

**ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ АКТИВНОГО ДЕМПФУВАННЯ
ВИМУШЕНИХ ТЕРМОМЕХАНІЧНИХ РЕЗОНАНСНИХ КОЛИВАНЬ
В'ЯЗКОПРУЖНИХ ОБОЛОНОК ОБЕРТАННЯ ЗА ДОПОМОГОЮ
П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНИХ ВКЛЮЧЕНЬ**

Розглядається задача про активне демпфування вимушених резонансних коливань в'язкопружних оболонок обертання за допомогою п'єзоелектричних сенсорів та актуаторів. Враховується взаємодія електромеханічних і теплових полів. Для моделювання коливань використовуються гіпотези Кірхгоффа – Лява та адекватні їм гіпотези про розподіл температури та електричних польових величин. Температура в оболонці підвищується в результаті дисипативного розігріву. Для активного демпфування коливань використовуються п'єзоелектричні сенсори та актуатори. Припускається, що електромеханічні характеристики матеріалів залежать від температури. Розв'язок складної нелінійної задачі одержано ітераційним методом і методом скінченних елементів. Досліджено вплив температури дисипативного розігріву на ефективність активного демпфування коливань в'язкопружної циліндричної панелі з жорстким зацмеленням країв.

1. Вступ. Тонкі в'язкопружні композитні оболонки обертання знаходять широке застосування у багатьох галузях сучасної техніки [1, 14, 22]. При дії на них гармонічних за часом механічних навантажень з частотою, близькою до резонансної, у непружних оболонках можуть виникнути інтенсивні коливання і суттєво підвищитися температура, зумовлена гістерезисними втратами, – так звана температура дисипативного розігріву. Це може призвести до втрати такими оболонками функціональної здатності внаслідок втомного чи теплового руйнування. У зв'язку з цим виникає необхідність демпфування вимушених резонансних коливань непружних оболонок. Для цієї мети найбільш розповсюдженими є пасивні методи демпфування, коли в структуру пластини вводяться включення з високими гістерезисними втратами. Огляд робіт з пасивного демпфування вимушених коливань тонкостінних елементів подано в [3, 7, 9–11, 20, 24]. Проте в останні роки для цього почали використовувати більш ефективні методи активного демпфування вимушених резонансних коливань тонкостінних елементів, коли в структуру пластини вводяться п'єзоелектричні включення, які виконують функції так званого актуатора та сенсора [13, 18, 23, 25]. Сенсор дає інформацію про рівень коливань, а до актуатора підводиться різниця потенціалів, пропорційна показникам сенсора – швидкості зміни різниці потенціалів сенсора або струму. У результаті в оболонці появляється додаткове затухання, яким можна керувати за рахунок коефіцієнтів оберненого зв'язку. На ефективність такого типу активного демпфування коливань оболонки може суттєво вплинути температура дисипативного розігріву [4, 6, 7, 19, 21, 22, 26–28]. Так, наприклад, при досягненні температурою точки Кюрі п'єзоелектричні включення втрачають своє функціональне призначення через втрату п'єзоэффекту при цій температурі. При цьому має місце специфічний тип теплового руйнування, коли оболонка не розділяється на частини, але керувати її коливаннями неможливо.

У цій роботі подано варіаційну постановку задачі про активне демпфування коливань в'язкопружних оболонок обертання за допомогою п'єзоелектричних сенсорів та актуаторів. Постановка базується на механічних гіпотезах Кірхгоффа – Лява, доповнених адекватними їм гіпотезами про розподіл по товщині температури та електричних польових величин. Для моделювання електромеханічної поведінки матеріалів використовується концепція комплексних характеристик [2, 4–7, 12, 21]. Для розв'язання не-

лінійної задачі застосовується ітераційна процедура, внаслідок чого задача зводиться до розв'язування лінійних задач електромеханіки та рівняння теплопровідності з відомим джерелом тепла.

Для циліндричної панелі з жорстким зацмленням країв проведено розрахунки амплітудно- та температурно-частотних характеристик, які свідчать, що за рахунок вибору коефіцієнтів оберненого зв'язку можна значно зменшити рівень коливань і температуру дисипативного розігріву.

2. Варіаційна постановка задачі про активне демпфування вимушених коливань анізотропних оболонок обертання. Для активного демпфування стаціонарних гармонічних коливань оболонок обертання з пасивних (без п'єзоэффекту) матеріалів (металів, полімерів, композитів тощо) за допомогою сенсорів та актуаторів у їх структуру вводяться п'єзоелектричні включення, які можуть бути розміщені як на її поверхні, так і в будь-якому місці по товщині. Вони можуть покривати всю поверхню пластини або наноситись у вигляді плям. До актуатора підводиться різниця потенціалів, пропорційна швидкості зміни різниці потенціалів сенсора або струму. Коефіцієнт пропорційності називають коефіцієнтом оберненого зв'язку. У результаті в оболонці появляється додаткове затухання, яким можна керувати за допомогою вибору коефіцієнта оберненого зв'язку. Внаслідок цього можна суттєво зменшити амплітуду коливань і температуру дисипативного розігріву.

Як загальний випадок області з включеннями розглянемо тонкі шаруваті в'язкопружні п'єзооболонки, складені з довільного числа пасивних або п'єзоактивних шарів сталюї товщини. Пасивні шари можуть бути металічними, полімерними або композитними. Вважаємо їх ортотропними. П'єзоактивні шари є трансверсально-ізотропними і поляризованими по товщині пластини. Якщо між шарами електроди відсутні, то на їх границі має місце ідеальний механічний і електричний контакт. Дисипативні властивості матеріалів пасивних і п'єзоактивних шарів враховуємо на основі моделей лінійної в'язкопружності, яка при гармонічному деформуванні приводить до комплексних характеристик [4–6, 21]. Деформації вважаємо малими.

