УДК 539.30

І. Б. Прокопович

ПРИНЦИПИ НЕЗАЛЕЖНОСТІ В РІВНЯННЯХ СТАНУ ДЕФОРМІВНОГО МАТЕРІАЛУ

Розглянуто принципи координатної, обертової і початкової незалежності рівнянь стану деформівного матеріалу та пов'язану з ними теорему про існування потенціалу пружності. Показано, що відоме аксіоматичне обґрунтування і математичне подання принципів у «раціональній механіці континууму», а також доведення теореми є помилковими. Наведено правильне доведення принципів і теореми у найбільш загальному випадку (напружене анізотропне тіло під дією довільного тензорного поля) та без застосування жодних аксіом. На цій підставі із системи рівнянь стану деформівного матеріалу вилучено залежність від довільного початкового стану та відповідної накопиченої деформації. Отримані рівняння зручні для побудови та аналізу рівнянь локального впливу початкових напружень на фізичні поля різної природи і є визначальними рівняннями для задач неруйнівного контролю неоднорідних тривимірних полів напружень, а також для теоретико-експериментального дослідження нелінійних рівнянь стану.

Принципи незалежності та «раціональна механіка континууму». Рівняння стану (визначальні, конститутивні рівняння) деформівного тіла (а взагалі – довільні функції стану) задовольняють низку умов, найзагальніші з яких можна назвати принципами незалежності.

Перший – принцип координатної незалежності:

оскільки фізичні закони однакові в просторі та часі, то рівняння стану не залежать від просторових координат і часу.

Другий – принцип обертової незалежності:

оскільки стан матеріалу не залежить від його повороту, то й рівняння стану не залежать від міри повороту матеріалу.

Вважають, що цей принцип виконується, якщо рівняння стану залежать від симетричних тензорів деформації, які не враховують поворотів матеріальних елементів.

І нарешті, третій – принцип початкової незалежності: поточний стан напруженого матеріалу не залежать від його початкового ненапруженого стану:

однаковим напруженням можуть відповідати різна накопичена деформація і різні початкові стани.

Наприклад, однакових розтягувальних напружень можна досягнути як шляхом силового розтягу, так і охолодженням попередньо нагрітого і защемленого зразка. Математично переходимо від другого випадку до першого, коли вилучаємо зі співвідношень Дюгамеля – Неймана температурну деформацію і приходимо до закону Гука. Наглядне прикладне застосування третього принципу – руйнівний контроль залишкових напружень: яка б не була деформаційна історія виникнення напружень, їх можна визначити через накопичену пружну деформацію, якщо вивільнити останню, наприклад, розрізавши тіло.

Фізична суть принципів незалежності очевидна, а їх врахування в лінійній теорії здійснюється порівняно просто, можна сказати, само собою (якщо звісно правильно записувати рівняння стану). Тому в нелінійній теорії їх приймають буквально за замовчуванням, без будь-якого обґрунтування чи докладного розгляду (див., наприклад, [1, 2, 4, 5, 8, 11–13, 15]). Такий підхід характерний для континуальної механіки твердого тіла як прикладної фізичної науки, для якої строге математичне обґрунтування очевидних механічних положень вважають зайвою тратою часу. Щоб усунути цей недолік, за розвиток доволі складної теорії беруться люди без належного прикладного досвіду, які не розуміють і не сприймають без доведення прийнятих «за замовчуванням» ключових принципів механіки і натомість висувають свої хибні обґрунтування та узагальнення. Власне такими є вихідні положення, сформульовані в рамках аксіоматичної «раціональної механіки суцільного середовища» [10, 16], стосовно визначальних рівнянь деформівного матеріалу.

В основі цих положень лежить антитеза до першого принципу: *рівняння стану залежать від координат* (!). Таке хибне твердження висновується з того, що напруження пов'язані з деформацією, деформація – з переміщеннями, які записують через зміну координат. Проте тензор деформації якраз не залежить від координат (його поле може бути однорідним). Цей факт чисто математичний і загальновідомий. А на підставі уявної «залежності» від координат і часу та за допомогою аксіом, доречних в механіці точкових тіл, «доводять» принцип обертової незалежності та теорему про потенціал пружності. Наслідком хибності наведених «доведень» є їх надмірна обмеженість. Так, принцип обертової незалежності стосується лише співвідношення пружності ізотропного матеріалу, тоді як насправді його застосовують до будь-яких фізичних законів. Теорема про потенціал пружності стосується лише термопружності, тоді як поняття потенціалу пружності застосовують в усіх прикладних галузях механіки деформівного тіла (в лінійній теорії – безумовно), і таке застосування не суперечить експериментальним фактам. Щодо принципу початкової незалежності, то в «раціональній механіці» його зводять до абсурду. Незалежність поточного стану від початкового «вирішують» заміною *поняття стану* на *поняття конфігурації*. Поняття стану є об'єктивним, оскільки будь-який стан характеризується певними значеннями параметрів стану – теплових, електричних, магнітних тощо. Натомість поняття конфігурації є суб'єктивним, бо конфігурація не характеризується жодними фізичними параметрами. Якщо під поточною конфігурацією розуміють власне поточний стан, то з відліковою конфігурацією не пов'язують ніякого стану, а тому роблять цілком природний висновок, що відліковою конфігурацією може бути довільна конфігурація, навіть неіснуюча [10]. А це, в свою чергу, означає, що тензор деформації також є фіктивною, неіснуючою величиною. Таким чином, приймають, що рівняння стану деформівного матеріалу не залежать від початкового стану, зате залежать від фіктивної «деформації», внаслідок чого вони втрачають фізичний зміст.

У науковій літературі колишнього СРСР і теперішнього СНГ посилання на «раціональну механіку» трапляються набагато рідше, ніж у літературі з так званого «далекого зарубіжжя». Тут доречно зазначити, що один з редакторів перекладу «раціональної механіки» [10] навіть не згадує її у виданій пізніше монографії з нелінійної теорії пружності [4]. Згадки про «раціональну механіку» свідчать про те, що її сприймають як чисто теоретичну науку без жодного прикладного значення, тобто згідно з традицією, прийнятою в прикладних галузях науки в цілому, і в механіці деформівного тіла особливо. Проте очевидно, що останній з трьох перелічених принципів безпосередньо стосується задач про визначення початкових напружень і їх впливу на фізико-механічні властивості матеріалу, насамперед, електромагнітні. Поки що не існує загального підходу до побудови локальних визначальних рівнянь для таких задач, особливо, коли матеріал анізотропний і його природна симетрія спотворюється внаслідок дії анізотропних полів – електромагнітного та поля напружень. У свою чергу, другий принцип тісно пов'язаний з третім, бо незалежність рівнянь стану від накопиченого повороту також є незалежністю від початкового стану. Обидва ці принципи, по суті, є принципами відповідно обертової і деформаційної незалежності від довільного фіксованого початкового стану. Щоб правильно їх записати, насамперед потрібно, всупереч «раціональній механіці», показати, що перший принцип не має жодного стосунку до двох останніх.

