УДК 539.3

М. С. Черняк

ВЗАЄМОДІЯ ТРІЩИНИ З ЦИЛІНДРИЧНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ ПРИ НАГРІВІ ТА РОЗТЯЗІ ТІЛА

Розглянуто плоску деформацію безмежного тіла з циліндричним включенням з відмінними від материалу тіла механічними та теплофізичними характеристиками при заданих далеко від включення однорідного теплового потоку та розтягувальних зусиль. Знайдено коефіцієнти інтенсивності напружень в околі тріщини, розміщеної на продовженні діаметра включення, шляхом розв'язання сингулярного інтегрального рівняння методом механічних квадратур. Досліджено, при якому співвідношенні довжини тріщини та її відстані до включення у розрахунках можна знехтувати регулярним ядром інтегрального рівняння. У цьому випадку одержано аналітичні формули для визначення коефіцієнтів інтенсивності напружень.

Дослідження напруженого стану багатокомпонентних середовищ необхідне при проектуванні елементів конструкцій із нових композитних матеріалів. Міцність і характер руйнування цих матеріалів поряд з такими факторами, як геометричні розміри, характер навантаження і т.п., суттєво залежать від фізико-механічних характеристик їх складових. Багато елементів сучасних конструкцій та інженерних споруд працюють в умовах нерівномірного нагріву, тому при оцінці їх міцності необхідно враховувати температурні напруження. Наявність у тілі концентраторів типу включень і тріщин зумовлює виникнення розтягувальних або стискувальних напружень. У першому випадку ці напруження разом з іншими факторами можуть призвести до росту тріщини, а в другому – можуть знизити інтенсивність напружень в околі тріщини при силовому навантаженні і створити умови гальмування її росту.

Розподіл температури та напружень у тілі з включеннями залежить від багатьох факторів, зокрема від механічних і теплофізичних характеристик матеріалів включень і матриці. Якщо включення розташовані близько одне від одного, температурні поля і напруження взаємодіють, внаслідок чого виникають труднощі при аналізі напруженого стану. Ці труднощі ще збільшуються через велику кількість параметрів, які необхідно враховувати при розрахунках: модулі пружності, коефіцієнти Пуассона, теплопровідності та лінійного температурного розширення матеріалів, геометричні характеристики включень.

Задача про збурення теплового потоку в однорідному середовищі включенням з іншою теплопровідністю є важливою у техніці та геофізиці. Розв'язки для циліндричних і кульових включень можна використовувати для оцінки зміни геотермічного ґрадієнта, що є важливим при термічних методах розвідки в геофізиці. Крім цього, точний розв'язок для одиничного включення можна використати статистично при розрахунках теплопровідності та термопружності гранульованих матеріалів з далеко розташованими один від одного включеннями.

Задача про напружений стан площини з циліндричним включенням і тріщиною при дії однорідного теплового потоку розглядалась у праці [13], а при розтязі – у статті [14]. Там сингулярне інтегральне рівняння зводили до інтегрального рівняння Фредгольма II роду, яке для деяких значень модулів зсуву розв'язували чисельно.

Дослідженню стаціонарного термопружного стану кусково-однорідних тіл з тріщинами присвячено низку публікацій. При цьому з використанням інтегральних подань функцій комплексної змінної задачі зводились до сингулярних інтегральних рівнянь з ядром Коші та регулярним ядром, у якому враховано взаємодію тріщини з включенням. Сингулярні інтегральні рівняння записували по замкнутих (межі включень) та розімкнутих (тріщини) контурах [2–7, 10–12] і розв'язували методом механічних квадратур для круглого або еліптичного циліндричного включення і прямолінійної тріщини при певних значеннях механічних і теплофізичних характеристик.

Мета роботи – визначити коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН) в околі прямолінійної тріщини, розташованої поза круглим циліндричним включенням, у точній та наближеній постановці (якщо знехтувати регулярним ядром інтегрального рівняння) і виявити, при якій віддалі тріщини від включення це ядро мало впливає на КІН, який буде залежати тоді тільки від напруженого стану тіла без тріщини.

