

## ГЕНЕРАЦИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН ДОННЫМ ПОВТОРЯЮЩИМСЯ ВО ВРЕМЕНИ ИМПУЛЬСОМ

*Исследуется отклонение свободной поверхности, генерируемое двумя повторными возбуждениями донной поверхности, в рамках модели жидкости конечной глубины. Жидкость предполагается несжимаемой и невязкой, что позволяет рассматривать задачу в потенциальной постановке. Задача решается на основе интегрального преобразования Ханкеля по радиальной координате и интегрального преобразования Лапласа по времени с последующим численным обращением. Представлены и анализируются численные результаты для осесимметричного возмущения горизонтальной донной поверхности (подводное землетрясение). Показано появление волн с возрастающей амплитудой при определенных величинах временной задержки и увеличения нарастания скорости импульса. Показано также, что увеличение остроты импульса (нарастания импульса во времени) будет вызывать увеличение амплитуды.*

**1. Введение.** Распространение неустановившихся волновых движений представляет собой значительно более сложную проблему, чем распространение регулярных волн. Известные методы решения задач генерации волн подвижками донной поверхности позволяют получить решение только для простейших форм отклонения и мгновенной подвижки дна. В более общем случае решение может быть получено с помощью теории интегральных преобразований.

Рассматриваемая задача представляет особый интерес для проблемы цунами [17]. Из наблюдений цунами в Тихом океане 28 марта 1964 г. показано, что длина волны может превышать глубину в пять раз [20] и, следовательно, явление может описываться теорией волн мелкой воды. Отметим также цунами в Индийском океане в декабре 2004 г. [12]. Проблема цунами рассматривалась также в работах [3, 8, 14, 19].

В данном сообщении рассматривается задача генерации волн на воде в жидкости конечной глубины двумя донными возбуждениями, которые следуют одно за другим, когда одно возбуждение включается в начальный момент времени  $t = 0$ , а через некоторое время включается второе возбуждение при  $t = t_d$ . Задача решается в линейной постановке и поэтому применим принцип суперпозиции решений. Это соответствует генерации волн цунами от подводного землетрясения при повторных толчках. Здесь рассматривается задача, когда после первого основного толчка через некоторое время следует еще один, который может отличаться как силой, так и временем задержки и быстротой нарастания и спада. Рассматривается случай одинаковых импульсов. Предполагается, что в начальный момент времени  $t = 0$  задается скорость локализованного подъема донной поверхности с амплитудой  $\eta^b(r, t)$ , нарастающая во времени до максимальной величины, а затем экспоненциально спадающая. В следующий момент времени  $t_1 > t$  включается аналогичное возбуждение. Функция возбуждения дна  $\psi_2(r)$  определена в бесконечной области  $r > 0$  как  $\psi_2(r) = \xi(\xi^2 + r^2)^{-3/2}$ ,  $\xi > 0$ . Эта функция асимптотически убывает с увеличением радиальной координаты  $r$  и при решении задачи можно применить интегральное преобразование Ханкеля по  $r$ .

Численное обращение преобразования Лапласа может проводиться различными методами [11, 13, 18]. В [13] рассмотрены методы, основанные на обращении с помощью полиномов Лежандра и Чебышева, рядов Фурье,

функций Лагерра. В [4] анализируются алгоритмы численного обращения, которое вообще представляет собой обратную задачу, относящуюся к некорректным задачам математической физики. В данном случае задача восстановления оригинала  $f(t)$  требует привлечения подходов, чувствительных даже к незначительным вариациям изображения  $F(p)$  [2]. В работе [16] исследуется алгоритм обращения с применением разложения по смещенным полиномам Лежандра [5, 7, 10, 13], рядов Фурье – по синусам [11, 15] и разложений по экспоненциальным функциям [16]. Представлены результаты тестовых расчетов и сопоставление с точными (табличными) обращениями и некоторыми точными решениями. Расчеты проводились с удержанием различного числа членов (5, 6, ..., 10) и показано достаточное число членов для получения надлежащей точности. Численное обращение на основе разложений Фурье – Бесселя представлено в [6].

Здесь для вычисления оригинала применяется метод [15], согласно которому требуются только значения изображения  $F(s)$  при равностоящих значениях  $s = (2n + 1)\sigma$ , где  $\sigma$  – произвольное число, большее нуля,  $\sigma > 0$ , а  $n = 0, 1, \dots$ . Переменная  $t$  заменяется на  $\theta$  и функция  $\varphi(\theta)$  под интегралом разлагается в ряд Фурье по функциям  $\sin(2\nu + 1)\theta$ . Параметр  $\sigma$  при малых  $t$  выбирается большим, а при больших  $t$  – меньшим.

