УДК 539.3

О. З. Кравчишин, В. Ф. Чекурін

ІТЕРАЦІЙНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПОЧАТКОВО-КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ПОШИРЕННЯ ПРУЖНОГО ЗБУРЕННЯ У НЕОДНОРІДНО ДЕФОРМОВАНОМУ ТІЛІ

Запропоновано ітераційний метод розв'язування початково-крайової задачі для рівняння гіперболічного типу, що моделює зондування неоднорідно-деформованого тіла скінченних розмірів пружним збуренням.

Явище акустопружності знаходить широке застосування для створення неруйнівних теоретико-експериментальних методів визначення напружено-деформованого стану (НДС) твердих тіл. Ідея неруйнівних методів полягає у тому, що, проводячи фізичні вимірювання на реальних об'єктах, визначаємо деяку множину інформативних параметрів зондувальних полів, які дозволяють відновити механічні характеристики досліджуваного тіла. У випадку використання ультразвукового зондування інформативними параметрами можуть бути, наприклад, фазові швидкості хвиль різних поляризацій, час поширення імпульсу вздовж заданого напрямку в тілі, частоти автоциркуляції тощо. З використанням цих даних разом із моделлю, що описує поширення хвиль у деформованих твердих тілах, формулюють задачі визначення початкового НДС, ідентифікації включень тощо [2, 3, 7, 8].

У найбільш завершеному вигляді цей підхід реалізовано для випадку однорідного початкового напружено-деформованого стану [2, 3]. При цьому математичну модель зведено до добре вивченої раніше задачі поширення монохроматичних плоских хвиль у безмежному акустично однорідному анізотропному просторі, де анізотропія породжена початковим НДС. Розв'язування задачі дозволяє отримати так звані співвідношення акустопружності, що пов'язують фазову швидкість плоскої монохроматичної хвилі, яка поширюється у пружному однорідно деформованому просторі, з компонентами тензорів початкових деформацій або напружень.

На сьогоднішній день теорія поширення пружних хвиль в однорідно деформованих твердих тілах знаходить подальше використання при розв'язуванні цілого ряду важливих практичних задач. Так, зокрема, у роботі [8] описано методику виявлення появи та росту тріщин на основі аналізу нелінійної модуляції ультразвукових сигналів. У статті [7] наведено теоретичні викладки для отримання коефіцієнта нелінійного зсуву тонкого тіла та проведено порівняння зі значеннями, отриманими експериментально.

У випадку неоднорідного НДС поширення пружних збурень у тілі описується системою диференціальних рівнянь із частинними похідними гіперболічного типу, коефіцієнти яких залежать від параметрів локального напружено-деформованого стану [6]. Для системи рівнянь сформульовано задачу Коші, що моделює відому схему акустичного зондування твердого тіла, яке перебуває під дією неоднорідних напружень [4]. Запропоновано ітераційний метод її розв'язування, який зводить вихідну задачу опису поширення пружного збурення в неоднорідно деформованому тілі до швидкозбіжної послідовності задач для хвильових рівнянь зі сталими коефіцієнтами [6, с. 85]. На базі моделі записано інтегральні співвідношення акустопружності, що пов'язують швидкість або час поширення імпульсу збурення уздовж заданого напрямку із середньоінтегральними значеннями розподілу компонент тензорів деформацій чи напружень на цьому напрямку.

Із використанням інтегральних співвідношень акустопружності запропоновано неруйнівний метод визначення неоднорідного НДС об'єктів [6, с. 107]. Однак розглядувану модель зондування, в основу якої покладено опис поширення збурення у безмежному просторі, доцільно застосовувати у випадку, коли вибір інформативних параметрів здійснюється за допомогою перетворювачів, що знаходяться на двох протилежних сторонах об'єкта і зістиковані з ним через довгі хвилеводи. При цьому модель не враховує процесів відбивання на межах поділу хвилевод-об'єкт, а тривалість зондувального імпульсу вважається настільки малою, що відбита хвиля не накладається на пряму на приймачі [6, с. 80].

