G(\bar{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\varphi}^{k+1}, \mathbf{v}) = G(\bar{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\varphi}^k, \mathbf{v}) - \gamma\left[A(\bar{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\varphi}^k, \mathbf{v}) + j'_\theta(\bar{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\varphi}^k, \mathbf{v}) - L(\mathbf{v})\right].$$

Віднявши від цього виразу тотожність

$$G(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) \equiv G(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) - \gamma[A(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) + j'_\theta(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) - L(\mathbf{v})],$$

отримаємо

$$G(\boldsymbol{\varphi}^{k+1}, \mathbf{v}) = G(\boldsymbol{\varphi}^k, \mathbf{v}) - \gamma\left[A(\boldsymbol{\varphi}^k, \mathbf{v}) + j'_\theta(\bar{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\varphi}^k, \mathbf{v}) - j'_\theta(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v})\right].$$

Застосувавши до j'_θ формулу скінченних приростів Лагранжа [9, с. 61]

$$j'_\theta(\bar{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\varphi}^k, \mathbf{v}) - j'_\theta(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) = j''_\theta(\bar{\mathbf{u}} + \tau\boldsymbol{\varphi}^k, \boldsymbol{\varphi}^k, \mathbf{v}), \qquad \tau \in (0, 1),$$

отримаємо

$$G(\boldsymbol{\varphi}^{k+1} - \boldsymbol{\varphi}^k, \mathbf{v}) = -\gamma\left[A(\boldsymbol{\varphi}^k, \mathbf{v}) + j''_\theta(\bar{\mathbf{u}} + \tau\boldsymbol{\varphi}^k, \boldsymbol{\varphi}^k, \mathbf{v})\right] \qquad \forall \mathbf{v} \in V_0 . \tag{35}$$

Покладемо у (35) $\mathbf{v} := \boldsymbol{\varphi}^{k+1} - \boldsymbol{\varphi}^k$. Тоді

$$G(\boldsymbol{\varphi}^{k+1} - \boldsymbol{\varphi}^k, \boldsymbol{\varphi}^{k+1} - \boldsymbol{\varphi}^k) =$$

$$= -\gamma\left[A(\boldsymbol{\varphi}^k, \boldsymbol{\varphi}^{k+1} - \boldsymbol{\varphi}^k) + j''_\theta(\bar{\mathbf{u}} + \tau\boldsymbol{\varphi}^k, \boldsymbol{\varphi}^k, \boldsymbol{\varphi}^{k+1} - \boldsymbol{\varphi}^k)\right].$$

Звідси маємо

$$\left\|\boldsymbol{\varphi}^{k+1} - \boldsymbol{\varphi}^k\right\|_G^2 \le |\gamma|\left(\left|A(\boldsymbol{\varphi}^k, \boldsymbol{\varphi}^{k+1} - \boldsymbol{\varphi}^k)\right| + \left|j''_\theta(\bar{\mathbf{u}} + \tau\boldsymbol{\varphi}^k, \boldsymbol{\varphi}^k, \boldsymbol{\varphi}^{k+1} - \boldsymbol{\varphi}^k)\right|\right).$$

З неперервності білінійної форми A та властивості (22) випливає, що

$$\left\|\varphi^{k+1}-\varphi^{k}\right\|_{G}^{2} \le |\gamma| M_{*} \left\|\varphi^{k}\right\|_{V_0} \left\|\varphi^{k+1}-\varphi^{k}\right\|_{V_0}, \qquad M_{*} = M + D > 0.$$

Далі, враховуючи співвідношення між нормами

$$\left\|\varphi^{k+1}-\varphi^{k}\right\|_{V_0} \le \frac{\left\|\varphi^{k+1}-\varphi^{k}\right\|_{G}}{\sqrt{\tilde{B}}}, \tag{36}$$