Розглянемо тришарову тонку оболонку обертання товщини $H = h_1 + h_2 + h_3$, яка складається з трансверсально-ізотропних шарів з товщиною поляризацією. Оболонку віднесемо до криволінійної ортогональної системи координат (s, θ, z) . Як базисну оберемо серединну поверхню внутрішнього шару оболонки. Вважаємо, що оболонка досить тонка, так що для моделювання її механічної поведінки можна використати гіпотези Кірхгофа – Лява, відповідно до яких $\sigma_{zz} = 0$, $\sigma_{zs} = 0$, $\sigma_{z\theta} = 0$. Меридіан базисної поверхні описується рівнянням $r = r(x)$. На поверхнях $z = a_0, a_1, a_2, a_3$ розміщено суцільні або дискретні електроди, на яких задаються відповідні значення потенціалів. Тут a_k – значення товщинної координати кожного шару. Так, наприклад, перший внутрішній шар має координати a_0 та a_1 .

Вказані вище класичні гіпотези Кірхгофа – Лява доповнюються адекватними їм гіпотезами відносно електричних величин, коли вважається, що відмінними від нуля є тільки нормальні складові векторів напруженості електричного поля та електричної індукції ($E_z \neq 0, D_z \neq 0$).

Відповідно до цих гіпотез рівняння стану для k -го шару оболонки можна записати у вигляді [6, 7]

$$\begin{aligned}\sigma_{ss}^k &= B_{11}^k \varepsilon_{ss} + B_{12}^k \varepsilon_{\theta\theta} - \gamma_{11}^k E_z^k, \\ \sigma_{\theta\theta}^k &= B_{12}^k \varepsilon_{ss} + B_{22}^k \varepsilon_{\theta\theta} - \gamma_{11}^k E_z^k, \\ \sigma_{s\theta}^k &= 2G_{12}^k \varepsilon_{s\theta}, \\ D_z^k &= \gamma_{33}^k E_z^k + \gamma_{11}^k (\varepsilon_{ss} + \varepsilon_{\theta\theta}),\end{aligned}\tag{1}$$

де

$$\begin{aligned}
B_{11}^k &= \frac{1}{S_{11}^k [1 - (v^k)^2]}, & B_{12}^k &= v^k B_{11}^k, & G_{12}^k &= \frac{1 - v^k}{2} B_{11}^k, \\
v^k &= -\frac{S_{12}^k}{S_{11}^k}, & \gamma_{11}^k &= d_{31}^k (1 + v^k) B_{11}^k, & \gamma_{33}^k &= \varepsilon_{33}^k [1 - (k_P^k)^2], \\
(k_P^k)^k &= \frac{2(d_{31}^k)^2}{S_{11}^k \varepsilon_{33}^k (1 - v^k)}, & \frac{(\gamma_{11}^k)^2}{\gamma_{33}^k} &= B_{11}^k \frac{1 + v^k}{2} \frac{(k_P^k)^2}{1 - (k_P^k)^2}, & B_{22}^k &= B_{11}^k. \quad (2)
\end{aligned}$$

У подальшому будемо розглядати такі оболонки, для яких величинами $\frac{z}{R_1}$ і $\frac{z}{R_2}$ можна знехтувати порівняно з одиницею (R_1, R_2 – радіуси головних кривин серединної поверхні). У цьому випадку компоненти вектора зміщень і компонент тензора деформацій оболонки запишуться у вигляді

$$\begin{aligned}
u(s, \theta, z) &= u_0(s, \theta) - \frac{\partial w(s, \theta)}{\partial s} z, \\
v(s, \theta, z) &= v_0(s, \theta) - \frac{\partial w(s, \theta)}{r \partial \theta} z, \\
w(s, \theta, z) &= w(s, \theta), \\
\varepsilon_{ss} &= \varepsilon_{ss}^0 + \alpha_{ss} z, & \varepsilon_{\theta\theta} &= \varepsilon_{\theta\theta}^0 + \alpha_{\theta\theta} z, & \varepsilon_{s\theta} &= \varepsilon_{s\theta}^0 + \alpha_{s\theta} z, \quad (3)
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ss}^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial s} + \frac{w}{R_1}, & \varepsilon_{\theta\theta}^0 &= \frac{1}{r} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \frac{\cos \varphi}{r} u_0 + \frac{w}{R_2}, \\
\varepsilon_{s\theta}^0 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_0}{\partial s} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} - \frac{\cos \varphi}{r} v_0 \right), \\
\alpha_{ss} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial u_0}{\partial s}, \\
\alpha_{\theta\theta} &= -\left(\frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial w}{\partial s} \right) + \left(\frac{1}{R_2} \frac{1}{r} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \frac{\cos \varphi}{R_1} u_0 \right), \\
\alpha_{s\theta} &= -\left(\frac{\partial^2 w}{r \partial \theta \partial s} - \frac{\cos \varphi}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{1}{R_2} \frac{\partial v_0}{\partial s} - \frac{\cos \varphi}{R_2 r} v_0 + \frac{1}{R_1 r} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} \right). \quad (4)
\end{aligned}$$

Враховуючи вказані вище гіпотези відносно електричних величин, після інтегрування виразу для E_z^k ,

$$E_z^k = \frac{1}{\gamma_{33}^k} D_z^k - \frac{\gamma_{11}^k}{\gamma_{33}^k} [(\varepsilon_{ss}^0 + \varepsilon_{\theta\theta}^0) + (\alpha_{ss} + \alpha_{\theta\theta}) z], \quad (5)$$