У статті запропоновано ітераційний алгоритм для розв'язування початково-крайової задачі акустопружності, що моделює зондування неоднорідно деформованого тіла скінченних розмірів пружними імпульсами. Отримано аналітичні розв'язки задачі на нульовій та першій ітераціях і рекурентні подання для вищих ітерацій.

Початково-крайова задача поширення пружного збурення у твердому тілі скінченних розмірів. Нехай тверде тіло скінченних розмірів перебуває під дією одновісних напружень $\sigma(x)$. Поширення пружних збурень у такому тілі в напрямку x описується рівняннями [6, с. 95]

$$\frac{\partial^2 w_\alpha}{\partial \tau_\alpha^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\left(1 + \frac{\sigma(x)}{E_\alpha^*}\right)\frac{\partial w_\alpha}{\partial x}\right), \qquad \alpha = \ell,\, s_1,\, s_2, \tag{1}$$

з початковими умовами вигляду

$$w_\alpha\big|_{t=0} = \vartheta_\alpha(x), \qquad \left.\frac{\partial w_\alpha}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi_\alpha(x), \tag{2}$$

та крайовими умовами

$$w_\alpha(0,t) = \eta_\alpha(t), \qquad \frac{\partial w_\alpha(1,t)}{\partial x} = 0, \qquad t > 0\,. \tag{3}$$

Перше з рівнянь системи (1) при $\alpha = \ell$ описує поширення поздовжньо поляризованої хвилі. Друге та третє рівняння ($\alpha = s_1,\, s_2$) у цьому випадку є еквівалентними і описують розповсюдження поперечно поляризованих хвиль.

Тут використано позначення:

$E_\alpha^* = E\dfrac{C_{\alpha 0}^2}{C_\alpha^{*2}}$ − *зведені модулі Юнга* матеріалу [6, с. 96];

$C_{\ell 0} = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$, $C_{s0} = \sqrt{\mu/\rho}$ − фазові швидкості хвиль поздовжньої та поперечної поляризацій за відсутності деформації;

$\rho C_\ell^{*2} = (a + 3b + c) - 2\nu(a + b)$, $\rho C_s^{*2} = (2b + c) - \nu(4b + c)$ − характеристики нелінійної пружності матеріалу;

E − модуль Юнга, а ν − коефіцієнт Пуассона матеріалу;

a, b, c − пружні сталі третього порядку, ρ − густина матеріалу;

$\tau_\alpha = \dfrac{t}{t_{\alpha 0}}$, $t_{\alpha 0} = \dfrac{1}{C_{\alpha 0}}$ − часові координати для поздовжньої і поперечної хвиль.

Введемо середньоінтегральні значення компонент функції напружень $\overline{\sigma}$ на відрізку $[0,1]$ поширення зондувального імпульсу

$$\overline{\sigma} = \int_0^1 \sigma(y)\,dy$$

і через $\tilde{\sigma}(x)$ позначимо відхилення компонент функції напружень від їх середньоінтегральних значень на цьому відрізку: $\tilde{\sigma}(x) = \sigma(x) - \overline{\sigma}$.

Систему рівнянь (1) у цьому випадку подамо у вигляді

$$\frac{\partial^2 w_\alpha}{\partial \tau_\alpha^2} = \left(1 + \frac{\overline{\sigma}}{E_\alpha^*}\right)\frac{\partial^2 w_\alpha}{\partial x^2} + \frac{1}{E_\alpha^*}\frac{\partial}{\partial x}\left((\sigma(x) - \overline{\sigma})\frac{\partial w_\alpha}{\partial x}\right), \qquad \alpha = \ell,\, s\,. \tag{4}$$