отримуємо нерівності

$$\sqrt{\tilde{B}}\left\|\varphi^{k+1}-\varphi^{k}\right\|_{V_0} \le \left\|\varphi^{k+1}-\varphi^{k}\right\|_{G} \le \frac{|\gamma| M_{*}}{\sqrt{\tilde{B}}}\left\|\varphi^{k}\right\|_{V_0}. \tag{37}$$

Тепер у виразі (35) покладемо $\mathbf{v} := \varphi^{k+1} + \varphi^{k}$. Тоді

$$G(\varphi^{k+1}-\varphi^{k}, \varphi^{k+1}+\varphi^{k}) =$$

$$= -\gamma\left[A(\varphi^{k}, \varphi^{k+1}+\varphi^{k}) + j_{\theta}''(\bar{\mathbf{u}}+\tau\varphi^{k}, \varphi^{k}, \varphi^{k+1}+\varphi^{k})\right].$$

Це співвідношення можна записати так:

$$\left\|\varphi^{k}\right\|_{G}^{2} - \left\|\varphi^{k+1}\right\|_{G}^{2} = \gamma\left[2A(\varphi^{k},\varphi^{k}) + 2j_{\theta}''(\bar{\mathbf{u}}+\tau\varphi^{k},\varphi^{k},\varphi^{k}) + \right.$$

$$\left. + A(\varphi^{k}, \varphi^{k+1}-\varphi^{k}) + j_{\theta}''(\bar{\mathbf{u}}+\tau\varphi^{k}, \varphi^{k}, \varphi^{k+1}-\varphi^{k})\right].$$

З неперервності білінійної форми A і властивості (22) випливає нерівність

$$A(\varphi^{k}, \varphi^{k+1}-\varphi^{k}) + j_{\theta}''(\bar{\mathbf{u}}+\tau\varphi^{k}, \varphi^{k}, \varphi^{k+1}-\varphi^{k}) \ge -M_{*}\left\|\varphi^{k}\right\|_{V_0}\left\|\varphi^{k+1}-\varphi^{k}\right\|_{V_0}.$$

Припустимо, що $\gamma \ge 0$. Тоді враховуючи коерцитивність білінійної форми A, нерівність (20) та попередню нерівність, одержуємо

$$\left\|\varphi^{k}\right\|_{G}^{2} - \left\|\varphi^{k+1}\right\|_{G}^{2} \ge \gamma\left[2B\left\|\varphi^{k}\right\|_{V_0}^{2} - M_{*}\left\|\varphi^{k}\right\|_{V_0}\left\|\varphi^{k+1}-\varphi^{k}\right\|_{V_0}\right].$$

Враховуючи нерівності (36) і (37) далі отримуємо

$$\left\|\varphi^{k}\right\|_{G}^{2} - \left\|\varphi^{k+1}\right\|_{G}^{2} \ge \gamma\left(2B - \frac{\gamma M_{*}^{2}}{\tilde{B}}\right)\left\|\varphi^{k}\right\|_{V_0}^{2} \ge \frac{\gamma}{\tilde{M}}\left(2B - \frac{\gamma M_{*}^{2}}{\tilde{B}}\right)\left\|\varphi^{k}\right\|_{G}^{2}. \tag{38}$$

Якщо

$$\gamma\left(2B - \gamma\frac{M_{*}^{2}}{\tilde{B}}\right) > 0, \tag{39}$$

то послідовність $\left\|\varphi^{k}\right\|_{G}^{2}$ є монотонно незростаючою: $\left\|\varphi^{k}\right\|_{G}^{2} \ge \left\|\varphi^{k+1}\right\|_{G}^{2}$, отже, $\left\|\varphi^{k}\right\|_{G}^{2} \underset{k\to\infty}{\to} \omega$, де $\omega \ge 0$. Перейшовши до границі при $k \to \infty$ у виразі (38), отримуємо, що $0 \ge \frac{\gamma}{\tilde{M}}\left(2B - \frac{\gamma M_{*}^{2}}{\tilde{B}}\right)\omega$, тобто $\omega = 0$, і тому $\left\|\varphi^{k}\right\|_{G} \underset{k\to\infty}{\to} 0$. З нерівності (39) встановлюємо допустиму область ітераційного параметра:

$$\gamma \in (0, \gamma_2), \qquad \gamma_2 = 2\frac{B\tilde{B}}{M_{*}^{2}}.$$

Оскільки норми $\|\cdot\|_{G}$ та $\|\cdot\|_{V_0}$ еквівалентні, то $\left\|\varphi^{k}\right\|_{V_0} \underset{k\to\infty}{\to} 0$. Отже, $\left\|\mathbf{u}^{k} - \bar{\mathbf{u}}\right\|_{V_0} \underset{k\to\infty}{\to} 0$. Теорему доведено. ◊

Теорема 4. *Нехай виконуються умови теореми* 3. *Тоді швидкість збіжності методу* (31) *в енергетичній нормі* $\|\cdot\|_{G}$ *є лінійною:*

$$\left\|\mathbf{u}^{k+1} - \bar{\mathbf{u}}\right\|_{G} \le q\left\|\mathbf{u}^{k} - \bar{\mathbf{u}}\right\|_{G}, \quad q \in (0, 1), \quad q = \sqrt{1 - \gamma\left(2B - \gamma M_{*}^{2}/\tilde{B}\right)/\tilde{M}}, \tag{40}$$

а при $\gamma = \bar{\gamma} = B\tilde{B}/M_*^2$ *швидкість є найбільшою. Також справджується оцінка*

$$\left\|\mathbf{u}^{k+1} - \bar{\mathbf{u}}\right\|_G \le \frac{q}{1-q}\left\|\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k\right\|_G . \qquad (41)$$

Д о в е д е н н я. З нерівності (38) отримуємо оцінку

$$\left\|\boldsymbol{\varphi}^{k+1}\right\|_G^2 \le q^2\left\|\boldsymbol{\varphi}^k\right\|_G^2, \qquad q^2(\gamma) := 1 - \frac{2B}{\tilde{M}}\gamma + \frac{M_*^2}{\tilde{M}\tilde{B}}\gamma^2 .$$

Доведемо, що $q^2 \in (0, 1)$ при $\gamma \in (0, \gamma_2)$. Легко бачити, що

$$q^2(0) = q^2(\gamma_2) = 1, \qquad \bar{\gamma} = \arg\min_{\gamma\in(0,\,\gamma_2)} q^2(\gamma) = \frac{\gamma_2}{2} = \frac{B\tilde{B}}{M_*^2} .$$

Мінімум функції $q^2(\gamma)$ є більший від нуля: $\min\limits_{\gamma\in(0;\gamma_2)} q^2(\gamma) = 1 - B^2\tilde{B}/\tilde{M}M_*^2 > 0$.

Оскільки $M_* = M + D > M$, $M \ge B$, $\tilde{M} \ge \tilde{B}$, то виконується нерівність $M_*^2\tilde{M} =$ $= (M+D)^2\tilde{M} \ge (B+D)^2\tilde{B} > B^2\tilde{B}$, тому $q^2 \in (0, 1)$.

З оцінки (40) випливає, що швидкість збіжності максимальна, коли параметр q є найменшим, тобто при $\gamma = \bar{\gamma}$.

Перетворимо нерівність (40):

$$\left\|\mathbf{u}^{k+1} - \bar{\mathbf{u}}\right\|_G \le q\left\|\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{k+1} + \mathbf{u}^{k+1} - \bar{\mathbf{u}}\right\|_G \le q\left\|\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{k+1}\right\|_G + q\left\|\mathbf{u}^{k+1} - \bar{\mathbf{u}}\right\|_G .$$

Звідси отримуємо шукану оцінку похибки (41). Теорему доведено. ◊

5. Паралельна схема Неймана методу декомпозиції області. Тепер для розв'язування варіаційного рівняння (23) розглянемо ітераційний метод Неймана, який здійснює декомпозицію, тобто зводить розв'язування цієї задачі до розв'язування послідовності окремих задач для кожного із тіл Ω_α, $\alpha = 1,\ldots,N$.