по товщині оболонки одержимо

$$D_z^k = -\frac{V_k - V_{k-1}}{H_1^k} + (\varepsilon_{ss}^0 + \varepsilon_{\theta\theta}^0) \frac{H_2^k}{H_1^k} + (\alpha_{ss} + \alpha_{\theta\theta}) \frac{H_3^k}{H_1^k}. \quad (6)$$

Тут введено такі позначення:

$$\begin{aligned}
H_1^k &= \frac{a_k - a_{k-1}}{\gamma_{33}^k}, & H_2^k &= \frac{\gamma_{11}^k}{\gamma_{33}^k} (a_k - a_{k-1}), \\
H_3^k &= \frac{\gamma_{11}^k}{2\gamma_{33}^k} (a_k^2 - a_{k-1}^2), \quad (7)
\end{aligned}$$

$V_k, k = 1, 2, 3$, – значення потенціалу на електродованих поверхнях.

Підставляючи (5) в (1) і враховуючи співвідношення (3), (4), рівняння стану запишемо у вигляді

$$\begin{aligned}\sigma_{ss}^k &= A_{11}^k(\varepsilon_{ss}^0 + \mathbf{x}_{ss}z) + A_{12}^k(\varepsilon_{\theta\theta}^0 + \mathbf{x}_{\theta\theta}z) - \frac{\gamma_{11}^k}{\gamma_{33}^k} D_z^k, \\ \sigma_{\theta\theta}^k &= A_{12}^k(\varepsilon_{ss}^0 + \mathbf{x}_{ss}z) + A_{11}^k(\varepsilon_{\theta\theta}^0 + \mathbf{x}_{\theta\theta}z) - \frac{\gamma_{11}^k}{\gamma_{33}^k} D_z^k, \\ \sigma_{s\theta}^k &= G_{12}^k(\varepsilon_{s\theta}^0 + \mathbf{x}_{s\theta}z),\end{aligned}\quad (8)$$

де

$$A_{11}^k = B_{11}^k + \frac{(\gamma_{11}^k)^2}{\gamma_{33}^k}, \quad A_{12}^k = B_{12}^k + \frac{(\gamma_{11}^k)^2}{\gamma_{33}^k}. \quad (9)$$

Наведемо варіаційне формулювання задачі. З врахуванням гіпотез Кірхгофа – Лява і припущення про сталість нормальної складової вектора електричної індукції в кожному шарі після інтегрування по товщині і підсумовування результатів по всьому пакету шарів оболонки, зведемо тривимірне варіаційне рівняння [8] до двовимірного вигляду

$$\delta\mathcal{E} = \delta\mathcal{E}_1 + \delta\mathcal{E}_2 + \delta\mathcal{E}_3 = 0. \quad (10)$$

Тут введено такі позначення:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_1 &= \frac{1}{2} \iint_F \left\{ C_{11}(\varepsilon_{ss}^0)^2 + 2C_{12}(\varepsilon_{ss}^0\varepsilon_{\theta\theta}^0) + C_{22}(\varepsilon_{\theta\theta}^0)^2 + 4C_{44}(\varepsilon_{s\theta}^0)^2 + 2K_{11}(\varepsilon_{ss}^0\mathbf{x}_{ss}) + \right. \\ &\quad + 2K_{12}(\varepsilon_{ss}^0\mathbf{x}_{\theta\theta}) + 2K_{21}(\varepsilon_{\theta\theta}^0\mathbf{x}_{ss}) + 2K_{22}(\varepsilon_{\theta\theta}^0\mathbf{x}_{\theta\theta}) + 8K_{44}(\varepsilon_{s\theta}^0\mathbf{x}_{s\theta}) + \\ &\quad + D_{11}(\mathbf{x}_{ss})^2 + 2D_{12}(\mathbf{x}_{ss}\mathbf{x}_{\theta\theta}) + D_{22}(\mathbf{x}_{\theta\theta}^2) + 4D_{44}(\mathbf{x}_{s\theta}^2) - \\ &\quad - \omega^2\rho_1(u_0^2 + v_0^2 + w^2) + 2\omega^2\rho_2\left(u_0\frac{\partial w}{\partial s} + v_0\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}\right) - \\ &\quad \left. - \omega^2\rho_3\left[\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)^2\right] \right\} r ds d\theta, \quad (11)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_2 &= - \iint_F (P_s u_0 + P_\theta v_0 + P_z w) r ds d\theta - \\ &\quad - \int_L \left(N_s u_0 + N_\theta v_0 + N_z w - M_s \frac{\partial w}{\partial s} - M_\theta \frac{\partial w}{r\partial\theta} \right) dL, \quad (12)\end{aligned}$$

$$\mathcal{E}_3 = - \iint_F \frac{V_k - V_{k-1}}{H_1^k} [(\varepsilon_{ss}^0 + \varepsilon_{\theta\theta}^0)H_2^k + (\mathbf{x}_{ss} + \mathbf{x}_{\theta\theta})H_3^k] r ds d\theta, \quad (13)$$

де

$$\begin{aligned}C_{ij} &= \int_{a_{k-1}}^{a_k} A_{ij}^k dz - \frac{(H_2^k)^2}{H_1^k}, & C_{44} &= \int_{a_{k-1}}^{a_k} G_{12}^k dz, \\ K_{ij} &= \int_{a_{k-1}}^{a_k} A_{ij}^k z dz - \frac{(H_2^k H_3^k)}{H_1^k}, & K_{44} &= \int_{a_{k-1}}^{a_k} G_{12}^k z dz, \\ D_{ij} &= \int_{a_{k-1}}^{a_k} A_{ij}^k z^2 dz - \frac{(H_3^k)^2}{H_1^k}, & D_{44} &= \int_{a_{k-1}}^{a_k} G_{12}^k z^2 dz,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_s &= \int_{a_{k-1}}^{a_k} f_s z dz, & M_\theta &= \int_{a_{k-1}}^{a_k} f_\theta z dz, \\
\rho_1 &= \int_{a_{k-1}}^{a_k} \rho^k dz, & \rho_2 &= \int_{a_{k-1}}^{a_k} \rho^k z dz, & \rho_3 &= \int_{a_{k-1}}^{a_k} \rho^k z^2 dz,
\end{aligned} \quad (14)$$

ρ^k – густина матеріалів.