Напружений стан тіла з включенням. Нехай у безмежному тілі, що перебуває в умовах плоскої деформації, розміщене циліндричне включення радіуса R з відмінними від основного матеріалу теплофізичними та механічними характеристиками. Визначимо термопружний стан тіла, коли на безмежності задано однорідний тепловий потік q та однорідні розтягувальні зусилля p (рис. 1). Всі характеристики, що відносяться до тіла та включення, позначаємо відповідно індексами «1» та «2». Вважаємо, що між включенням і матрицею виконуються умови ідеального теплового та механічного контакту.

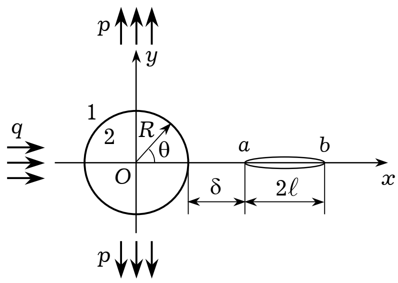

Рис. 1

Виберемо декартову (x, y) та циліндричну (r, θ) системи координат з початком у центрі включення. Нехай далеко від включення задано температурне поле $t_\infty(x) = t_0 + qx$, де t_0 – стала температура, а q – тепловий потік, спрямований уздовж осі Ox. Для визначення збуреного включенням температурного поля подамо температуру зовні та всередині циліндра у вигляді

$$t_1 = t_0 + qr\cos\theta + \frac{N}{r}\cos\theta, \qquad t_2 = t_0 + Mr\cos\theta, \tag{1}$$

де N і M – невідомі коефіцієнти. Після підстановки виразів (1) в умови ідеального теплового контакту

$$t_1 = t_2, \qquad \lambda_1 \frac{\partial t_1}{\partial r} = \lambda_2 \frac{\partial t_2}{\partial r} \qquad \text{при} \qquad r = R$$

знайдемо коефіцієнти N і M. Тоді

$$t_1 = t_0 + \left(qr + \tilde{\lambda}\frac{R^2}{r}\right)\cos\theta, \qquad t_2 = t_0 + \lambda^* r\cos\theta, \tag{2}$$

де $\lambda^* = \dfrac{2\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$, $\tilde{\lambda} = \dfrac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$.

Зумовлені температурним полем (2) напруження при ідеальному тепловому і механічному контакті виражаються формулами [13]

$$\sigma^1_{\rho\rho} = \frac{K_0}{\rho^2} + \left[K_1(\rho^2 - 1) + K_2\right]\frac{\cos\theta}{\rho^3}, \qquad \sigma^2_{\rho\rho} = K_0 + K_2\rho\cos\theta,$$

$$\sigma^1_{\theta\theta} = -\frac{K_0}{\rho^2} + \left[K_1(\rho^2 + 1) - K_2\right]\frac{\cos\theta}{\rho^3}, \qquad \sigma^2_{\theta\theta} = K_0 + 3K_2\rho\cos\theta,$$

$$\sigma^1_{\rho\theta} = -\left[K_1(\rho^2 - 1) + K_2\right]\frac{\sin\theta}{\rho^3}, \qquad \sigma^2_{\rho\theta} = -K_2\rho\sin\theta,$$

де $\rho = \dfrac{r}{R}$; $K_0 = \dfrac{(m_2 - \Gamma m_1)t_0}{2\Gamma + æ_2 - 1}$; $K_1 = -\dfrac{m_1 qR}{\lambda_1(æ_1 + 1)}$; $K_2 = \dfrac{(\Gamma m_1 - m_2)qR}{2\lambda_1(\Gamma + æ_2)}$; $m_i =$

$= 2\alpha_i E_i$; $\Gamma = \dfrac{G_2}{G_1}$; $G_i = \dfrac{E_i}{2(1+\nu_i)}$; E_i − модулі пружності; $æ_i = 3 - 4\nu_i$; ν_i − коефіцієнти Пуассона; α_i − коефіцієнти лінійного температурного розширення матеріалів.