Поклавши в (32) $G(\mathbf{u},\mathbf{v}) = A(\mathbf{u},\mathbf{v})$, отримаємо ітераційний процес

$$A(\mathbf{u}^{k+1},\mathbf{v}) = A(\mathbf{u}^k,\mathbf{v}) - \gamma\left[A(\mathbf{u}^k,\mathbf{v}) + j_\theta'(\mathbf{u}^k,\mathbf{v}) - L(\mathbf{v})\right], \quad k = 0,1,\ldots . \qquad (42)$$

Білінійна форма $A(\mathbf{u},\mathbf{v})$ є симетричною, неперервною і коерцитивною, лінійна форма $L(\mathbf{v})$ є неперервною, функціонал $j_\theta'(\mathbf{u},\mathbf{v})$ є неперервним за $\mathbf{v}$ (21) і диференційовним за Ґато за $\mathbf{u}$, $j_\theta''(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})$ є лінійним за $\mathbf{v}$ і за $\mathbf{w}$ та задовольняє умови (20), (22). Отже, до методу (42) можна застосовувати теореми 3 та 4. Врахувавши, що $\tilde{B} = B$, $\tilde{M} = M$, отримаємо:

1°. При $\gamma \in (0, \gamma_2)$, $\gamma_2 = 2B^2/M_*^2$, $M_* = M + D$ послідовність $\{\mathbf{u}^k\}$, отримана методом (42), збігається до розв'язку $\bar{\mathbf{u}}$ задачі (23), тобто $\left\|\mathbf{u}^k - \bar{\mathbf{u}}\right\|_{V_0} \underset{k\to\infty}{\to} 0$.

2°. Швидкість збіжності в енергетичній нормі $\|\cdot\|_A$ є лінійною, тобто виконуються оцінки (40), (41), де $q = \sqrt{1 - \gamma(2B - \gamma M_*^2/B)/M}$.

3°. При $\gamma = \bar{\gamma} = B^2/M_*^2$ швидкість збіжності є найбільшою.

Тепер покажемо, що метод (42) здійснює декомпозицію. Виконавши елементарні перетворення виразу (42), одержимо

$$A\left(\frac{1}{\gamma}\left[\mathbf{u}^{k+1} - (1-\gamma)\mathbf{u}^k\right], \mathbf{v}\right) = L(\mathbf{v}) - j_\theta'(\mathbf{u}^k,\mathbf{v}) .$$

Увівши позначення $\tilde{\mathbf{u}}^{k+1} := \frac{1}{\gamma}\left[\mathbf{u}^{k+1} - (1-\gamma)\mathbf{u}^k\right]$, ітераційний процес (42) записуємо так:

$$A(\tilde{\mathbf{u}}^{k+1}, \mathbf{v}) - L(\mathbf{v}) + j'_\theta(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}) = 0\,, \tag{43}$$

$$\mathbf{u}^{k+1} = \gamma \tilde{\mathbf{u}}^{k+1} + (1-\gamma)\mathbf{u}^k, \qquad k = 0,1,\ldots. \tag{44}$$

Розпишемо (43) детальніше:

$$\sum_{\alpha=1}^{N} a_\alpha(\tilde{\mathbf{u}}_\alpha^{k+1}, \mathbf{v}_\alpha) - \sum_{\alpha=1}^{N} \ell_\alpha(\mathbf{v}_\alpha) - \\ - \frac{1}{\theta} \sum_{\{\alpha,\beta\}\in Q} \int_{\mathcal{S}_{\alpha\beta}} (d_{\alpha\beta} - u_{\alpha n}^k - u_{\beta n}^k)^- (v_{\alpha n} + v_{\beta n})\, d\mathcal{S} = 0\,.$$