У виразах (14) перед інтегралами опущено знак підсумовування за індексом k . У випадку симетричного розміщення шарів оболонки маємо

$$K_{11} = K_{22} = K_{33} = 0. \quad (15)$$

При дослідженні впливу температури на активне демпфування коливань за допомогою актуаторів згадані вище рівняння потрібно доповнити рівнянням енергії, яке описує дисипативний розігрів.

Щоб дослідити вплив температури дисипативного розігріву на ефективність активного демпфування коливань оболонок обертання, для знаходження цієї температури використаємо тривимірне варіаційне рівняння енергії для шаруватої оболонки [15]:

$$\begin{aligned}
&\iint_{(V)} \left[c_T^k \rho^k \frac{\partial T}{\partial t} \delta T + \lambda_T^k \left(\frac{\partial T}{\partial z} \delta \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\partial T}{\partial r} \delta \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \delta \frac{\partial T}{r \partial \theta} \right) + \right. \\
&\quad \left. + Q^k \delta T \right] r ds d\theta dz + \iint_{(\Sigma)} \alpha_T (T - T_C) \delta T d\Sigma = 0,
\end{aligned} \quad (16)$$

де c_T^k – коефіцієнт теплоємності матеріалу шару оболонки; α_T – коефіцієнт теплообміну при конвективному теплообміні на поверхні Σ з середовищем з температурою T_C ; t – час нагріву; λ_T^k – коефіцієнти теплопровідності.

Для зведення тривимірної варіаційної задачі теплопровідності (16) до системи двовимірних задач приймаємо, що нормальна складова теплового потоку q_z змінюється по товщині пакету шарів за лінійним законом $q_z = q_0 + q_1 z$. У цьому випадку температура в кожному шарі оболонки апроксимується квадратичним поліномом за товщинною координатою z .

При механічному навантаженні для випадку розімкнутих електродів з умови $\iint_S D_z ds = 0$ можна знайти різницю потенціалів між електродами за формулами

$$V_k - V_{k-1} = \frac{1}{\iint_{(S)} \frac{1}{H_1^k} dS} \left\{ \iint_{(S)} \left[(\varepsilon_{ss}^0 + \varepsilon_{\theta v}^0) \frac{H_2^k}{H_1^k} + (\alpha_{ss} + \alpha_{\theta\theta}) \frac{H_3^k}{H_1^k} \right] dS \right\}. \quad (17)$$

Тут S – площа електродів, з яких знімається різниця потенціалів. При цьому електродні покриття можуть бути як суцільними, так і дискретно розміщеними.

При сумісному використанні сенсорів та актуаторів для активного демпфування коливань сенсори дають інформацію про механічний стан оболонки, а до актуаторів підводиться різниця потенціалів, яка пов'язана з показниками сенсора рівнянням оберненого зв'язку:

$$V_a = G_1 V_s + G_2 \frac{\partial V_s}{\partial t} + G_3 \frac{\partial^2 V_s}{\partial t^2}. \quad (18)$$

У випадку гармонічного деформування рівняння оберненого зв'язку має вигляд

$$V_a = G_1 V_s + i\omega G_2 V_s - \omega^2 G_3 V_s, \quad (19)$$

де G_i , $i = 1, 2, 3$, – параметри керування.

Для дослідження впливу коефіцієнтів оберненого зв'язку на жорсткісні, дисипативні та інерційні характеристики оболонки використаємо наведені вище варіаційні рівняння (10).

Підставляючи (19) в \mathcal{E}_3 і враховуючи (17), одержимо

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_3 = & \frac{(G_1 + i\omega G_2 - \omega^2 G_3)}{\iint_{(S)} \frac{1}{H_1^k} dS} \iint_F \left\{ \frac{1}{H_1^k} [(\varepsilon_{ss}^0 + \varepsilon_{\theta\theta}^0) H_2^k + (\alpha_{ss} + \alpha_{\theta\theta}) H_3^k] \times \right. \\ & \left. \times \iint_{(S)} \left[(\varepsilon_{ss}^0 + \varepsilon_{\theta\theta}^0) \frac{H_2^k}{H_1^k} + (\alpha_{ss} + \alpha_{\theta\theta}) \frac{H_3^k}{H_1^k} \right] dS \right\} dF. \end{aligned} \quad (20)$$

3. Скінченно-елементний метод розв'язування задачі. Розв'язок варіаційної задачі (10) знаходимо методом скінченних елементів (МСЕ) з використанням дванадцятивузлових ізопараметричних чотирикутних елементів з апроксимацією зміщень і геометрії оболонки поліномами третього степеня у межах чотирикутника [17]. При цьому прогин оболонки в межах елемента апроксимуємо бікубічними поліномами Ерміта:

$$\begin{aligned} w = & \sum_{i=1}^4 L_i w_i + \sum_{i=1}^4 L_{i+4} + \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)_i + \\ & + \sum_{i=1}^4 L_{i+8} \left(\frac{\partial w}{r \partial \theta} \right)_i + \sum_{i=1}^4 L_{i+12} + \left(\frac{\partial^2 w}{r \partial s \partial \theta} \right)_i, \end{aligned} \quad (21)$$