Увівши позначення

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{\sigma(x)}{E_\ell^*}, & \alpha=\ell,\\[2mm] \dfrac{\sigma(x)}{E_s^*}, & \alpha=s,\end{cases}\qquad \overline{g}=\begin{cases}\dfrac{\overline{\sigma}}{E_\ell^*}, & \alpha=\ell,\\[2mm] \dfrac{\overline{\sigma}}{E_s^*}, & \alpha=s,\end{cases}$$

$$w=\begin{cases}w_\ell, & \alpha=\ell,\\ w_s, & \alpha=s,\end{cases}\qquad t=\begin{cases}\tau_\ell, & \alpha=\ell,\\ \tau_s, & \alpha=s,\end{cases}$$

задачу (2)–(4) подамо у вигляді

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=(1+\overline{g})\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\tilde{g}(x)\frac{\partial w}{\partial x}\right), \tag{5}$$

$$w(x,0)=\vartheta(x), \qquad \frac{\partial w(x,0)}{\partial t}=\psi(x), \qquad x\in[0,1], \tag{6}$$

$$w(0,t)=\eta(t), \qquad \frac{\partial w(1,t)}{\partial x}=0, \qquad t>0. \tag{7}$$

Із використанням розробленої ітераційної процедури [6, с. 85] рівняння (5) перепишемо у вигляді

$$\frac{\partial^2 w^{(k+1)}}{\partial t^2}=(1+\overline{g})\frac{\partial^2 w^{(k+1)}}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\tilde{g}(x)\frac{\partial w^{(k)}}{\partial x}\right), \tag{8}$$

де $\tilde{g}(x)=g(x)-\overline{g}$.

На нульовій ітерації розв'язуємо хвильове рівняння

$$\frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial t^2}=(1+\overline{g})\frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial x^2}. \tag{9}$$

У загальному випадку ненульових крайових і початкових умов розв'язок подамо у вигляді суми, кожна складова якої задовольняє лише початкові, $w_{\mathrm{in}}^{(0)}(x,t)$, або лише крайові, $w_{\mathrm{bn}}^{(0)}(x,t)$, умови (коли інші є нульовими):

$$w^{(0)}(x,t)=w_{\mathrm{in}}^{(0)}(x,t)+w_{\mathrm{bn}}^{(0)}(x,t).$$

Як відомо [5, с. 51], розв'язок задачі (8), (6), (7) за умови $\eta(t)=0$ матиме таке подання:

$$w_{\mathrm{in}}^{(0)}(x,t)=\frac{1}{2}\left(\overline{\vartheta}(x+\overline{C}t)+\overline{\vartheta}(x-\overline{C}t)\right)+\frac{1}{2\overline{C}}\int\limits_{x-\overline{C}t}^{x+\overline{C}t}\overline{\psi}(y)\,dy, \tag{10}$$

де $\overline{C}=\sqrt{1+\overline{g}}$, а функції $\overline{\vartheta}(x)$, $\overline{\psi}(x)$ є аналітичними продовженнями функцій $\vartheta(x)$, $\psi(x)$ поза межами проміжку $[0,1]$.

Виконання однорідних крайових умов $w^{(0)}(0,t)=0$ та $\partial w^{(0)}(1,t)/\partial x=0$ передбачає для функцій $\overline{\vartheta}(x)$ та $\overline{\psi}(x)$ наступні продовження на всій дійсній осі [1, с. 244]:

$$\vartheta(x)=-\vartheta(-x), \qquad \vartheta(x)=\vartheta(2-x),$$

$$\psi(x)=-\psi(-x), \qquad \psi(x)=\psi(2-x). \tag{11}$$

Тепер розв'яжемо рівняння (9) з нульовими початковими умовами та ненульовими крайовими умовами (7). Зрозуміло, що крайовий режим, описаний першим із рівнянь (7), викличе хвилю, яка поширюється уздовж струни вправо зі швидкістю $\overline{C}$, тобто

$$w_{\mathrm{bn}}^{(0)}(x,t)=f(x-\overline{C}t). \tag{12}$$

Функцію f визначимо із першої з крайових умов (7):

$$w_{\text{bn}}^{(0)}(0,t) = f(-\bar{C}t) = \eta(t),$$

звідки $f(z) = \eta(-z/\bar{C})$, отже,

$$w_{\text{bn}}^{(0)}(x,t) = \bar{\eta}\left(t - \frac{x}{\bar{C}}\right), \qquad \text{де} \qquad \bar{\eta}(t) = \begin{cases} \eta(t), & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \tag{13}$$