Принцип координатної незалежності. У «раціональній механіці» [10, 16] визначальне (конститутивне) співвідношення для тензора напружень $\mathbf{T}$ подано у такому найзагальнішому вигляді:

$$\mathbf{T}(\mathbf{x},t) = \mathbf{T}(\boldsymbol{\chi}(\mathbf{X},t),t) = \Im(\boldsymbol{\chi}^t(\mathbf{X},t,s),\mathbf{X},t). \tag{1}$$

Тут $\mathbf{x}$, $\mathbf{X}$ – відповідно просторовий (ейлеровий) і матеріальний (лагранжевий) радіуси-вектори матеріального елемента (тіла-точки); t – час; $\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X},t)$ – функція руху, що задає просторові координати $\mathbf{x}$ матеріального елемента $\mathbf{X}$ у момент часу t; $\boldsymbol{\chi}^t(\mathbf{X},t,s) = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X},t-s)$ – «передісторія руху тіла», визначена для $s \geq 0$. На думку авторів раціональної механіки, співвідношення (1) відображає принцип детермінізму, а функція $\Im(\boldsymbol{\chi}^t(\mathbf{X},t,s),t)$, названа визначальним (конститутивним) відображенням, визначається властивостями матеріалу. Якщо ж не брати до уваги «фізико-механічні» тлумачення співвідношення (1), а розглянути його з чисто математичного погляду, то воно є всього лиш простою вправою на тему «складні функції». Спочатку розглянемо першу рівність

$$\mathbf{T}(\mathbf{x},t) = \mathbf{T}(\boldsymbol{\chi}(\mathbf{X},t),t) = \Im'(\mathbf{X},t), \tag{1$'$}$$

а потім другу

$$\Im'(\mathbf{X},t) = \Im(\boldsymbol{\chi}^t(\mathbf{X},t,s),\mathbf{X},t) = \Im(\boldsymbol{\chi}(\mathbf{X},t),\mathbf{X},t) = \Im(\mathbf{x},\mathbf{X},t). \tag{1$''$}$$

З другої рівності випливає $\boldsymbol{\chi}^t(\mathbf{X},t,s) = \boldsymbol{\chi}^t(\mathbf{X},t)$, тобто «змінна» s насправді є константою. Тоді «передісторія руху» $\boldsymbol{\chi}^t(\mathbf{X},t,s)$ тотожна функції руху $\boldsymbol{\chi}(\mathbf{X},t)$ або взагалі позбавлена кінематичного змісту. Так чи інакше, співвідношення (1) не може бути принципом детермінізму. Дійсно, зліва у цьому співвідношенні маємо поточний (актуальний) просторовий розподіл (поле) напружень, а справа – матеріальний. Центральний член показує, як отримати другий з першого за допомогою функції руху. Розподіл напружень не залежить від властивостей матеріалу: в різних матеріалах він може бути однаковим, а в однакових – різним. Тому ані співвідношення (1), ані беззмістовна функція координат $\Im(\boldsymbol{\chi}^t,\mathbf{X},t) = \Im(\mathbf{x},\mathbf{X},t)$ у співвідношенні (1″) не мають жодного стосунку до конститутивних рівнянь, які характеризують матеріал.

На простому прикладі покажемо, що визначальні співвідношення не можуть залежати від координат і часу. Покоління механіків встановили, що існує залежність між тензором напружень і тензором деформації $\boldsymbol{\varepsilon}$ – $\mathbf{T}^*(\boldsymbol{\varepsilon})$. Згідно із «раціональною механікою» ця залежність узагальнюється таким чином: $\mathbf{T}^*(\boldsymbol{\varepsilon},\mathbf{x},t)$. З іншого боку, відомо, що поточний розподіл кожної фізичної величини – це її залежність від координат і часу, зокрема $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{x},t)$, $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x},t)$ – поточні просторові розподіли тензорів напружень і деформації відповідно. Поєднаємо цей факт з узагальненою залежністю:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x},t) \;\wedge\; \mathbf{T}^*(\boldsymbol{\varepsilon},\mathbf{x},t) = \mathbf{T}(\mathbf{x},t) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{T} = \mathbf{T}^*(\boldsymbol{\varepsilon}),$$

$$\mathbf{T}(\mathbf{x},t) = \mathbf{T}^*(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x},t)). \tag{2}$$

Таким чином, приходимо до висновку, що узагальнення, запропоноване творцями раціональної механіки, неправильне. Поширюючи висновок цієї вправи на фізичні закони, що пов'язують між собою значення довільних об'єктивних величин, приходимо до перевіреного ключового положення фізики суцільного середовища:

оскільки суцільне середовище – це сукупність змінних полів фізичних величин, а кожне таке поле записують як залежність від координат і часу, то зв'язки між фізичними величинами не залежать від координат і часу.

Цей принцип підкреслює, що координати та час (усе разом – система відліку, за термінологією, прийнятою поза механікою суцільного середовища) – це всього лиш необхідні засоби математичного опису суцільного середовища, тобто поняття суб'єктивні. Тому об'єктивні фізичні закони не можуть залежати від них. З принципу координатної незалежності випливає наступний висновок:

оскільки закони суцільного середовища не залежать від координат і часу, то вони локальні в просторі та часі, тобто стосуються кожного матеріального елемента окремо в кожен окремий момент часу.

Наприклад, співвідношення $\mathbf{T} = \mathbf{T}^*(\boldsymbol{\varepsilon})$ пов'язує між собою поточні значення напружень і деформацій у певній точці суцільного середовища. З цього випливає ще один важливий висновок:

закони суцільного середовища можна досліджувати на стаціонарних процесах в однорідних зразках; не існує особливих визначальних рівнянь для неоднорідного та змінного матеріалу.

З усіх цих висновків випливає, що усі вихідні аксіоми «раціональної механіки» стосовно визначальних співвідношень матеріалу, як от: принципи детермінізму, локальної дії, матеріальної незалежності від систем відліку, поділ матеріалів на «прості» і «непрості» – є або непотрібними, або неправильними (до цього слід додати, що математичне формулювання цих положень часто не відповідає їх словесному формулюванню). Зокрема, неправильно вважати визначальне рівняння пружного матеріалу залежним від координат, а поділ деформівних матеріалів на пружні та непружні недоречний, бо кожному твердому матеріалу властива пружна поведінка. Причиною цих хиб є ототожнення руху та деформації (цю помилку відображає власне формула (1)) і відповідно поширення методики механіки руху (твердого тіла чи точкових тіл) на механіку деформування. Для опису законів руху точкових тіл поняття системи відліку має першочергове значення, а для законів деформування суцільного середовища – другорядне.