В данном сообщении приведена постановка задачи для двух повторяющихся локализованных подъемов донной поверхности, которые нарастают по времени до некоторого максимума, а потом спадают по экспоненциальному закону. Для решения задачи применяются интегральные преобразования Ханкеля по радиальной координате и Лапласа по времени. Получено решение в пространстве изображений. Обращение преобразования Ханкеля представлено в виде интеграла, а последующий переход преобразования Лапласа к оригиналам осуществляется численным обращением. Результаты численных расчетов обнаруживают увеличение отклонения свободной поверхности при воздействии повторного импульса.

**2. Постановка задачи.** Рассматриваем в цилиндрической системе координат  $(r, \theta, z)$  область  $D$ , заполненную невязкой несжимаемой жидкостью плотности  $\rho$ . Предполагаем, что жидкость ограничена сверху свободной поверхностью  $z = 0$  и донной поверхностью  $z = -H_0$ , в начальный момент времени  $t = 0$  жидкость покоится и находится под действием гравитационных сил, направленных в отрицательном направлении оси  $Oz$ . Предполагаем также, что начальное возмущение генерируется подъемом горизонтального дна при  $t = 0$ , а при  $t = t_d$  происходит повторное возмущение дна. Представляет интерес исследовать, как эволюционирует свободная поверхность при действии такого типа возмущения.

Движение предполагаем безвихревым, что позволяет ввести потенциал скоростей  $\varphi$ , определяемый по формуле  $\mathbf{v} = \nabla\varphi$ , где  $\mathbf{v}$  – вектор скорости,  $\nabla$  – оператор градиента. Это вместе с условием несжимаемости приводит к уравнению Лапласа для потенциала  $\varphi$ . Для решения начально-краевой задачи необходимо также, чтобы при любом  $t$  величина  $\mathbf{v}$  исчезала на бесконечности. Из уравнения Бернулли следуют кинематическое условие на свободной поверхности (поверхность должна быть материальной) и динамическое условие – давление на свободной поверхности постоянное.

Запишем постановку задачи для первого импульса, включаемого в момент времени  $t = 0$  [17]. Математическая постановка соответствующей осесимметричной начально-краевой задачи сводится к определению потенциала скоростей  $\varphi(r, z, t)$  как решения уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \quad -H_0 \leq z \leq 0, \quad r > 0, \quad t > 0, \quad (1)$$

удовлетворяющего условиям на свободной поверхности  $z = 0$  и на донной поверхности  $z = -H_0$ :

$$\left( \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} = 0, \quad \eta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{z=0},$$

$$\frac{\partial \varphi(r, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=-H_0} = \frac{\partial \eta^b(r, t)}{\partial t} \quad (2)$$

и начальным условиям

$$\varphi(r, z, t) \Big|_{t=0} = \frac{\partial \varphi(r, z, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \eta^b(r, t) \Big|_{t=0} = 0, \quad (3)$$

где  $\eta$  – отклонение свободной поверхности,  $\eta^b$  – отклонение донной поверхности:  $\eta^b(r, t) = \eta_0 \psi(r) f(t)$ ;  $g$  – ускорение силы тяжести. При  $t = 0$  включается одно возмущение, а при  $t = t_d$  – другое, так что функции  $\eta_1^b$  и  $\eta_2^b$  задаются в виде

$$\eta_1^b = \eta_0 \psi(r) f(t), \quad \eta_2^b = \eta_0^d \psi^d(r) f^d(t). \quad (4)$$

В дальнейшем вводим безразмерные величины по формулам (далее звездочки опущены)

$$r^* = \frac{r}{r_0}, \quad r_0^* = 1, \quad z^* = \frac{z}{H_0}, \quad t^* = t \frac{c_{sh}}{r_0},$$

$$\eta^* = \frac{\eta}{H_0}, \quad \varphi^* = \frac{\varphi}{r_0 c_{sh}}, \quad \beta = \frac{r_0}{H_0}, \quad (5)$$

где  $r_0$  – радиус возмущения отклонения дна (характерная величина);  $c_{sh}$  – скорость волн на мелкой воде (предельное значение длинноволнового приближения),  $c_{sh} = \sqrt{gH_0}$ .