Щоб задовольнити другу з крайових умов (7), розв'язок подамо у вигляді

$$w_{\text{bn}}^{(0)}(x,t) = \bar{\eta}\left(t - \frac{x}{\bar{C}}\right) + \bar{\eta}\left(t - \frac{2}{\bar{C}} + \frac{x}{\bar{C}}\right). \tag{14}$$

Легко перевірити, що функція (14) задовольняє обидві крайові умови (7), а другий доданок описує відбиту від правого вільного кінця хвилю, що рухається вліво.

Продовжуючи цей процес дальше, за аналогією з результатами, наведеними в [5, с. 71], отримаємо розв'язок у вигляді ряду

$$w_{\text{bn}}^{(0)}(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\eta}\left(t - \frac{2n}{\bar{C}} - \frac{x}{\bar{C}}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\eta}\left(t - \frac{2n}{\bar{C}} + \frac{x}{\bar{C}}\right)$$

або

$$w_{\text{bn}}^{(0)}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\bar{\eta}\left(t - \frac{2n}{\bar{C}} + \frac{2-x}{\bar{C}}\right) + \bar{\eta}\left(t - \frac{2n}{\bar{C}} + \frac{x}{\bar{C}}\right)\right]. \tag{15}$$

Із другої формули (13) випливає, що для кожного значення t лише скінченна кількість членів ряду буде відмінною від нуля, оскільки з кожним новим відбиттям аргумент у формулі (15) зменшується на $2/\bar{C}$.

Отже, розв'язок змішаної задачі (9), (6), (7) для значень $x \in [0,1]$ запишемо таким чином:

$$w^{(0)}(x,t) = \frac{\bar{\vartheta}(x+\bar{C}t) + \bar{\vartheta}(x-\bar{C}t)}{2} + \frac{1}{2\bar{C}}\int_{x-\bar{C}t}^{x+\bar{C}t} \bar{\psi}(y)\,dy +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\bar{\eta}\left(t - \frac{2n}{\bar{C}} + \frac{2-x}{\bar{C}}\right) + \bar{\eta}\left(t - \frac{2n}{\bar{C}} + \frac{x}{\bar{C}}\right)\right). \tag{16}$$

З урахуванням (11) перепишемо розв'язок (16) у вигляді

$$w^{(0)}(x,t) = \frac{\vartheta(x+\bar{C}t) - \vartheta(\bar{C}t - x)}{2} + \frac{1}{2\bar{C}}\int_{\bar{C}t-x}^{x+\bar{C}t} \psi(y)\,dy +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\bar{\eta}\left(t - \frac{2n}{\bar{C}} + \frac{2-x}{\bar{C}}\right) + \bar{\eta}\left(t - \frac{2n}{\bar{C}} + \frac{x}{\bar{C}}\right)\right), \qquad x - \bar{C}t < 0, \tag{17}$$

$$w^{(0)}(x,t) = \frac{1}{2\bar{C}}\left(\bar{C}\big(\vartheta(x+\bar{C}t) + \vartheta(x-\bar{C}t)\big) + \int_{x-\bar{C}t}^{x+\bar{C}t} \psi(y)\,dy\right), \quad \begin{matrix} x - \bar{C}t > 0, \\ x + \bar{C}t < 1, \end{matrix} \tag{18}$$