Принцип обертової незалежності. У загальному випадку зміна розмірів безмежно малих об'ємів описується несиметричним невиродженим тензором, який в раціональній механіці називають ґрадієнтом деформації (транспонований до нього в монографії [4] названо ґрадієнтом місця):

$$d\mathbf{x} = d\mathbf{X} \cdot \mathbf{F}^{\mathsf{T}} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}. \tag{3}$$

Тут $d\mathbf{X}, d\mathbf{x}$ – відповідно початкове та поточне значення віддалі між двома безмежно близькими матеріальними точками, $\mathbf{F} = \dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}$ – ґрадієнт деформації (насправді – «матеріальний ґрадієнт просторового радіуса-вектора»). Згідно з теоремою про полярний розклад його можна подати у вигляді добутку ортогонального тензора $\mathbf{R}$, що описує поворот матеріальних об'ємів і симетричного тензора $\mathbf{U}$ або $\mathbf{V}$, що характеризує їх деформацію:

$$\mathbf{F} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{R}^{\mathsf{T}} \cdot \mathbf{V}. \tag{4}$$

На підставі «аксіоми про незалежність визначального співвідношення для напружень від системи відліку» в раціональній механіці «доводять» теорему про вилучення міри повороту зі співвідношення пружності, записуючи це таким чином:

$$\mathbf{T} = \Im(\mathbf{F}, \mathbf{X}) = \mathbf{R} \cdot \Im(\mathbf{U}, \mathbf{X}) \cdot \mathbf{R}^{\mathsf{T}}. \tag{5}$$

Одразу ж зазначимо, що такий запис, взагалі кажучи, неправильний, оскільки суперечить відомому правилу з теорії функцій тензорної змінної – однаковий сукупний поворот всіх тензорних параметрів тензорної функції приводить до такого ж повороту її значення. Натомість у співвідношенні (5) вектор $\mathbf{X}$ не повертається. Якщо ж вважати, що тензор $\mathbf{F}$ є єдиним тензорним параметром функції $\mathbf{T}(\mathbf{F})$, то ця функція стосується лише ізотропних матеріалів. У той же час у нелінійній механіці симетричні міри деформації чи їх квадрати приймають за базисні параметри не лише для співвідношення ізотропної пружності, але й для систем рівнянь стану, які, крім мір деформації, містять також і інші векторні та тензорні параметри – наприклад, вектори напруженості електричного чи магнітного полів, їх ґрадієнти, тензорні модулі анізотропії матеріалу [1–4, 5, 8, 11–15]. Таким чином, «обґрунтування» обертової незалежності в рамках раціональної механіки не лише неправильне, а й надто вузьке.

Для того щоб обґрунтувати незалежність довільних функцій стану від повороту матеріалу, не треба приймати жодних гіпотез. Достатньо не забувати вихідне положення класичної теорії тензорного поля (у якій відсутні зайві математичні узагальнення, позбавлені фізичного змісту):

тензори – це об'єктивні, фізичні величини, незалежні від суб'єктивних базисів і компонент, через які вони (тензори) виражаються.

У механіці розглядають повороти векторів і тензорів другого рангу [4]. Але в загальному поворот стосується тензорів довільного рангу [6]. Наприклад, з поворотом анізотропного матеріалу повертаються також характеристики його анізотропії, як от тензорні модулі пружності, п'єзоефекту і т. п., які є тензорами рангів, вище другого. Як і у випадку тензора другого рангу, поворот тензора вищого рангу зводиться до повороту векторів у його поліадному поданні [6]. Виходячи з поняття обертання тензора довільного рангу, поширимо поділ на об'єктивні та суб'єктивні величини на тензори вищого рангу. Оскільки обертання є відносним (найбільш показовий приклад цього – геоцентрична космогонія), природно припустити, що

серед об'єктивних тензорних величин нема тензорів із фіксованими осями.

Це, в свою чергу, означає, що

серед об'єктивних тензорів нема анізотропних констант.

Фіксовані напрямки, осі – суб'єктивні (наприклад, напрямки довільно вибраних базисів). Відповідно всі об'єктивні напрямки – змінні, тобто обертові (наприклад, осі анізотропії матеріалу, напрямки полів електричної і магнітної напруженостей). З висновку про відсутність анізотропних констант серед об'єктивних величин випливає, що

співвідношення між об'єктивними величинами – ізотропні [6],

тобто зводяться до вигляду, незалежного від спільного повороту всіх змінних величин. А це якраз і означає згадану вище незалежність законів природи від спільного обертання усіх параметрів стану та анізотропії матеріалу.

З поділу напрямків на суб'єктивні, фіксовані, та змінні, об'єктивні, випливає такий самий поділ змінних ортогональних тензорів, що входять до функції стану. Якщо ортогональний тензор характеризує поворот змінного напрямку стосовно фіксованого, то такий тензор є суб'єктивним. Якщо ж ортогональний тензор пов'язує між собою два змінні об'єктивні напрямки, то він також об'єктивний. Суб'єктивні ортогональні тензори можна назвати мірами поворотів, а об'єктивні – кутовими мірами.

Якщо функція стану об'єктивна, тобто залежить лише від об'єктивних величин, то вона не залежить від мір повороту. Оскільки початкові напрямки $d\mathbf{X}$ – фіксовані, то міра повороту $\mathbf{R}$ – суб'єктивна. Отже,

об'єктивні функції стану не залежать від міри повороту матеріалу,

що й треба було довести. З пари мір деформації $\mathbf{U}$ та $\mathbf{V}$ – перша суб'єктивна, оскільки пов'язана з суб'єктивними, фіксованими напрямками $d\mathbf{X}$. Відповідно друга міра – об'єктивна. Подібно поділяються на суб'єктивні та об'єктивні також і квадратичні міри деформації: міра Коші $\mathbf{C} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{U}$ –

суб'єктивна, а міри Фінгера $\mathbf{B} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{V}$ та Альманзі $\mathbf{A} = \mathbf{B}^{-1}$ – об'єктивні. Сам же ґрадієнт деформації суб'єктивний, оскільки дорівнює добутку об'єктивної міри деформації і суб'єктивної міри повороту (4). Згідно з формулами полярного розкладу (4) перетворення лінійних елементів (3) розбивається на послідовні поворот

$$d\widehat{\mathbf{X}} = \mathbf{R} \cdot d\mathbf{X}\,, \tag{6}$$

та деформацію

$$d\mathbf{x} = \mathbf{V} \cdot d\widehat{\mathbf{X}}\,. \tag{7}$$

Оскільки міра деформації $\mathbf{V}$ і поточні значення $d\mathbf{x}$ лінійних елементів є об'єктивними, то об'єктивними є і їх обертові початкові значення $d\widehat{\mathbf{X}}$. Таким чином, об'єктивний початковий стан обертається разом з матеріалом. Нехай $\mathbb{Z} = \{\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \ldots, \mathbf{Z}_n\}$ – множина поточних значень базисних параметрів стану, а $\mathbb{Z}_0 = \{\mathbf{Z}_{10}, \mathbf{Z}_{20}, \ldots, \mathbf{Z}_{n0}\}$ – множина фіксованих початкових значень базисних параметрів стану. Тоді об'єктивним є обертовий початковий базисний стан, що визначається як сукупний поворот фіксованих початкових значень

$$\widehat{\mathbb{Z}}_0 \equiv \{\widehat{\mathbf{Z}}_{10}, \widehat{\mathbf{Z}}_{20}, \ldots, \widehat{\mathbf{Z}}_{n0}\} \equiv \{\mathbf{R} * \mathbf{Z}_{10}, \mathbf{R} * \mathbf{Z}_{20}, \ldots, \mathbf{R} * \mathbf{Z}_{n0}\} \equiv \mathbf{R} * \mathbb{Z}_0\,. \tag{8}$$

Тут зірочка між ортогональним тензором і тензором довільного рангу означає відповідний поворот тензора довільного рангу. Якщо ж зірочка передує множині тензорів, то вона означає відповідний сукупний поворот всіх тензорів з цієї множини.