Нормальні напруження в матриці на осі Ox виражаються формулою

$$\sigma_{yy}^1(x,0) = \frac{K_0}{x^2} + \frac{K_1}{x} - \frac{K_2 - K_1}{x^3}. \tag{3}$$

Змінюючи значення коефіцієнтів K_i, можна отримати формули для отвору ($\Gamma = 0$) та абсолютно жорсткого включення ($\Gamma = \infty$). Якщо механічні характеристики включення і матриці однакові, а відмінні тільки теплофізичні, то такі включення назвемо термічними [8]. Для них $\Gamma = 1$, $m_2 - m_1 = 2E(\alpha_2 - \alpha_1)$, $K_0 = \dfrac{2E(\alpha_2 - \alpha_1)t_0}{1+æ}$. Тоді перший доданок у формулі (3) є додатним (від'ємним), якщо $\alpha_2 - \alpha_1 > 0$ ($\alpha_2 - \alpha_1 < 0$), тобто при рівномірному нагріві тіла з включенням напруження $\sigma_{yy}(x)$ є додатними (від'ємними), коли коефіцієнт лінійного температурного розширення включення є більшим (меншим), ніж у матриці.

Напруження від одновісного розтягу зусиллями p на безмежності, спрямованими вздовж осі Oy, мають вигляд [1]:

$$\sigma_{\rho\rho}^1 = \frac{p}{2}\left[1 - \frac{\gamma_1}{\rho^2} - \left(1 - \frac{2\beta_1}{\rho^2} - \frac{3\delta_1}{\rho^4}\right)\cos 2\theta\right], \qquad \sigma_{\rho\rho}^2 = \frac{p}{2}\left[\beta_2 - \delta_2\cos 2\theta\right],$$

$$\sigma_{\theta\theta}^1 = \frac{p}{2}\left[1 + \frac{\gamma_1}{\rho^2} + \left(1 - \frac{3\delta_1}{\rho^4}\right)\cos 2\theta\right], \qquad \sigma_{\theta\theta}^2 = \frac{p}{2}\left[\beta_2 + \delta_2\cos 2\theta\right],$$

$$\sigma_{\rho\theta}^1 = -\frac{p}{2}\left(1 + \frac{\beta_1}{\rho^2} + \frac{3\delta_1}{\rho^4}\right)\sin 2\theta, \qquad \sigma_{\rho\theta}^2 = -\frac{p}{2}\delta_2 \sin 2\theta, \tag{4}$$

де $\beta_1 = -\dfrac{2(\Gamma - 1)}{1 + \Gamma æ_1}$, $\beta_2 = \dfrac{\Gamma(æ_1 + 1)}{2\Gamma + æ_2 - 1}$, $\delta_1 = \dfrac{\Gamma - 1}{1 + \Gamma æ_1}$,

$\delta_2 = \dfrac{\Gamma(æ_1 + 1)}{1 + \Gamma æ_1}$, $\gamma_1 = \dfrac{æ_2 - 1 - \Gamma(æ_1 - 1)}{2\Gamma + æ_2 - 1}$.

Напруження $\sigma_{yy}(x,0) = \sigma_{\theta\theta}(\rho,0)$ у матриці та включенні при $æ_1 = æ_2 = 2$ виражаються формулами

$$\sigma_{yy}^1(x,0) = \frac{p}{2}\left[2 - \frac{\Gamma - 1}{2\Gamma + 1}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^4}\right)\right], \qquad \sigma_{yy}^2 = p\,\frac{3\Gamma}{2\Gamma + 1}.$$

На рис. 2 наведено графіки напружень $\tilde{\sigma}_{yy} = \dfrac{\sigma_{yy}(x,0)}{p}$ для значень $\Gamma = 0$, 1/3, 3, ∞. У включенні напруження є сталими, а поза ним концентрація напружень є максимальною для отвору.

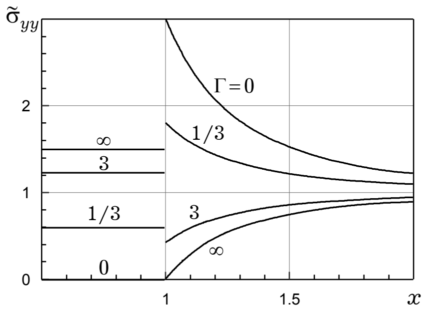

Рис. 2

Користуючись формулами (4), можна одержати розподіл напружень у розтягнутому шарі з включенням, радіус якого малий порівняно з товщиною шару. При товщині шару, що дорівнює чотирьом діаметрам включення, похибка формул (4) при $\Gamma = 0$ (отвір) не перевищує 5%. Для інших значень Γ похибка буде меншою.