$$w^{(0)}(x,t) = \frac{1}{2\bar{C}}\Bigg(\bar{C}\big(\vartheta(2-(x+\bar{C}t)) + \vartheta(x-\bar{C}t)\big) +$$
$$+ \int_{x-\bar{C}t}^{1} \psi(y)\,dy + \int_{2-(x+\bar{C}t)}^{1} \psi(y)\,dy\Bigg) +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\bar{\eta}\left(t - \frac{2n}{\bar{C}} + \frac{2-x}{\bar{C}}\right) + \bar{\eta}\left(t - \frac{2n}{\bar{C}} + \frac{x}{\bar{C}}\right)\right), \qquad x + \bar{C}t > 1. \tag{19}$$

На наступних ітераціях розв'язуємо неоднорідне хвильове рівняння (8) з початковими умовами (6) та крайовими (7). Очевидно, що розв'язок цієї задачі буде сумою відомого вже розв'язку (17)–(19) та розв'язку неоднорідного рівняння з нульовими початковими та крайовими умовами. Записавши різницю співвідношень (8) і (9), матимемо таку задачу для визначення уточнень розв'язку на вищих ітераціях:

$$\frac{\partial^2 u^{(k)}}{\partial t^2} = (1+\bar{g})\frac{\partial^2 u^{(k)}}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\tilde{g}(x)\frac{\partial w^{(k-1)}(x,t)}{\partial x}\right), \tag{20}$$

$$u^{(k)}(x,0) = 0, \qquad \frac{\partial u^{(k)}(x,0)}{\partial t} = 0\,, \tag{21}$$

$$u^{(k)}(0,t) = 0, \qquad \frac{\partial u^{(k)}(1,t)}{\partial x} = 0, \qquad t > 0\,, \tag{22}$$

де $u^{(k)}(x,t) = w^{(k)}(x,t) - w^{(0)}(x,t)$, $k = 1,2,3,\ldots$.

Виконання однорідних крайових умов (22) визначає для функції $f^{(k)}(x,t) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\tilde{g}(x)\dfrac{\partial w^{(k-1)}(x,t)}{\partial x}\right)$ такі аналітичні продовження на всій дійсній осі x [5, с. 77]:

$$f^{(k)}(x,t) = -f^{(k)}(-x,t), \qquad f^{(k)}(x,t) = f^{(k)}(2-x,t)\,. \tag{23}$$

Із використанням формули Даламбера та умов (23) розв'язок задачі (20)–(22) подамо у вигляді

$$u^{(k)}(x,t) =$$

$$= \frac{1}{2\bar{C}}\begin{cases} \displaystyle\int_0^t \int_{|x-\bar{C}(t-\tau)|}^{x+\bar{C}(t-\tau)} f^{(k)}(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau, & x+\bar{C}(t-\tau) < 1, \\ \displaystyle\int_0^t \left(\int_{x-\bar{C}(t-\tau)}^{1} f^{(k)}(\xi,\tau)\,d\xi + \int_{2-(x+\bar{C}(t-\tau))}^{1} f^{(k)}(\xi,\tau)\,d\xi \right) d\tau, & x+\bar{C}(t-\tau) > 1, \end{cases}$$

або

$$u^{(k)}(x,t) = \frac{1}{2\bar{C}}\begin{cases} \displaystyle\int_0^t u^{(k1)}(x,t,\tau)\,d\tau, & x+\bar{C}(t-\tau) < 1, \\ \displaystyle\int_0^t u^{(k2)}(x,t,\tau)\,d\tau, & x+\bar{C}(t-\tau) > 1, \end{cases} \tag{24}$$