Отже, встановлено, що об'єктивне подання для довільної функції стану деформівного анізотропного матеріалу має такий вигляд:

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Phi}^{\mathrm{s}}(\mathbf{B}, \mathbb{Z}, \widehat{\mathbb{Z}}_0, \widehat{\mathbb{A}})\,. \tag{9}$$

Тут

$$\widehat{\mathbb{A}} \equiv \{\widehat{\mathbf{A}}_1, \widehat{\mathbf{A}}_2, \ldots, \widehat{\mathbf{A}}_m\} \equiv \{\mathbf{R} * \mathbf{A}_1, \mathbf{R} * \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{R} * \mathbf{A}_m\} \equiv \mathbf{R} * \mathbb{A} \tag{10}$$

– множина обертових параметрів анізотропії, де $\mathbb{A}$ – множина фіксованих параметрів анізотропії, що відповідає фіксованому початковому стану (якщо така множина порожня, то матеріал ізотропний).

Зрозуміло, що міру $\mathbf{B}$ можна замінити будь-якою іншою об'єктивною мірою чи тензором деформації. Разом з тим будь-яку об'єктивну міру деформації можна замінити на суб'єктивну. Підставляючи у функцію (9) вирази (8), (10) і відповідне співвідношення між мірами деформації $\mathbf{B} = \mathbf{R} * \mathbf{C}$, а також враховуючи ізотропію функції (9), отримаємо вираз для функції стану через суб'єктивні змінні:

$$\mathbf{\Phi}^{\mathrm{s}}(\mathbf{B}, \mathbb{Z}, \widehat{\mathbb{Z}}_0, \widehat{\mathbb{A}}) = \mathbf{\Phi}^{\mathrm{s}}(\mathbf{R} * \mathbf{C}, \mathbb{Z}, \mathbf{R} * \mathbb{Z}_0, \mathbf{R} * \mathbb{A}) =$$

$$= \mathbf{R} * \mathbf{\Phi}^{\mathrm{s}}(\mathbf{C}, \mathbf{R}^{-1} * \mathbb{Z}, \underline{\mathbb{Z}_0, \mathbb{A}})\,. \tag{11}$$

Як бачимо, при переході до суб'єктивних змінних, з одного боку, виникає явна залежність від міри повороту матеріалу, а, з іншого боку, зникає залежність від початкових значень і параметрів анізотропії, оскільки їх суб'єктивні значення (підкреслені) є фіксованими. Ця особливість лежить в основі апарату диференціювання об'єктивних функцій стану, який дає змогу обходити диференціювання за обертовими параметрами початкового стану (8) та анізотропії (10) [7]. Завдяки цьому для подання функцій стану анізотропного матеріалу можна використовувати як суб'єктивні міри деформації ($\mathbf{C}$ або $\mathbf{U}$), так і об'єктивні ($\mathbf{B}$ або $\mathbf{V}$), хоча в літературі з механіки нелінійної механіки деформівного матеріалу часто застерігають, що останні не є придатними для цього (з чисто математичного погляду одразу видно, що таке застереження хибне, бо співвідношення між усіма мірами взаємно однозначні). Натомість у раціональній механіці «доводять», що застосування мір $\mathbf{C}$ та $\mathbf{U}$ доцільніше, ніж $\mathbf{B}$ і $\mathbf{V}$, оскільки дає змогу не враховувати «передісторію» поворотів. Проте формули (11) показують прямо протилежне: функції стану не залежать явно від міри повороту $\mathbf{R}$, якщо вони залежать саме від об'єктивних мір деформації, і залежать явно від повороту, коли застосувати суб'єктивні міри деформації. Але так чи інакше, поворот враховується, як і повинно бути.

Принцип початкової незалежності. Деформація тіла за означенням залежить від початкового стану, оскільки це є зміна форми тіла, його окремих матеріальних елементів, при переході від початкового стану до поточного (кінцевого). Тому залежність напружень від деформації означає їх залежність (принаймні неявну) від початкового стану. Проте зв'язок між деформацією і напруженнями не є взаємно однозначним. Навіть у випадку чисто силового впливу на тіло однаковим напруженням може відповідати різна накопичена деформація (згадаймо знамениті діаграми розтягу «деформація – напруження»). Якщо ж, окрім силового впливу, маємо й інший, зокрема тепловий, електромагнітний, хімічний, то однакових напружень можна досягати навіть внаслідок протилежної деформації (як у наведеному на початку прикладі). Таким чином, з одного боку, напруження залежать від накопиченої деформації, а з іншого – не залежать. У раціональній механіці поєднання цих протилежних тез зводиться до абсурду шляхом підміни поняття початкового (відлікового) стану на позбавлене фізичного змісту поняття початкової конфігурації.

Згадані діаграми розтягу показують, що незалежно від накопиченої деформації при розвантаженні однакових напружень в однакових умовах вивільнюється однакова пружна деформація. Цей факт лежить в основі неруйнівного контролю напружень. Таким чином, напруження однозначно пов'язані не з усією накопиченою деформацією, а лише з її пружною частиною. Відповідно «різниця» між повною і пружною деформаціями якраз і є тією деформацією, від якої напруження не залежать. Тому її можна назвати вільною (від напружень). Згідно з цим означенням, прирівнявши визначальне рівняння (11) для напружень до нуля, отримаємо визначальне рівняння для вільної деформації:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^*(\mathbf{B}, \mathbb{Z}, \widehat{\mathbb{Z}}_0, \widehat{\mathbb{A}}) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{B} = \tilde{\mathbf{B}}(\mathbb{Z}, \widehat{\mathbb{Z}}_0, \widehat{\mathbb{A}}) .$$

У різних галузях механіки вільну за суттю деформацію незалежно від її походження називають по-різному, зокрема власною чи внутрішньою деформацією або й дисторсією. Як приклад наведемо відомі назви вільної деформації різного походження: пластична – силового, температурна – теплового, обернений електричний п'єзоефект – електричного, магнітострикція – магнітного, вільною є деформація, що відбувається під час зміни кристалічної фази [3, 9]. Між вільною і пружною деформацією є чітка механічна та фізична відмінність. Під час повної деформації тіла виникають напруження і змінюються інші значення параметрів стану – від початкових до поточних. Пружна деформація – це частина повної деформації, яка пов'язана з виникненням напружень, а вільна деформація – це інша частина, яка пов'язана зі зміною значень базисних параметрів стану.

Оскільки поточний стан тіла не залежить від початкового, то він не залежить також і від накопиченої вільної деформації.