Оскільки виконується співвідношення

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{\beta\in\mathcal{B}_\alpha} \int_{\mathcal{S}_{\alpha\beta}} (d_{\alpha\beta} - u_{\alpha n}^k - u_{\beta n}^k)^- v_{\alpha n}\, d\mathcal{S} = \\ = \sum_{\{\alpha,\beta\}\in Q} \int_{\mathcal{S}_{\alpha\beta}} (d_{\alpha\beta} - u_{\alpha n}^k - u_{\beta n}^k)^- (v_{\alpha n} + v_{\beta n})\, d\mathcal{S}\,,$$

то легко бачити, що задача (43) розпадається на N паралельних задач:

$$a_\alpha(\tilde{\mathbf{u}}_\alpha^{k+1}, \mathbf{v}_\alpha) - \ell_\alpha(\mathbf{v}_\alpha) - \\ - \frac{1}{\theta} \sum_{\beta\in\mathcal{B}_\alpha} \int_{\mathcal{S}_{\alpha\beta}} (d_{\alpha\beta} - u_{\alpha n}^k - u_{\beta n}^k)^- v_{\alpha n}\, d\mathcal{S} = 0, \quad \alpha = 1,\ldots,N\,, \tag{45}$$

$$\mathbf{u}_\alpha^{k+1} = \gamma \tilde{\mathbf{u}}_\alpha^{k+1} + (1-\gamma)\mathbf{u}_\alpha^k, \qquad \alpha = 1,\ldots,N, \qquad k = 0,1,\ldots. \tag{46}$$

Зазначимо, що декомпозицію вдається досягнути, оскільки величини, які є спільними для підобластей, відомі з попередньої ітерації.

Задачу (45) можна трактувати як задачу із заданими зусиллями (задача Неймана), оскільки величини $\sigma_{\alpha\beta}^k = (d_{\alpha\beta} - u_{\alpha n}^k - u_{\beta n}^k)^- / \theta$ мають сенс нормальних контактних напружень.

Отже, для розв'язування нелінійного варіаційного рівняння (23) отримали ітераційний процес (45), (46), який полягає у паралельному розв'язуванні на кожному кроці N лінійних задач з умовами Неймана для окремих тіл. Тому ця схема відноситься до класу алгоритмів МДО типу Неймана. Покроковий запис алгоритму схеми Неймана (45), (46) для випадку контакту двох тіл ($N = 2$) наведено у праці [7].

Аналіз числової ефективності розглянутої схеми проведено у працях [2, 7] з використанням методу скінчених елементів.

Висновки. На основі варіаційного принципу Лагранжа, методу штрафу, методу простої ітерації для варіаційних рівнянь і його модифікації, обґрунтовано паралельну схему Неймана методу декомпозиції області для розв'язування задач одностороннього контакту багатьох пружних тіл. Шляхом узагальнення теореми про збіжність методу простої ітерації для варіаційних рівнянь доведено збіжність цього методу у нормі вихідного простору. Встановлено, що швидкість збіжності цього методу в енергетичній нормі є лінійною, знайдено величину оптимального ітераційного параметра.

1. *Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р.* Численное исследование вариационных неравенств. – Москва: Мир, 1979. – 574 с.
2. *Григоренко А. Я., Дыяк И. И., Прокопышин И. И.* Методы декомпозиции области для решения задач контакта без трения многослойных упругих тел // Прикл. механика. – 20 с. (у друці).
3. *Кравчук А. С.* Постановка задачи о контакте нескольких деформируемых тел как задачи нелинейного программирования // Прикл. математика и механика. – 1978. – **42**, № 3. – С. 467–473.
4. *Кузьменко В. И.* О вариационном подходе к теории контактных задач для нелинейно-упругих слоистых тел // Прикл. математика и механика. – 1979. – **43**, № 5. – С. 893–901.

5. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – Москва: Мир, 1972. – 588 с.
6. *Механика* контактных взаимодействий / Под ред. И. И. Воровича и В. М. Александрова. – Москва: Физматлит, 2001. – 672 с.
7. *Прокопишин І.* Паралельні схеми методу декомпозиції області для контактних задач теорії пружності без тертя // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Прикл. математика та інформатика. – 2008. – Вип. 14. – С. 123–133.
8. *Ректорис К.* Вариационные методы в математической физике и технике. – Москва: Мир, 1985. – 590 с.
9. *Сеа Ж.* Оптимизация. Теория и алгоритмы. – Москва: Мир, 1973. – 244 с.
10. *Avery P., Farhat C.* The FETI family of domain decomposition methods for inequality-constrained quadratic programming: Application to contact problems with conforming and nonconforming interfaces // Comput. Meth. Appl. Mech. Engng. – 2009. – **198**. – P. 1673–1683.
11. *Bayada G., Sabil J., Sassi T.* A Neumann–Neumann domain decomposition algorithm for the Signorini problem // Appl. Math. Lett. – 2004. – **17**, No. 10. – P. 1153–1159.
12. *Daněk J.* Domain decomposition method for contact problems with small range contact // J. Math. and Comput. in Simulation. – 2003. – **61**, No. 3–6. – P. 359–373.
13. *Eck C., Wohlmuth B. I.* Convergence of contact–Neumann iteration for solution of two-body contact problems // Math. Models and Meth. in Appl. Sci. – 2003. – **13,** No. 7. – P. 1103–1118.
14. *Hüeber S., Wohlmuth B. I.* A primal-dual active set strategy for non-linear multibody contact problems // Comput. Meth. Appl. Mech. Engng. – 2005. – **194**. – P. 3147–3166.
15. *Khludnev A. M., Kovtunenko V. A.* Analysis of cracks in solids. – Southampton, Boston: WIT Press, 2000. – 386 p.
16. *Kikuchi N., Oden J. T.* Contact problem in elasticity: A study of variational inequalities and finite element methods. – Philadelphia: SIAM, 1988. – 489 p.
17. *Krause R., Wohlmuth B.* A Dirichlet–Neumann type algorithm for contact problems with friction // Comput. and Visualization in Sci. – 2002. – **5**, No. 3. – P. 139–148.
18. *Wriggers P.* Computational contact mechanics. – Springer, 2006. – 518 p.

СХОДИМОСТЬ ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ СХЕМЫ НЕЙМАНА МЕТОДА ДЕКОМПОЗИЦИИ ОБЛАСТИ ДЛЯ ЗАДАЧ КОНТАКТА БЕЗ ТРЕНИЯ НЕСКОЛЬКИХ УПРУГИХ ТЕЛ

На основании вариационной формулировки и метода штрафа рассмотрена параллельная схема Неймана метода декомпозиции области для решения задач одностороннего контакта пространственных упругих тел. Показаны существование и единственность решения задачи со штрафом, и сходимость по параметру штрафа. Доказана сходимость схемы и определено оптимальное значение итерационного параметра.

CONVERGENCE OF NEUMANN PARALLEL SCHEME OF DOMAIN DECOMPOSITION FOR FRICTIONLESS ELASTIC MULTIBODY CONTACT PROBLEMS

The Neumann parallel domain decomposition scheme which is based on the variational formulation and the penalty method is proposed to solve unilateral frictionless multibody contact elasticity problems. The existence and uniqueness of solution of the penalty variational problem and the penalty method convergence are shown. The convergence of this scheme is proved and the optimal iteration parameter is determined.

[1] Львів. нац. ун-т імені Івана Франка, Львів,
[2] Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
04.05.09