де

$$u^{(k1)}(x,t,\tau) = F^{(k)}(\xi,\tau)\Big|_{\xi=x+\bar{C}(t-\tau)} - F^{(k)}(\xi,\tau)\Big|_{\xi=|x-\bar{C}(t-\tau)|},$$

$$u^{(k2)}(x,t,\tau) =$$

$$= 2\,F^{(k)}(\xi,\tau)\Big|_{\xi=1} - F^{(k)}(\xi,\tau)\Big|_{\xi=x-\bar{C}(t-\tau)} - F^{(k)}(\xi,\tau)\Big|_{\xi=2-(x+\bar{C}(t-\tau))} =$$

$$= -F^{(k)}(\xi,\tau)\Big|_{\xi=x-\bar{C}(t-\tau)} - F^{(k)}(\xi,\tau)\Big|_{\xi=2-(x+\bar{C}(t-\tau))}.$$

Тут $F^{(k)}(x,t) = \tilde{g}(x)\dfrac{\partial w^{(k-1)}(x,t)}{\partial x}$.

Із попереднього подання та формул (11) і (23) отримаємо співвідношення, що задають аналітичні продовження на всій дійсній осі x для функції $F^{(k)}(x,t)$:

$$F^{(k)}(x,t) = F^{(k)}(-x,t), \qquad F^{(k)}(x,t) = -F^{(k)}(2-x,t)\,. \tag{25}$$

Зокрема, аналітичне продовження $G(x)$ функції $g(x)$ передбачає такі подання за межами проміжку $[0,1]$:

$$G(x) = \begin{cases} g(-x), & x < 0, \\ g(x), & 0 < x < 1, \\ -g(2-x), & x > 1. \end{cases} \tag{26}$$

Із використанням подання розв'язку (24), аналітичних продовжень (11), (23), (25) і (26) на першій ітерації отримаємо таке уточнення:

$$u^{(1)}(x,t) = \frac{1}{4\bar{C}^2}\Bigg[\left(\int\limits_x^{x+\bar{C}t} G(y)\,dy - \bar{g}\bar{C}t\right)\left(\frac{1}{\bar{C}}\bar{\psi}(x+\bar{C}t) + \bar{\vartheta}'(x+\bar{C}t)\right) +$$

$$+\left(\int\limits_{x-\bar{C}t}^{x} G(y)\,dy - \bar{g}\bar{C}t\right)\left(\frac{1}{\bar{C}}\bar{\psi}(x-\bar{C}t) - \bar{\vartheta}'(x-\bar{C}t)\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{x-\bar{C}t}^{x+\bar{C}t}\left(G\left(y+\frac{1}{2}(x+\bar{C}t)\right) - G\left(y+\frac{1}{2}(x-\bar{C}t)\right)\right)\bar{\vartheta}'(y)\,dy -$$

$$-\frac{1}{2\bar{C}}\int\limits_{x-\bar{C}t}^{x+\bar{C}t}\left(G\left(y+\frac{1}{2}(x+\bar{C}t)\right) +\right.$$

$$\left. + G\left(y+\frac{1}{2}(x-\bar{C}t)\right) - 2\bar{g}\right)\bar{\psi}(y)\,dy\Bigg]. \tag{27}$$

Розв'язки на вищих ітераціях подаємо за аналогією із формулою (24).

Як приклад розглянемо поширення зондувального імпульсу в тілі, індукованого силами, що діють на лівому кінці. Тоді крайові умови (7) мають вигляд

$$\frac{\partial w(0,t)}{\partial x} = \nu(t), \qquad \frac{\partial w(1,t)}{\partial x} = 0, \qquad t > 0\,. \tag{28}$$

У цьому випадку задачу (5), (6), (28) можна звести до задачі (5)–(7), якщо врахувати зв'язок між функціями крайових умов $\eta(t)$ і $\nu(t)$ [5, с. 78]:

$$\nu(t) = \frac{1}{\bar{C}}\left(\psi(\bar{C}t) - (\eta'(t) - \bar{C}\vartheta'(\bar{C}t))\right). \tag{29}$$

Розв'язавши диференціальне рівняння (29), для $\eta(t)$ отримаємо

$$\eta(t) = \int\limits_0^t \left(\psi(\bar{C}\tau) - \bar{C}\nu(\tau)\right)d\tau + \vartheta(\bar{C}t). \tag{30}$$