Постановка задачи (1)–(3) в безразмерной форме в соответствии с (5) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r^*} + \beta^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^{*2}} = 0, \quad -1 \leq z^* \leq 0, \quad r > 0, \quad t > 0, \quad (6)$$

$$\left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^{*2}} + \beta^2 \frac{\partial \varphi}{\partial z^*} \right) \Big|_{z^*=0} = 0, \quad \eta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{z^*=0}, \quad \beta^2 \frac{\partial \varphi}{\partial z^*} \Big|_{z^*=-1} = \frac{\partial \eta^b}{\partial t}. \quad (7)$$

Начальные условия (3) в безразмерной форме в соответствии с (5) остаются без изменения.

**3. Построение и анализ решения.** Для решения задачи применяем интегральное преобразование Лапласа по времени  $t$  [9]

$$\varphi^L(r, z, s) = \int_0^\infty \varphi(r, z, t) e^{-st} dt, \quad (8)$$

где  $s$  – параметр преобразования Лапласа.

После применения (8) к (1), (2) с учетом начальных условий (3) получаем постановку задачи в пространстве изображений Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi^L}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi^L}{\partial r^*} + \beta^2 \frac{\partial^2 \varphi^L}{\partial z^{*2}} = 0, \quad -1 \leq z^* \leq 0, \quad r > 0, \quad (9)$$

$$\left( s^2 \varphi^L + \beta^2 \frac{\partial \varphi^L}{\partial z^*} \right) \Big|_{z^*=0} = 0, \quad \beta^2 \frac{\partial \varphi^L}{\partial z^*} \Big|_{z^*=-1} = s \eta_0 \psi^d(r) f^{dL}(s). \quad (10)$$

Применяем интегральное преобразование Ханкеля по радиальной координате  $r$ :

$$\varphi^{\text{LH}}(k, z, s) = \int_0^{\infty} \varphi^{\text{L}}(k, z, s) r J_0(kr) dr, \quad (11)$$

где  $k$  – параметр преобразования Ханкеля.

После применения преобразование (11) к задаче (9), (10) получаем в пространстве изображений Лапласа и Ханкеля следующую задачу:

$$\frac{d^2 \varphi^{\text{LH}}}{dz^2} - \left(\frac{k}{\beta}\right)^2 \varphi^{\text{LH}} = 0, \quad -1 \leq z \leq 0, \quad (12)$$

$$\left( s^2 \varphi^{\text{LH}} + \beta^2 \frac{d\varphi^{\text{LH}}}{dz} \right) \Big|_{z=0} = 0,$$

$$\beta^2 \frac{d\varphi^{\text{LH}}}{dz} \Big|_{z=-1} = s \eta_0 \psi^{\text{dH}}(k) f^{\text{dL}}(s). \quad (13)$$

Из решения задачи (12), (13) получаем выражение для потенциала скоростей

$$\begin{aligned} \varphi^{\text{LH}}(k, z, s) = \\ = -\frac{1}{2} \frac{s}{\beta k} \eta_0 \psi^{\text{dH}}(k) f^{\text{dL}}(s) \cdot \frac{(s^2 + \beta k) e^{-\frac{k}{\beta} z} - (s^2 - \beta k) e^{\frac{k}{\beta} z}}{s^2 \text{ch} \frac{k}{\beta} - \beta k \text{sh} \frac{k}{\beta}}. \end{aligned} \quad (14)$$

Предполагаем, что возмущение генерируется одинаковым осесимметричным подъемом горизонтального дна [17]

$$\psi(r) = \psi^{\text{d}}(r) = \xi(\xi^2 + r^2)^{-3/2}, \quad \xi > 0,$$

и последовательно включаются два возмущения  $f_n(t)$ ,  $n = 1, 2$ :

$$f_1(t) = f(t) = t e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0,$$

$$f_2(t) = f^{\text{d}}(t) = t e^{-\alpha t} H(t - t_d), \quad t \geq t_d,$$

где  $H(t)$  – функция Хевисайда.

Выражение для отклонения свободной поверхности после обращения преобразования Ханкеля (11) в пространстве изображений Лапласа имеет вид

$$\eta_n^{\text{L}} = s^2 \eta_0 f_n^{\text{L}}(s) \int_0^{\infty} \frac{e^{-\xi \lambda} \lambda J_0(\lambda k r)}{s^2 \text{ch} \lambda + \lambda \text{sh} \lambda} d\lambda, \quad (15)$$

где [1]

$$f_1^{\text{L}} = \frac{1}{(s + \alpha)^2}, \quad f_2^{\text{L}} = \frac{1}{(s + \alpha)^2} \Gamma(2, t_d(s + \alpha)),$$

$\Gamma(x)$  – неполная гамма-функция.