де w_i , $\left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)_i$, $\left(\frac{\partial w}{r \partial \theta} \right)_i$, $\left(\frac{\partial^2 w}{r \partial s \partial \theta} \right)_i$ – амплітудні значення прогину та його похідних у вузлових точках; L_i – поліноми Ерміта:

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{1}{16} (2 - 3\xi + \xi^3)(2 - 3\eta + \eta^3), & L_2 &= \frac{1}{16} (2 + 3\xi - \xi^3)(2 - 3\eta + \eta^3), \\ L_3 &= \frac{1}{16} (2 + 3\xi - \xi^3)(2 + 3\eta - \eta^3), & L_4 &= \frac{1}{16} (2 - 3\xi + \xi^3)(2 + 3\eta - \eta^3), \\ L_5 &= \frac{\ell_{12}}{32} (1 - \xi - \xi^2 + \xi^3)(2 - 3\eta + \eta^3), \\ L_6 &= \frac{\ell_{12}}{32} (-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3)(2 - 3\eta + \eta^3), \\ L_7 &= \frac{\ell_{34}}{32} (-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3)(2 + 3\eta - \eta^3), \\ L_8 &= \frac{\ell_{34}}{32} (1 - \xi - \xi^2 + \xi^3)(2 + 3\eta - \eta^3), \\ L_9 &= \frac{\ell_{14}}{32} (2 - 3\xi + \xi^3)(1 - \eta - \eta^2 + \eta^3), \\ L_{10} &= \frac{\ell_{23}}{32} (2 + 3\xi - \xi^3)(1 - \eta - \eta^2 + \eta^3), \\ L_{11} &= \frac{\ell_{23}}{32} (2 + 3\xi - \xi^3)(-1 - \eta - \eta^2 + \eta^3), \\ L_{12} &= \frac{\ell_{14}}{32} (2 - 3\xi + \xi^3)(-1 - \eta + \eta^2 + \eta^3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{13} &= \frac{\ell_{12}\ell_{14}}{64}(1 - \xi - \xi^2 + \xi^3)(1 - \eta - \eta^2 + \eta^3), \\
L_{14} &= \frac{\ell_{12}\ell_{23}}{64}(-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3)(1 - \eta - \eta^2 + \eta^3), \\
L_{15} &= \frac{\ell_{23}\ell_{34}}{64}(-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3)(-1 - \eta + \eta^2 + \eta^3), \\
L_{16} &= \frac{\ell_{14}\ell_{34}}{64}(1 - \xi - \xi^2 + \xi^3)(-1 - \eta + \eta^2 + \eta^3),
\end{aligned} \tag{22}$$

ℓ_{ij} – відстань між відповідними вершинами елемента.

Тангенціальні складові зміщень серединної поверхні оболонки в межах елемента апроксимуємо кубічними поліномами:

$$u_0 = \sum_{i=1}^{12} N_i u_0^i, \quad v_0 = \sum_{i=1}^{12} N_i v_0^i, \tag{23}$$

де

$$\begin{aligned}
N_1 &= \frac{1}{32}(1 - \xi)(1 - \eta)[9(\xi^2 + \eta^2) - 10], \\
N_2 &= \frac{1}{32}(1 + \xi)(1 - \eta)[9(\xi^2 + \eta^2) - 10], \\
N_3 &= \frac{1}{32}(1 + \xi)(1 + \eta)[9(\xi^2 + \eta^2) - 10], \\
N_4 &= \frac{1}{32}(1 - \xi)(1 + \eta)[9(\xi^2 + \eta^2) - 10], \\
N_5 &= \frac{9}{32}(1 - \xi^2)(1 - 3\xi)(1 - \eta), & N_6 &= \frac{9}{32}(1 - \xi^2)(1 + 3\xi)(1 - \eta), \\
N_7 &= \frac{9}{32}(1 + \xi)(1 - \eta^2)(1 - 3\eta), & N_8 &= \frac{9}{32}(1 + \xi)(1 - \eta^2)(1 + 3\eta), \\
N_9 &= \frac{9}{32}(1 - \xi^2)(1 + 3\xi)(1 + \eta), & N_{10} &= \frac{9}{32}(1 - \xi^2)(1 - 3\xi)(1 + \eta), \\
N_{11} &= \frac{9}{32}(1 - \xi)(1 - \eta^2)(1 + 3\eta), & N_{12} &= \frac{9}{32}(1 - \xi)(1 - \eta^2)(1 - 3\eta).
\end{aligned} \tag{24}$$

Як глобальну систему координат, тобто систему, в якій об'єднуються всі скінченні елементи, використовуємо циліндричну систему координат (r, θ, s) . Меридіональна s і осьова x координати зв'язані співвідношеннями

$$ds = A dx, \quad A = \sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dx}\right)^2}. \tag{25}$$

Як локальну систему координат, в якій визначаються апроксимуючі функції і проводиться інтегрування, використовуємо нормалізовану систему координат ξ, η . При цьому зв'язок між координатами s, r, θ і координатами місцевої систем ξ, η визначається залежностями

$$s = \sum_{i=1}^{12} N_i s_i, \quad r = \sum_{i=1}^{12} N_i r_i, \quad \theta = \sum_{i=1}^{12} N_i \theta_i,$$

де s_i, r_i, θ_i – вузлові значення координат.