У цьому полягає фізична суть принципу початкової незалежності. Таким чином, поруч із залежною від міри повної деформації функцією стану певної тензорної величини маємо також іншу, залежну від міри пружної деформації і поточного стану:

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Phi}^*(\mathbf{B}, \mathbb{Z}, \widehat{\mathbb{Z}}_0, \widehat{\mathbb{A}}) = \hat{\mathbf{\Phi}}(\hat{\mathbf{B}}, \mathbb{Z}, \widehat{\mathbb{A}}) . \tag{12}$$

Тут $\hat{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{V}} \cdot \hat{\mathbf{V}}$ − квадратична міра пружної деформації. Подання $\mathbf{\Phi}^*$ залежить від міри повної деформації, пов'язаної з полем переміщень. Тому його природно назвати кінематичним. Математично воно залежить від початкового стану, а тому включає суб'єктивну, фізично неіснуючу, залежність від вільної деформації. Натомість подання $\hat{\mathbf{\Phi}}$ відповідає дійсній, фізичній, залежності величини $\mathbf{\Phi}$ лише від пружної накопиченої деформації. Тому його доцільно назвати фізичним. Зв'язок між обома поданнями визначається через співвідношення між мірами повної і пружної деформації. У загальному випадку маємо таке вихідне співвідношення між ґрадієнтом деформації і мірою пружної деформації, яке випливає з діаграми «довільне навантаження − пружне розвантаження»:

$$\tilde{\mathbf{F}} = \hat{\mathbf{V}}^{-1} \cdot \mathbf{F} \,. \tag{13}$$

Тоді $\tilde{\mathbf{F}}$ − «ґрадієнт деформації» (взагалі кажучи, поле цього тензора не є ґрадієнтом векторного поля, на відміну від поля тензора $\mathbf{F}$), що характеризує зміну лінійних елементів $d\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{F}} \cdot d\mathbf{X}$, не пов'язану з напруженнями. Використовуючи полярний розклад тензора $\tilde{\mathbf{F}} = \tilde{\mathbf{V}} \cdot \tilde{\mathbf{R}}$, де $\tilde{\mathbf{V}}$ − міра вільної деформації, а $\tilde{\mathbf{R}}$ − міра її повороту, отримаємо такі співвідношення між мірами повної, пружної і вільної деформацій:

$$\hat{\mathbf{V}} = \tilde{\mathbf{V}}^{-1} \cdot \mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{V} = \hat{\mathbf{V}}(\tilde{\mathbf{V}}, \mathbf{V}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{V} = \mathbf{V}(\tilde{\mathbf{V}}, \hat{\mathbf{V}}) \,. \tag{14}$$

Тут $\mathbf{\Gamma} = \tilde{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^{-1}$ − ортогональний тензор, що характеризує кутову нев'язку між двома симетричними додатно визначеними тензорами та однозначно визначається через них. Тому кожна з трьох мір деформації − повної, пружної і вільної однозначно визначається через дві інші. Застосовуючи квадратичні міри деформації, кутову нев'язку можна вилучити з розгляду:

$$\mathbf{B} = \hat{\mathbf{V}} \cdot \tilde{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{V}}, \qquad \mathbf{C} = \tilde{\mathbf{U}} \cdot \hat{\mathbf{C}} \cdot \tilde{\mathbf{U}} \,, \tag{15}$$

де $\tilde{\mathbf{U}} = \tilde{\mathbf{R}}^{-1} * \tilde{\mathbf{V}}$, $\hat{\mathbf{C}} = \tilde{\mathbf{R}}^{-1} * \hat{\mathbf{B}}$. Щоб не обтяжувати формулювання принципу початкової незалежності несуттєвими подробицями, скористаємося наближеними і разом з тим достатньо точними співвідношеннями між мірами деформації, у яких знехтувано кутовою нев'язкою. Оскільки міри деформації близькі до одиничного тензора, то й міра кутової нев'язки також близька до нього. Оцінимо порядок малої величини $\boldsymbol{\gamma} \equiv \mathbf{\Gamma} - \mathbf{I} \ll \mathbf{I}$, що характеризує відхилення кутової нев'язки від одиничного тензора. Згідно з означенням ортогонального тензора

$$\mathbf{I} = \mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{\Gamma}^{\mathsf{T}} = \mathbf{I} + 2\boldsymbol{\gamma}_{\mathrm{s}} + \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma}^{\mathsf{T}} = \mathbf{I} + 2\boldsymbol{\gamma}_{\mathrm{s}} + (\boldsymbol{\gamma}_{\mathrm{s}} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{\mathrm{s}} + \boldsymbol{\gamma}_{\mathrm{as}} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{\mathrm{as}}),$$

де $\boldsymbol{\gamma}_{\mathrm{s}} \equiv \mathrm{sym}\,\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\gamma}_{\mathrm{as}} \equiv \mathrm{asym}\,\boldsymbol{\gamma}$ − симетрична та антисиметрична частини тензора $\boldsymbol{\gamma}$. Звідси випливає, що з точністю до членів третього порядку відносно $\boldsymbol{\gamma}_{\mathrm{as}}$

$$\boldsymbol{\gamma}_{\mathrm{s}} \approx -\boldsymbol{\gamma}_{\mathrm{as}} \cdot \frac{\boldsymbol{\gamma}_{\mathrm{as}}}{2} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\gamma} \approx \boldsymbol{\gamma}_{\mathrm{as}} \cdot \left(\mathbf{I} - \frac{\boldsymbol{\gamma}_{\mathrm{as}}}{2}\right).$$

Виразимо тепер антисиметричну частину через тензори накопиченої деформації:

$$\mathbf{E} \equiv \mathbf{V} - \mathbf{I}, \qquad \hat{\mathbf{E}} \equiv \hat{\mathbf{V}} - \mathbf{I}, \qquad \tilde{\mathbf{E}} \equiv \tilde{\mathbf{V}} - \mathbf{I} \,. \tag{16}$$

З виразу (14) маємо таке співвідношення між введеними тензорами малої деформації: $\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{V} = \tilde{\mathbf{E}} + \hat{\mathbf{E}} - \mathbf{E} + \tilde{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{E}}$. Оцінивши його антисиметричну частину

$$\mathrm{asym}(\tilde{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{E}}) = \frac{(\tilde{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{E}} - \hat{\mathbf{E}} \cdot \tilde{\mathbf{E}})}{2} = \frac{(\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{V} - \mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\gamma})}{2} \approx \boldsymbol{\gamma}_{\mathrm{as}} \equiv \mathrm{asym}\,\boldsymbol{\gamma} \,,$$

отримаємо білінійне відносно тензорів деформації наближення для міри кутової нев'язки:

$$\boldsymbol{\gamma}_{\mathrm{as}} \approx \operatorname{asym}(\tilde{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{E}}) = \operatorname{asym}(\tilde{\mathbf{V}} \cdot \hat{\mathbf{V}}). \tag{17}$$

Звідси та з виразу (14) отримаємо білінійне наближення для міри повної деформації:

$$\mathbf{V} = \boldsymbol{\Gamma}^{\mathsf{T}} \cdot \tilde{\mathbf{V}} \cdot \hat{\mathbf{V}} \approx \mathbf{I} + \tilde{\mathbf{E}} + \hat{\mathbf{E}} + \tilde{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{E}} - \operatorname{asym}(\tilde{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{E}}) = \operatorname{sym}(\tilde{\mathbf{V}} \cdot \hat{\mathbf{V}}). \tag{18}$$

І нарешті, підставляючи тензори малої деформації (16) у вираз (15) для міри $\mathbf{B}$, отримаємо білінійне наближення для співвідношення між квадратичними мірами повної і пружної деформації:

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\Gamma}^{\mathsf{T}} \cdot \tilde{\mathbf{V}} \cdot \hat{\mathbf{B}} \cdot \tilde{\mathbf{V}} \cdot \boldsymbol{\Gamma} \approx \tilde{\mathbf{V}} \cdot \hat{\mathbf{B}} \cdot \tilde{\mathbf{V}}. \tag{19}$$

В загальному, зважаючи на наближення (17), для довільного тензора виконується співвідношення, схоже на (18):

$$\forall \mathbf{A} \approx \mathbf{I}\sqrt[3]{\det \mathbf{A}} \qquad \boldsymbol{\Gamma} * \mathbf{A} \approx \mathbf{A}. \tag{20}$$

Тобто в рамках білінійного наближення поворотом на величину кутової нев'язки можна знехтувати. З наближеної рівності (18) випливають прості співвідношення між кінематичною (11) та фізичною (12) функціями стану:

$$\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Phi}^{*}(\mathbf{B}, \mathbb{Z}, \widehat{\mathbb{Z}}_0, \widehat{\mathbb{A}})\Big|_{\mathbf{B} \approx \tilde{\mathbf{V}} \cdot \hat{\mathbf{B}} \cdot \tilde{\mathbf{V}}} \approx \hat{\boldsymbol{\Phi}}(\hat{\mathbf{B}}, \mathbb{Z}, \widehat{\mathbb{A}}),$$

$$\boldsymbol{\Phi} = \hat{\boldsymbol{\Phi}}(\hat{\mathbf{B}}, \mathbb{Z}, \widehat{\mathbb{A}})\Big|_{\hat{\mathbf{B}} \approx \tilde{\mathbf{V}}^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot \tilde{\mathbf{V}}^{-1}} \approx \boldsymbol{\Phi}^{*}(\mathbf{B}, \mathbb{Z}, \widehat{\mathbb{Z}}_0, \widehat{\mathbb{A}}), \tag{21}$$

де $\tilde{\mathbf{V}} = \tilde{\mathbf{V}}(\mathbb{Z}, \widehat{\mathbb{Z}}_0, \widehat{\mathbb{A}})$ – вільна деформація, що відповідає зміні обертового початкового стану на поточний.

Якщо накопичена пружна деформація відсутня (а разом з нею і напруження), то тіло перебуває у вільному стані. З формули (21) випливає, що за поточного вільного стану значення величини $\boldsymbol{\Phi}$ не залежить від накопиченої повної деформації, яка в цьому випадку тотожна вільній деформації:

$$\hat{\mathbf{B}} \equiv \mathbf{I} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{B} \equiv \tilde{\mathbf{B}}(\mathbb{Z}, \widehat{\mathbb{Z}}_0, \widehat{\mathbb{A}}) \quad \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\Phi} = \tilde{\boldsymbol{\Phi}}(\mathbb{Z}, \widehat{\mathbb{A}}) \equiv \hat{\boldsymbol{\Phi}}(\mathbf{I}, \mathbb{Z}, \widehat{\mathbb{A}}) = \boldsymbol{\Phi}^{*}(\tilde{\mathbf{B}}(\mathbb{Z}, \widehat{\mathbb{Z}}_0, \widehat{\mathbb{A}}), \mathbb{Z}, \widehat{\mathbb{Z}}_0, \widehat{\mathbb{A}}). \tag{22}$$

Ці формули становлять важливий частковий наслідок принципу початкової незалежності, за яким поточний вільний стан є об'єктивним початковим станом для поточного напруженого. Значення довільної функції стану в напруженому тілі, взагалі кажучи, відмінне від її значення у вільному тілі. Різницю між цими значеннями

$$\hat{\Delta}\boldsymbol{\Phi} \equiv \boldsymbol{\Phi} - \tilde{\boldsymbol{\Phi}} = \hat{\boldsymbol{\Phi}}(\hat{\mathbf{B}}, \mathbb{Z}, \widehat{\mathbb{A}}) - \tilde{\boldsymbol{\Phi}}(\mathbb{Z}, \widehat{\mathbb{A}}) = \hat{\Delta}\boldsymbol{\Phi}(\hat{\mathbf{B}}, \mathbb{Z}, \widehat{\mathbb{A}}) \tag{23}$$

природно назвати п'єзовідхиленням.

Теорема про потенціал пружності та система рівнянь стану для матеріалу з початковими напруженнями. Тепер маємо все необхідне, щоб довести славнозвісну теорему про існування потенціалу пружності, значення якого дорівнює накопиченій роботі пружної деформації, а перша похідна – тензору напружень. Зазначимо, що твердження теореми не суперечить експериментальним фактам: функція накопиченої роботи пружної деформації (яка власне вивільняється при пружному розвантаженні тіла) існує за будь-яких умов і є потенціалом для співвідношення пружності [7]. Тому в рамках лінійної теорії питання про доведення існування потенціалу пружності навіть не розглядається. Натомість в нелінійній теорії часто допускають, що існування потенціалу пружності не є безумовним, а тому поділяють матеріали на гіперпружні, для яких потенціал пружності існує, і негіперпружні (просто пружні), для яких потенціал не існує [4]. У контексті питання про потенціал пружності також інколи згадують так звану «класичну теорему про потенціал», яка нібито доводить існування потенціалу пружності для термопружного матеріалу в адіабатичних (ізоентропійних) та ізотермічних процесах. Суть «доведення» в дусі «раціональної механіки» полягає в тому, що в потенціалі стану термопружного матеріалу, наприклад, у внутрішній енергії $W = W(\mathbf{F}, \mathrm{T})$ температуру замінюють її полем $\mathrm{T} = \mathrm{T}(\mathbf{X})$, отримуючи таким чином нібито потенціал пружності «неоднорідного матеріалу ізотермічного процесу» $W(\mathbf{F}, \mathbf{X}) = W(\mathbf{F}, \mathrm{T}(\mathbf{X}))$, що залежить лише від міри деформації як єдиного змінного параметра базисного стану. Такий «потенціал пружності» не лише математично недопустимий, але й фізично беззмістовний, оскільки не має ніякого стосунку до накопиченої роботи пружної деформації (на чому власне й наголошує автор «раціональної механіки» [10]).

Найкращий спосіб упевнитися в тому, що «класична теорема про потенціал» не має жодного стосунку до механіки, – звернутися до лінійної теорії, в рамках якої існування потенціалу пружності вважається безумовним. Прості викладки показують, що потенціал пружності, значення якого дорівнює накопиченій роботі пружної деформації, випливає з потенціалу стану, якщо в останньому повну деформацію розділити на пружну й вільну. Отриманий таким чином потенціал пружності є функцією, залежною від тензора пружної деформації і визначеною на тій самій множині значень параметрів стану, що й потенціал стану. Очевидно, що безумовний взаємно однозначний зв'язок між потенціалом стану та потенціалом пружності зберігається, якщо перейти від лінійної теорії до нелінійної. Так само зберігається спосіб переходу від потенціалу стану до потенціалу пружності. Нехай $W = \hat{W}(\hat{\mathbf{B}}, \mathbb{Z}, \widehat{\mathbb{A}}) = W^*(\mathbf{B}, \mathbb{Z}, \widehat{\mathbb{Z}}_0, \widehat{\mathbb{A}})$ – потенціал стану. Його п'єзовідхилення

$$\hat{\Delta} W \equiv W - \tilde{W} = \hat{W}(\hat{\mathbf{B}}, \mathbb{Z}, \widehat{\mathbb{A}}) - \tilde{W}(\mathbb{Z}, \widehat{\mathbb{A}}) = \\ = \hat{\Delta} W(\hat{\mathbf{B}}, \mathbb{Z}, \widehat{\mathbb{A}}) = \Delta W^*(\mathbf{B}, \mathbb{Z}, \widehat{\mathbb{Z}}_0, \widehat{\mathbb{A}}) \quad (24)$$