Формула (30) задає вигляд функції крайового режиму (15) через відомі співвідношення для $\nu(t)$, $\vartheta(x)$ і $\psi(x)$. Виконання ж однорідних крайових умов другого роду $\partial w(0,t)/\partial x = 0$ передбачає продовження для функцій $\vartheta(x)$ і $\psi(x)$ для від'ємних значень

$$\vartheta(x) = \vartheta(-x), \qquad \psi(x) = \psi(-x). \tag{31}$$

Отже, врахування подання (30) та аналітичних продовжень (31) дає змогу записати розв'язок початково-крайової задачі запропонованим ітераційним методом у вигляді формул (16), (27) за умови, що на обох кінцях задано другу крайову умову.

У середовищі Mathcad проведено числовий експеримент запропонованого ітераційного алгоритму. Функції $g(x)$, що визначають неоднорідний розподіл напружень на шляху поширення збурення, вибирали у вигляді

$$g(x) = ax + b, \qquad g(x) = ax(1-x), \qquad g(x) = \frac{ax}{1+bx^2}\,.$$

Виконано порівняння результатів нульового, першого та другого ітераційних наближень. За умови, коли усереднене на шляху поширення збурення $\bar{g}$ значення функції $g(x)$ є порядку 10^{-2}, уточнення розв'язку на першій ітерації становило до 5%, а на другій не перевищувало 1%.

Побудовані розв'язки початково-крайової задачі поширення пружного збурення в неоднорідно деформованому тілі можна застосувати для формулювання прямих та обернених задач неруйнівного визначення початкових напружень із використанням даних акустичного зондування.

1. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. – Москва: Наука, 1981. – 512 с.
2. *Гузь А. Н.* Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями. – Киев: А. С. К., 2004. – 672 с.
3. *Гузь А. Н., Махорт Ф. Г., Гуща О. И.* Введение в акустоупругость. – Киев: Наук. думка, 1977. – 149 с.
4. *Кравчишин О. З., Чекурін В. Ф.* Про одну задачу Коші для системи рівнянь гіперболічного типу зі змінними коефіцієнтами // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. математики та інформатики. – 2003. – Вип. 6. – С. 64–67.
5. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. – Москва: Наука, 1966. – 724 с.
6. *Чекурін В. Ф., Кравчишин О. З.* Пружні збурення в неоднорідно деформованих твердих тілах. – Львів: СПОЛОМ, 2008. – 152 с.
7. *Gennisson J.-L., Rénier M., Catheline S., Barriure C., Bercoff J., Tanter M., Fink M.* Acoustoelasticity in soft solids: Assessment of the nonlinear shear modulus with the acoustic radiation force // J. Acoust. Soc. Amer. – 2007. – **122**, No. 6. – P. 3211–3219.
8. *Mi B., Michaels J. E., Michaels T. E.* An ultrasonic method for dynamic monitoring of fatigue crack initiation and growth // J. Acoust. Soc. Amer. – 2006. – **119**, No. 1. – P. 74–85.

ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ УПРУГОГО ВОЗМУЩЕНИЯ В НЕОДНОРОДНО ДЕФОРМИРОВАННОМ ТЕЛЕ

Предложен итерационный метод решения начально-краевой задачи для уравнения гиперболического типа, которая моделирует зондирование неоднородно деформированного тела ограниченных размеров упругим возмущением.

ITERATIVE METHOD OF SOLUTION FOR INITIALLY BOUNDARY-VALUE PROBLEM ON PROPAGATION OF ELASTIC DISTURBANCE IN INHOMOGENEOUSLY STRAINED BODY

The iterative method for solving a boundary-value problem for hyperbolic-type equations has been considered. The problem models propagation of elastic disturbance in an inhomogeneously strained body.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
09.12.08