Співвідношення (21), (23) показують, що використаний елемент має 40 ступенів вільності: 6 ступенів $(w, \frac{\partial w}{\partial s}, \frac{\partial w}{r \partial \theta}, \frac{\partial^2 w}{r \partial s \partial \theta}, u_0, v_0)$ у кожній вузловій точці та 2 ступені вільності (u_0, v_0) в кожному вузлі, розміщеному на сторонах чотирикутника.

Подамо компоненти механічного та електричного навантаження, які діють у межах елемента, у вигляді розкладу

$$P = \sum_{i=1}^{12} N_i P_i, \quad V = \sum_{i=1}^{12} N_i V_i. \quad (26)$$

Враховуючи вирази для зміщень і деформацій (3), (4), з умови стаціонарності функціонала (10) одержимо комплексну систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно тангенціальних зміщень, прогину та його похідних:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial w_i} &= \sum_{m=1}^M \frac{\partial \mathcal{E}_m}{\partial w_i} = 0, & \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial w_i^s} &= \sum_{m=1}^M \frac{\partial \mathcal{E}_m}{\partial w_i^s} = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial w_i^0} &= \sum_{m=1}^M \frac{\partial \mathcal{E}_m}{\partial w_i^0} = 0, & \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial w_i^{s0}} &= \sum_{m=1}^M \frac{\partial \mathcal{E}_m}{\partial w_i^{s0}} = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial u_0^i} &= \sum_{m=1}^M \frac{\partial \mathcal{E}_m}{\partial u_0^i} = 0, & \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial v_0^i} &= \sum_{m=1}^M \frac{\partial \mathcal{E}_m}{\partial v_0^i} = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

При цьому диференціювання за w, w^s, w^0, w^{s0} проводиться тільки в кутових точках, а за u_0 і v_0 – в усіх точках елемента. Похідні для кожного i -го вузла елемента, який співпадає з кутовою точкою, мають вигляд

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}_m}{\partial w_i} &= a_{ik}^w w_k + b_{ik}^w w_k^s + c_{ik}^w w_k^0 + d_{ik}^w w_k^{s0} + g_{in}^w u_{0m} + h_{in}^w v_{0m} + f_i^w, \quad \dots, \\ \frac{\partial \mathcal{E}_m}{\partial v_0^i} &= a_{ik}^{v0} w_k + b_{ik}^{v0} w_k^s + c_{ik}^{v0} w_k^0 + d_{ik}^{v0} w_k^{s0} + g_{in}^{v0} u_{0m} + h_{in}^{v0} v_{0m} + f_i^{v0}. \end{aligned} \quad (28)$$

У співвідношеннях (28) нумерація вузлів є локальною: $k = 1, 2, 3, 4$, $n = 1, 2, \dots, 12$. Комплексні коефіцієнти систем (28) виражаються через електромеханічні і геометричні характеристики оболонки, а праві частини $f_i^w, f_i^{w^s}, \dots, f_i^{v0}$ визначаються шляхом розкладу навантаження за системою апроксимуючих функцій. Такий підхід дозволяє одержати розв'язок лінійної задачі для оболонок обертання як при механічному, так і при електричному навантаженнях.

Вважаємо, що площа електродованої поверхні S не може бути меншою від площі кожного з чотирикутних елементів, на які розбивається поверхня оболонки.

При розв'язуванні задачі (10) варіація функціонала \mathcal{E}_3 входить у праву частину розв'язувальної системи і визначає ту частину зовнішнього навантаження, яке зумовлене дією різниці потенціалів. У випадку активного демпфування варіація $\delta \mathcal{E}_3$ вносить вклад у відповідні коефіцієнти розв'язувальної системи, які стоять при невідомих величинах, і тим самим змінюють жорсткісні, дисипативні та інерційні характеристики оболонки.

Двовимірне варіаційне рівняння теплопровідності розв'язуємо на тій самій сітці скінченних елементів. При цьому похідна dT/dt не варіюється і замінюється виразом $\frac{dT}{dt} = \frac{T(t + \Delta t) - T(t)}{\Delta t}$. У подальшому використовуємо неявну схему розв'язку рівняння теплопровідності.

Для розв'язання спряженої нелінійної задачі термоелектров'язкопружності на кожному кроці за часом Δt використовуємо ітераційний метод змінних параметрів типу Стеффенсена – Ейткіна [8].

4. Аналіз числових результатів. Розглянемо задачу про активне демпфування тришарової циліндричної панелі сталі товщини $H = 2h_1 + h_2$ з в'язкопружним середнім шаром при дії на неї рівномірно розподіленого механічного тиску $P = P_0 \cos \omega t$.

Нехай панель знаходиться в умовах конвективного теплообміну з оточуючим середовищем з температурою T_C . Вважаємо, що панель жорстко заземлена, так що умови жорсткого заземлення $w = \frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{R \partial \theta} = \frac{\partial^2 w}{R \partial s \partial \theta} = 0$ виконуються на краях оболонки. Зовнішні шари оболонки виготовлені з п'єзоелектричного матеріалу ЦТС_TБС-2, теплофізичні та механічні характеристики якого наведено в [8]. Вважаємо, що вони не залежать від температури.

Припускаємо, що комплексний модуль зсуву пасивного матеріалу залежить від температури і розраховується за формулою $G = G' + iG''$, де

$$G' = [968 - 8.69(T - T_0)]A_0,$$

$$G'' = [87.1 - 0.7(T - T_0)]A_0,$$

$$A_0 = 10^6 \text{ Па}, \quad \nu = 0.36.$$

Ці дані взято з роботи [16] і вони описують поведінку матеріалу в широкому інтервалі температур. Для температури плавлення приймаємо значення $T_m = 140^\circ \text{C}$.