якраз і є потенціалом пружності. Дійсно, п'єзовідхилення характеризує частину певної енергії, накопичену разом з пружною деформацією. При пружній релаксації напружень ця частина вивільнюється у вигляді роботи пружної деформації. Інша частина енергії, $\tilde{W}(\mathbb{Z}, \widehat{\mathbb{A}}) = \hat{W}(\mathbf{I}, \mathbb{Z}, \widehat{\mathbb{A}})$, є енергією вільного ненапруженого стану. Вона не залежить від величини накопиченої деформації. Тому потенціалом для співвідношення пружності є саме п'єзовідхилення потенціалу стану. Таким чином, з існування потенціалу стану випливає безумовне існування потенціалу пружності, як і повинно бути. Подібно до потенціалу стану, потенціал пружності можна записувати у вигляді залежності як від пружної деформації, так і повної. Але власне під потенціалом пружності розуміють першу залежність, тоді як під потенціалом стану – другу. Тому вивести потенціал пружності з потенціалу стану без урахування поділу деформації на вільну і пружну неможливо. Зазначимо, що, на відміну від уявного «потенціалу пружності», виведеного з «класичної теореми», дійсний потенціал (24) залежить не лише від міри деформації, але й від поточних значень базисних параметрів стану. Ця залежність відповідає дійсній залежності модулів пружності від стану матеріалу.

Згідно з правилами диференціювання функцій з обертовими параметрами [6] з потенціалу стану випливають такі вирази для рівнянь стану:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^*(\mathbf{B}, \mathbb{Z}, \widehat{\mathbb{Z}}_0, \widehat{\mathbb{A}}) = 2\rho \mathbf{V} \cdot \left(\frac{\partial W^*}{\partial \mathbf{B}} \right) \cdot \mathbf{V},$$

$$\forall \mathbf{Z} \in \mathbb{Z} \qquad \mathbf{Y} = \mathbf{Y}^*(\mathbf{B}, \mathbb{Z}, \widehat{\mathbb{Z}}_0, \widehat{\mathbb{A}}) = \frac{\partial W^*}{\partial \mathbf{Z}}, \quad (25)$$

де $\mathbf{Y}$ – параметр стану, спряжений з $\mathbf{Z}$; ρ – густина матеріалу. Враховуючи формули (24) для потенціалу пружності та співвідношення (21) між функціями стану, залежними від різних мір деформації, отримаємо замість системи (25) такі вирази:

$$\forall \mathbf{Z} \in \mathbb{Z} \qquad \tilde{\mathbf{Y}} = \tilde{\mathbf{Y}}(\mathbb{Z}, \widehat{\mathbb{A}}) = \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \mathbf{Z}},$$

$$\mathbf{T} = \hat{\mathbf{T}}(\hat{\mathbf{B}}, \mathbb{Z}, \widehat{\mathbb{A}}) = 2\rho \hat{\mathbf{V}} \cdot \frac{\partial \hat{\Delta} W}{\partial \hat{\mathbf{B}}} \cdot \hat{\mathbf{V}},$$

$$\hat{\Delta}\mathbf{Y} = \hat{\Delta}\mathbf{Y}(\hat{\mathbf{B}}, \mathbb{Z}, \widehat{\mathbb{A}}) \approx \underline{\frac{\partial \hat{\Delta} W}{\partial \mathbf{Z}}} - \rho^{-1}(\hat{\mathbf{V}}^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{V}}) : \tilde{\mathbf{\Omega}}_{\mathbf{Z}}. \tag{26}$$

Тут $\tilde{\mathbf{\Omega}}_{\mathbf{Z}}(\mathbb{Z}, \widehat{\mathbb{A}}) = \tilde{\mathbf{V}}^{-1} \cdot (\partial \tilde{\mathbf{V}} / \partial \mathbf{Z})$ − тензор, який має зміст відносного модуля безмежно малої вільної деформації, зумовленої приростом поля $\mathbf{Z}$. У системі (25) перше рівняння − це рівняння вільного стану, яке випливає з потенціалу вільного стану, друге − це співвідношення пружності, яке випливає з потенціалу пружності, а третє − це рівняння п'єзовідхилення, яке випливає з потенціалу пружності та визначального рівняння для вільної деформації. Перший (підкреслений) доданок у третьому рівнянні характеризує п'єзовідхилення, зумовлене залежністю модуля пружності від поля $\mathbf{Z}$, а другий доданок − величину, зумовлену власне напруженнями. Із означення потенціалу пружності (24) і співвідношення пружності випливають умови відсутності пружної деформації, які задовольняє потенціал пружності:

$$\hat{\mathbf{V}} = \mathbf{I} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{T} = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{\Delta} W = 0, \quad \frac{\partial \hat{\Delta} W}{\partial \hat{\mathbf{B}}} = 0. \tag{27}$$

За відсутності накопиченої пружної деформації підкреслений доданок у рівнянні для п'єзовідхилення також дорівнює нулеві. З умов (27) випливає, що цей доданок має щонайменше другий порядок відносно тензора накопиченої пружної деформації, тоді як наступний доданок має перший порядок. Тому слід сподіватися, що підкресленим доданком можна знехтувати порівняно з другим. Наприклад, якщо покласти, що $\mathbf{Z}$ − це вектор напруженості електричного поля, а $\mathbf{Y}$ − відповідно вектор діелектричної індукції, то в лінійному наближенні рівняння для п'єзовідхилення переходить у відоме рівняння для прямого п'єзоелектричного ефекту. З іншого боку, в лінійному наближенні модуль вільної деформації $\tilde{\mathbf{\Omega}}_{\mathbf{Z}}$ характеризує лінійний обернений п'єзоелектричний ефект. На цьому прикладі бачимо, що поділ деформації на вільну та пружну узгоджується з експериментальними даними про п'єзоефекти.