Переход в пространство оригиналов  $\eta_n$  по формуле (15) осуществляется численным обращением преобразования Лапласа на основе рядов Фурье по синусам [11, 16] при следующих параметрах:  $\alpha = 2.5$ ,  $\xi = 0.5, 1.0$ . Как видно из (15), для перехода от преобразования Лапласа к оригиналам необходимо вычислять интеграл в (15), варьируя параметр преобразования Лапласа  $s$  с соответствующим подбором корректирующего параметра  $\sigma$ , входящего в алгоритм обращения.

Исследовалось отклонение свободной поверхности  $\eta/\eta_0$  для различных удалений от эпицентра  $r = 0$ . На рис. 1, 2 показаны кривые, соответствующие величинам удаления от эпицентра  $r = 0, 1, 2, 3, 4$ . На рис. 1 показаны величины  $\eta/\eta_0$ , соответствующие включению только первого возмущения в момент времени  $t = 0$ . На рис. 2 представлены величины  $\eta/\eta_0$ , когда, кроме первого возмущения, включается второе возмущение при  $t = 2$ . Из сравнения рис. 1 и рис. 2 можно установить, что в случае включения второго возмущения амплитуды отклонения свободной поверхности  $\eta/\eta_0$  возрастают: в эпицентре  $r = 0$  и на некотором удалении  $r = 1$  примерно на 20%, при удалении от эпицентра на два радиуса  $r = 2$  – примерно на 30%.

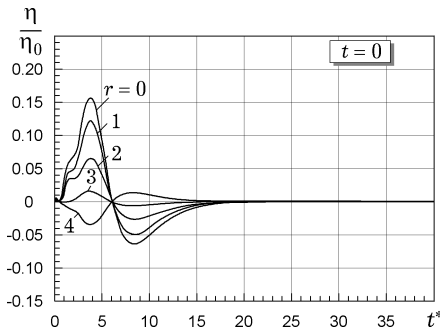


Рис. 1

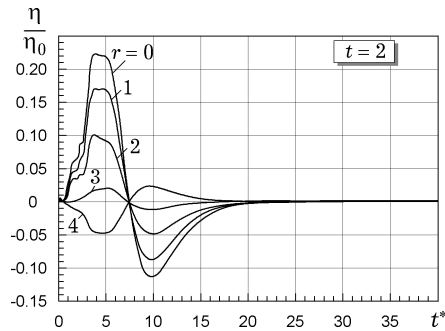


Рис. 2

1. Диткин В. А., Прудников А. П. Справочник по операционному исчислению. – Москва: Высш. шк., 1965. – 468 с.
2. Крылов В. И., Скобля Н. С. Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа. – Москва: Наука, 1974. – 224 с.
3. Пелиновский Е. Н. Гидродинамика волн цунами. – Нижний Новгород: Ин-т прикл. физики РАН, 1996. – 276 с.
4. Селезов И. Т. Исследование неустановившихся волновых движений в гидроупругих системах оболочка – жидкость // Прикл. проблемы механики тонкостенных конструкций. – Москва: Изд-во Моск. ун-та. – 2000. – С. 286–305.
5. Селезов И. Т. Моделирование волновых и дифракционных процессов в сплошных средах. – Киев: Наук. думка, 1989. – 204 с.
6. Селезов И. Т., Корсунский С. В. Численное обращение преобразования Лапласа на основе разложений Фурье – Бесселя // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1986. – № 11. – С. 25–28.
7. Селезов И. Т., Никулинская С. Н. Распространение малых возмущений в жидкости, протекающей в упругой цилиндрической оболочке // Изв. АН СССР. Механика. – 1965. – № 1. – С. 173–175.
8. Селезов И. Т., Островерх Б. Н. Моделирование сейсмических подводных очагов генерирования и трансформации волн цунами в сейсмоактивных районах // Морской гидрофиз. журн. – 1996. – № 1. – С. 66–77.  
То же: Selezov I. T., Ostroverkh B. N. Modelling of underwater seismic centers and the generation and transformation of tsunami waves in seismic areas // J. Phys. Oceanography. – 1997. – 8, No. 1. – P. 57–68.
9. Селезов И. Т., Сидорчук В. Н., Яковлев В. В. Трансформация волн в прибрежной зоне шельфа. – Киев: Наук. думка, 1982. – 208 с.
10. Селезов И. Т., Сорокина В. В., Цыганов Н. К., Яковлев В. В. Динамика незамкнутой сферической оболочки при импульсном возбуждении // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1978. – № 2. – С. 145–149.
11. Doetsch G. Anleitung zum Praktischen Gebrauch der Laplace-transformation und der Z-transformation. – München–Wien: R. Oldenburg, 1967.  
То же: Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. – Москва: Наука, 1971. – 288 с.
12. Geist E. L., Titov V. V., Synolakis C. E. Tsunami: Wave of change // Scientific Amer. – December, 2005.