Геометрія оболонки, умови її навантаження і теплообміну характеризуються такими значеннями параметрів:

$$H = 0.01 \text{ м}, \quad 2h_1 = 0.0002 \text{ м}, \quad h_2 = 0.0098 \text{ м},$$

$$\alpha_T = 20 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{град}), \quad \lambda_T = 0.47 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{град}),$$

$$T_C = T_0 = 20^\circ \text{C},$$

$$P_0 = 10^4 \text{ Па}, \quad \rho = 0.929 \cdot 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3,$$

$$R = 0.1 \text{ м}, \quad L = 0.1 \text{ м}, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}.$$

На рис. 1 та рис. 2 наведено амплітудно-частотні (АЧХ) та температурно-частотні характеристики (ТЧХ) коливань панелі в околі першого резонансу для значень коефіцієнтів оберненого зв'язку $G_2 = 0, 0.2 \cdot 10^{-5}, 0.5 \cdot 10^{-5}$ при $G_1 = G_3 = 0$ для випадку незалежних від температури властивостей пасивного матеріалу.

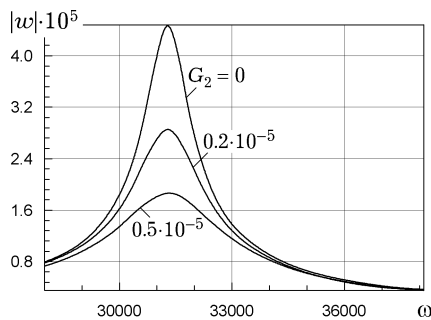


Рис. 1

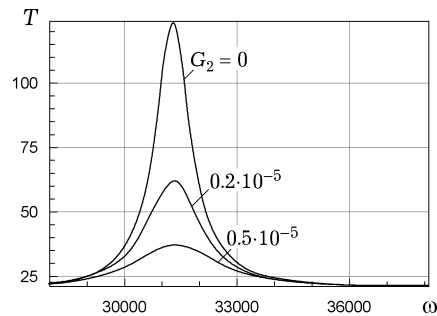


Рис. 2

Як бачимо на цих рисунках, за рахунок вибору коефіцієнта оберненого зв'язку можна суттєво вплинути на амплітуду коливань і температуру дисипативного розігріву.

Рис. 3 і рис. 4 ілюструють вплив нелінійності, породженої залежністю властивостей пасивного матеріалу від температури та спряженістю електромеханічних і теплових полів, на амплітудно- та температурно-частотні характеристики, а також вплив на них коефіцієнта оберненого зв'язку. На цих рисунках використано ті ж позначення, що й на рис. 1 та рис. 2.

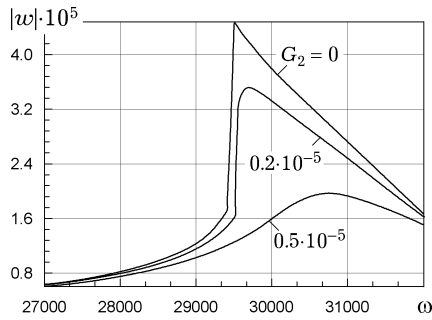


Рис. 3

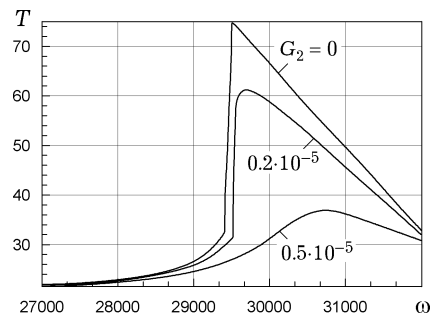


Рис. 4

Як бачимо на цих рисунках, зі збільшенням частоти в АЧХ і ТЧХ проявляються різкі зміни, характерні для фізичної нелінійності. Зі збільшенням коефіцієнта оберненого зв'язку ці характеристики наближаються до динамічних характеристик для випадку незалежних від температури властивостей.

Таким чином, вибором коефіцієнта оберненого зв'язку можна суттєво впливати на динамічні та температурні характеристики оболонки.

1. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. – Москва: Наука, 1974. – 446 с.
2. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А. Электроупругость. – Киев: Наук. думка, 1989. – 280 с. – (Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5 т. – Т. 5.)
3. Дубенец В. Г., Хильчевский В. В. Колебания демпфируемых композитных конструкций. – Киев: Вища шк., 1995. – Т. 1. – 226 с.
4. Ильюшин А. А., Победра Б. Е. Основы математической теории термовязкоупругости. – Москва: Наука, 1970. – 280 с.
5. Карнаузов В. Г. Тепловое разрушение полимерных элементов конструкций при моногармоническом деформировании // Прикл. механика. – 2004. – **40**, № 6. – С. 30–70.
6. Карнаузов В. Г., Киричок И. Ф. Связанные задачи теории вязкоупругих пластин и оболочек. – Киев: Наук. думка, 1986. – 222 с.
7. Карнаузов В. Г., Киричок И. Ф. Электротермовязкоупругость. – Киев: Наук. думка, 1988. – 328 с. – (Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5 т. – Т. 4.)
8. Карнаузов В. Г., Михайленко В. В. Нелинейная термомеханика пьезоэлектрических неупругих тел при моногармоническом нагружении. – Житомир: Житомир. інж.-технолог. ін-т, 2005. – 426 с.
9. Корнев Б. Г., Резников Л. М. Динамические гасители колебаний. Теория и приложения. – Москва: Наука, 1988. – 304 с.
10. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. – Москва: Мир, 1974. – 338 с.
11. Матвеев В. В. Демпфирование колебаний деформируемых тел. – Киев: Наук. думка, 1985. – 264 с.
12. Методы расчета оболочек: В 5 т. / Под ред. А. Н. Гузя. – Киев: Наук. думка, 1980–1982.
13. Механика композитных материалов и элементов конструкций: В 3 т. / Под ред. А. Н. Гузя. – Киев: Наук. думка, 1982–1983.
14. Нашиф А., Джоунс Д., Хендерсон Дж. Демпфирование колебаний. – Москва: Мир, 1988. – 448 с.
15. Савченко В. Г., Шевченко Ю. Н. Неосесимметричное термонапряженное состояние слоистых тел вращения из ортотропных материалов при неизотермическом нагружении // Механика композитных материалов. – 2004. – **46**, № 6. – С. 731–752.
16. Червинко О. П., Сенченков И. К. Связанное термомеханическое состояние вязкоупругой прямоугольной пластины с надрезом при гармоническом нагружении // Прикл. механика. – 2002. – **38**, № 2. – С. 101–109.
17. Bhimaraddi A., Carr A. J., Moss P. J. A shear deformable finite element for the analysis of general shells of revolution // Computers & Structures. – 1989. – **31**, No. 3. – P. 299–308.