Висновки. Отже, доведення, чи краще сказати − строге обґрунтування, ключових положень механіки деформівного тіла про рівняння (функції) стану не потребує додаткових аксіом. Принцип координатної незалежності настільки очевидний, що не потребував би доведення, якби не його порушення у раціональній механіці. По суті, цей принцип є математичним означенням суцільного середовища як сукупності змінних фізичних полів різної природи. Якщо приймаємо поняття суцільного середовища, то автоматично приймаємо цілковиту незалежність законів природи (зв'язків між фізичними величинами та їх значень) від просторових координат і часу, які в даному випадку відіграють роль суб'єктивних математичних засобів опису змінних полів. Власне тому принцип координатної незалежності лежить в основі поняття тензора (зокрема скаляра, вектора). Відповідно аналіз тензорного поля − це опис фізичних, об'єктивних, величин за допомогою суб'єктивних − координат і базисів. Приймаючи природне припущення про відсутність фіксованих напрямків серед об'єктивних напрямків (тотожне положенню про відносність обертання), отримуємо принцип обертової незалежності як наслідок ізотропії тензорних функцій, незалежних від фіксованих тензорних параметрів. Що ж до принципу початкової незалежності та пов'язаної з ним теореми про потенціал пружності, то їх доведення, по суті, є узагальненням відомих співвідношень з лінійної теорії, які відображають факт однозначного зв'язку між напруженнями довільного походження і накопиченою пружною деформацією, що лежить в основі руйнівного контролю напружень. Принципи обертової та початкової незалежності можна тлумачити відповідно як положення про обертову та деформаційну незалежність поточного, теперішнього, стану від початкового, минулого. З принципу деформаційної початкової незалежності випливає правильне загальне і, що найголовніше, конструктивне доведення теореми про потенціал пружності, наслідком якого є система (26), незалежна від накопиченої повної деформації та історії виникнення напружень відповідно. Тому її природно назвати системою рівнянь стану початково напруженого матеріалу. Ця система є вихідним пунктом для побудови рівнянь впливу початкових напружень на зв'язані поля різної фізичної природи. Крім того, система (26) зводить теоретико-експериментальну задачу побудови та дослідження системи рівнянь стану (25) з потенціалом стану як вихідної функції до чотирьох окремих і відповідно простіших задач. Перша з них – це побудова системи рівнянь стану вільного тіла, яка випливає з потенціалу вільного стану. Друга задача – це побудова і дослідження визначальних рівнянь для модулів вільної деформації $\tilde{\mathbf{\Omega}}_{\mathbf{Z}}(\mathbb{Z},\widehat{\mathbb{A}})$. Обидві задачі стосуються дослідження вільного від напружень тіла. Третя задача – це класична для механіки задача дослідження співвідношення пружності, вихідною функцією для якого є потенціал пружності. Четверта задача, яка також стосується дослідження пружної деформації, – це задача дослідження визначальних рівнянь для п'єзовідхилень. Її вихідними функціями є потенціал пружності та модулі вільної деформації. Поділ загальної задачі дослідження системи визначальних рівнянь на чотири окремі не є чисто математичним, а відповідає механізму зміни напружено-деформованого стану. Тому до кожної з цих задач можна застосовувати свої природні припущення. Зокрема, можна припустити, що в більшості випадків (за винятком процесів фазових перетворень) потенціал пружності практично не залежить від базисного стану: $\hat{\Delta}W(\hat{\mathbf{B}},\mathbb{Z},\widehat{\mathbb{A}}) \approx \hat{\Delta}W(\hat{\mathbf{B}},\widehat{\mathbb{A}})$, і для побудови потенціалів стану можна застосовувати відомі подання нелінійних потенціалів пружності.

1. *Грин А., Адкинс Дж.* Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. – Москва: Мир, 1965. – 455 с.
2. *Жермен П.* Курс механики сплошных сред. – Москва: Высш. шк., 1983. – 399 с.
3. *Желудев И. С.* Физика кристаллических диэлектриков. – Москва: Наука, 1968. – 463 с.
4. *Лурье И.* Нелинейная теория упругости. – Москва: Наука, 1980. – 512 с.
5. *Можен Ж.* Механика электромагнитных сплошных сред. – Москва: Мир, 1991. – 560 с.
6. *Прокопович І. Б.* Диференціювання тензорних функцій стану тіла з урахуванням обертання // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – **51,** № 1. – С. 99–104.
   Те саме: *Prokopovych I. B.* Differentiation of tensor functions of the state of a body with regard for rotation // J. Math. Sci. – 2009. – **160,** No. 1. – С. 400–406.
7. *Прокопович І. Б.* Про залежність функцій стану деформівного тіла від міри повороту // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – **52,** № 2. – С. 66–71.
8. *Теодосиу К.* Упругие модели дефектов в кристаллах. – Москва: Мир, 1985. – 352 с.
9. *Тикадзуми С.* Физика ферромагнетизма. Магнитные характеристики и практические приложения. – Москва: Мир, 1987. – 419 с.
10. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. – Москва: Мир, 1975. – 592 с.
11. *Черных К. Ф.* Нелинейная упругость (теория и приложения). – Санкт-Петербург: Соло, 2004. – 420 с.
12. *Gere J. M., Timoshenko S. P.* Mechanics of materials. – London: Chapman & Hall, 2000. – 808 p.

13. *Green, A. E., Green-Zerna W., Zerna W.* Theoretical elasticity. – Dover Publications, 1992. – 457 p.
14. *IUTAM Symposium* on anisotropy, inhomogeneity and nonlinearity in solid mechanics / Proc. IUTAM-ISIMM Symp. (Nottingham, U. K., 30 Aug. – 3 Sept., 1994). Ser: Solid Mechanics and its Applications. – Vol. 39 / Eds. D. F. Parker, A. H. England. – Berlin – Heidelberg: Springer, 1995. – 536 p.
15. *Mase G. T., Mase G. E.* Continuum mechanics for engineers. – Boca Raton: CRC Press, 1999. – 386 p.
16. *Truesdell C., Noll W.* The non-linear field theories of mechanics. – Berlin – Heidelberg: Springer, 2004. – 602 p.

ПРИНЦИПЫ НЕЗАВИСИМОСТИ В УРАВНЕНИЯХ СОСТОЯНИЯ ДЕФОРМИРУЕМОГО МАТЕРИАЛА

Рассмотрены принципы координатной, вращательной и начальной независимости уравнений состояния деформируемого материала и связанную с ними теорему о существовании потенциала упругости. Показано, что в так называемой «рациональной механике континуума» известное аксиоматическое обоснование и математическое представление принципов, а также доказательство теоремы ошибочны. Приведено правильное доказательство принципов и теоремы в наиболее общем случае (напряженное анизотропное тело под воздействием произвольного тензорного поля) и без применения каких-либо аксиом. На этом основании из системы уравнений состояния деформируемого материала исключена зависимость от произвольного начального состояния и соответствующей накопленной деформации. Полученные уравнения удобны для построения и анализа уравнений локального влияния начальных напряжений на физические поля различной природы и являются определяющими уравнениями для задач неразрушающего контроля, а также для теоретико-экспериментального исследования исходных нелинейных уравнений состояния.

INDEPENDENCE PRINCIPLES IN EQUATIONS OF STATE OF THE DEFORMABLE MATERIAL

The principles of the coordinate, rotational and initial independences of constitutive equations of deformable material and existence theorem of the elasticity potential are considered. It is proved that the axiomatic rationale and mathematical expression of the principles as well as the theorem proof are wrongly represented in so-called «rational continuum mechanics». The correct proving of the principles and the theorem are realized in the most general case (a stressed anisotropic body under arbitrary tensor field) without any axioms. This is used to eliminate the dependence on arbitrary initial state and corresponding accumulated strain in equations of state of deformable material. The obtained forms of equations are suitable to construct and analyze the expressions for several physical effects of initial stresses as well as to investigate theoretically and experimentally the nonlinear equations of state.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
17.03.09