13. *Lanczos C.* Applied analysis. – Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1956.  
То же: *Ланцош К.* Практические методы прикладного анализа. – Москва: Физматгиз, 1981. – 524 с.
14. *Murty T. S.* Seismic sea waves tsunami. – Fisheries Research Board of Canada. Bulletin 198. – Catalogue Number: FS94-198, 1977.  
То же: *Мурти Т. С.* Сейсмические морские волны цунами. – Ленинград: Гидрометеоиздат, 1981. – 448с.
15. *Papoulis A.* A new method of inversion of the Laplace transform // Quart. Appl. Math. – 1957. – **14**. – P. 405–414.
16. *Schaperly R. A.* Approximate methods of transform inversion for viscoelastic stress analysis // Proc. 4<sup>th</sup> U.S. Nat. Congr. Appl. Mech. – 1962. – P. 1075–1085.
17. *Selezov I. T.* Modeling of tsunami wave generation and propagation // Int. J. Fluid Mech. Research. – 2006. – **33**, No. 1. – P. 44–54.
18. *Selezov I. T.* Numerical Laplace transform inversion for solving initial boundary value problems in mechanics // Book of Abstracts: 3<sup>rd</sup> Int. Congress on Industr. and Appl. Mathematics (ICIAM 95), Germany, Hamburg, 3–7 July 1995. – P. 435.
19. *Selezov I. T., Zheleznyak M. I., Tkachenko V. A., Yakovlev V. V.* On the numerical modeling of tsunami wave generation and propagation // Marine Geodesy. – 1983. – **6**, No. 2. – P. 149–165.
20. *Weyl P. K.* Oceanography. An introduction to the marine environment. – New York: John Wiley and Sons, Inc., 1970.  
То же: *Вейль П.* Популярная океанография. – Ленинград: Гидрометеоиздат, 1977. – 504 с.

#### ГЕНЕРАЦІЯ ПОВЕРХНЕВИХ ГРАВІТАЦІЙНИХ ХВИЛЬ ДОННИМ ІМПУЛЬСОМ, ЩО ПОВТОРЮЄТЬСЯ В ЧАСІ

*Досліджується відхилення вільної поверхні, яке генерується двома повторними збудженнями донної поверхні в рамках моделі рідини скінченної глибини. Рідина припускається нестисливою і нев'язкою, що дозволяє розглядати задачу в потенціальному постановці. Задача розв'язується на основі інтегрального перетворення Ганкеля за радіальною координатою та інтегрального перетворення Лапласа за часом з наступним чисельним оберненням. Наведено та аналізуються чисельні результати для осесиметричного збудження горизонтальної донної поверхні (підводний землетрус). Показано появу хвиль зі зростаючою амплітудою при певних величинах часової затримки і збільшення наростання швидкості імпульсу. Показано також, що збільшення гостроти імпульсу (зростання імпульсу за часом) буде викликати збільшення амплітуди.*

#### GENERATION OF SURFACE GRAVITY WAVES BY BOTTOM TIME-REPETITIVE PULSES

*A free surface elevation generated by two repetitive excitations of a bottom surface is investigated in fluid of finite depth. The fluid is assumed to be incompressible and inviscid that allows to consider the problem in potential statement. The problem is solved on the basis of the Hankel integral transform in a radial coordinate and the Laplace integral time transform accompanied by numerical inversion. Numerical results for axisymmetric horizontal bottom disturbance (underwater earthquake) are presented and analyzed. The appearance of waves with increasing amplitudes for certain values of time delay and increase of pulse rate is shown. It is shown also that increase of pulse sharpness (growing pulse rate in time) will cause the increase of amplitude.*

<sup>1</sup> Ін-т гидромеханики НАН України, Киев,

Получено

<sup>2</sup> Днепропетр. нац. ун-т ж.-д. транспорта, Днепропетровск

27.01.09