18. Gabbert U., Tzou H. S. Smart structures and structronic systems. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2001. – 384 p.
19. Gopinathan S., Varadan V. V., Varadan V. K. A review and critique of theories for piezoelectric laminates // Smart Mater. Struct. – 2000. – **9**. – P. 24–48.
20. Karnaukhov V. G. Thermomechanics of coupled fields in passive and piezoactive inelastic bodies under harmonic deformations // J. Thermal Stresses. – 2005. – **28**, No. 6-7. – P. 783–815.
21. Lazan B. Damping of materials and members in structural mechanics. – Oxford etc.: Pergamon Press, 1968. – 318 p.
22. Lu X., Hanagud S. V. Extended irreversible thermodynamics modeling for self-heating and dissipation in piezoelectric ceramics // IEEE Trans. on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control. – 2004. – **31**, No. 12. – P. 1582–1592.
23. Mauk L. D., Lynch C. S. Thermo-electro-mechanical behavior of ferroelectric materials. Part I: Computational micromechanical model versus experimental results // J. Intelligent Mater. Systems and Struct. – 2003. – **14**. – P. 587–602.
24. Rao S. S., Sunar M. Piezoelectricity and its use in disturbance sensing and control of structure: A survey // Appl. Mech. Rev. – 1994. – **47**, No. 44. – P. 113–123.
25. Tani J., Takagi T., Qiu J. Intelligent material systems: Applications of functional materials // Appl. Mech. Rev. – 1998. – **51**, No. 8. – P. 505–521.
26. Tzou H. S. Piezoelectric shells (Distributed sensing and control of continua). – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1993. – 400 p.
27. Tzou H. S., Bergman L. A. Dynamics and control of distributed systems. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1998. – 400 p.
28. Weiland L. M., Lynch C. S. Thermo-electro-mechanical behavior of ferroelectric materials. Part II: Introduction of rate and self-heating effects // J. Intelligent Mater. Systems and Struct. – 2003. – **14**. – P. 602–621.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ АКТИВНОГО ДЕМПФИРОВАНИЯ ВЫНУЖДЕННЫХ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКИХ РЕЗОНАНСНЫХ КОЛЕБАНИЙ ВЯЗКОУПРУГИХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ ПРИ ПОМОЩИ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВКЛЮЧЕНИЙ

Рассматривается задача об активном демпфировании вынужденных резонансных колебаний вязкоупругих оболочек вращения при помощи пьезоэлектрических сенсоров и актуаторов. Учитывается взаимодействие электромеханических и тепловых полей. Для моделирования колебаний используются гипотезы Кирхгоффа – Лява и адекватные им гипотезы о распределении температуры и электрических полевых величин. Температура в оболочке повышается в результате диссипативного разогрева. Для активного демпфирования колебаний применяются пьезоэлектрические сенсоры и актуаторы. Предполагается, что электромеханические характеристики материалов зависят от температуры. Решение сложной нелинейной задачи получено итерационным методом и методом конечных элементов. Исследовано влияние температуры диссипативного разогрева на эффективность активного демпфирования колебаний вязкоупругой цилиндрической панели.

NUMERICAL MODELING OF ACTIVE DAMPING OF FORCED THERMOMECHANICAL RESONANCE VIBRATIONS OF VISCOELASTIC SHELLS OF REVOLUTION BY PIEZOELECTRIC INCLUSIONS

A problem of active damping of forced resonance vibrations of viscoelastic shells of revolution by piezoelectric sensors and actuators is considered. Kirchoff – Love hypothesis and the hypothesis adequate to it about distribution of temperature and electric field values are used for modeling the thermoelectromechanical vibrations. The shell temperature rises in result of dissipative heating. Piezoelectric sensors and actuators are used for active damping of vibrations. It is supposed that the electromechanical material characteristics depend on the temperature. Solution of a complex nonlinear problem is obtained by the iterative method and finite element method. The influence of dissipative heating on effectiveness of active damping vibrations of cylindrical panel with rigidly fastened edges is investigated.

¹ Ін-т механіки ім. С. П. Тимошенка
НАН України, Київ,

² Нац. техн. ун-т України «КПІ», Київ,

³ Миколаїв. держ. ун-т
ім. В. О. Сухомлинського, Миколаїв

Одержано
31.10.08