Напружений стан в околі тріщини. Нехай в матриці на осі Ox розташована вільна від навантаження тунельна тріщина довжини 2ℓ на відрізку $a \le x \le b$. Тоді для визначення похідної від стрибка нормальних переміщень $v(x)$ берегів тріщини, через які визначається КІН, маємо сингулярне інтегральне рівняння [13, 14]

$$\int_a^b \frac{g'(\xi)\,d\xi}{\xi - x} - \int_a^b g'(\xi) H(\xi, x)\,d\xi = \frac{\sigma_{yy}(x,0)}{D}, \tag{5}$$

де $g'(x) = \dfrac{\partial}{\partial x}[v^+ - v^-]$, $D = \dfrac{2G_1}{\pi(æ_1 + 1)R}$, σ_{yy} – нормальні напруження на місці розташування тріщини. Ці напруження, зумовлені температурним полем, мають вигляд (3), а від одновісного розтягу зусиллями p на безмежності –

$$\sigma^1_{yy}(x,0) = p\left[1 + \frac{\gamma_1}{2x^2} - \frac{3\delta_1}{2x^4}\right]. \tag{6}$$

Ядро рівняння (5) запишемо у вигляді

$$H(\xi, x) = -\frac{(A+B)R}{2\omega} + \frac{A(1-\beta^2)R^2}{\beta\omega^2} + \frac{A(1-\beta^2)^2 R^3}{\beta^4\omega^3} + \frac{(A+B)R}{2x} +$$
$$+ \frac{[A(2\beta^2 - 1) + C(æ_2 + 1) - 1]R^2}{2\beta x^2} + \frac{AR^3}{x^3}. \tag{7}$$

Тут

$$A = \frac{1-\Gamma}{1+\Gamma æ_1}, \qquad B = \frac{æ_2 - \Gamma æ_1}{æ_2 + \Gamma}, \qquad C = \frac{\Gamma(æ_1 + 1)}{(æ_2 + \Gamma)(æ_2 - 1 + 2\Gamma)},$$
$$\omega = x - \frac{R^2}{\xi}, \qquad \beta = \frac{\xi}{R}.$$

Ядро $H(\xi, x)$ для отвору отримуємо з (7) при $A = 1$, $B = 1$, $C = 0$, а для абсолютно жорсткого включення – при $A = -\dfrac{1}{æ_1}$, $B = -æ_1$, $C = 0$.

Після розв'язання інтегрального рівняння (5) коефіцієнти інтенсивності нормальних напружень $K_1^{\pm}$ визначаємо за формулою [9]

$$K_1^{\pm} = \mp \lim_{x \to \pm\ell} \sqrt{\frac{\ell^2 - x^2}{\ell}}\, g'(x),$$

де 2ℓ – довжина тріщини, а індекси «+» і «–» відповідають її правому та лівому кінцям.

Зробимо у рівнянні (5) заміну змінних $x = \ell x_* + c$, $\xi = \ell \xi_* + c$, $c = R + \delta + \ell$, $R = \ell R_*$. Тоді воно матиме вигляд

$$\int_{-1}^{1} \left[\frac{1}{\xi_* - x_*} - H(\xi_*, x_*)\right] g'(\xi_*)\,d\xi_* = \frac{\sigma_{yy}(x_*, 0)}{D}.$$

Для розв'язування цього рівняння застосовуємо метод механічних квадратур [9]. Його розв'язок матиме вигляд $g'(\xi_*) = \dfrac{\varphi(\xi_*)}{\sqrt{1 - \xi_*^2}}$, де $\varphi(\xi_*)$ – регулярна на інтервалі $[-1, 1]$ функція, що визначається з системи алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{m=1}^{M} \frac{\varphi(\xi_m)}{M}\left[\frac{1}{\xi_m - x_r} + H(\xi_m, x_r)\right] = p(x_r),$$
$$\sum_{m=1}^{M} \frac{\pi}{M}\varphi(\xi_m) = 0, \qquad r = 1, 2, \ldots, M - 1.$$

Тут $\xi_m = \cos\frac{2m-1}{2M}\pi,\ m = 1, 2, \ldots, M$, − корені полінома Чебишева першого роду, а $x_r = \cos\frac{\pi r}{M},\ r = 1, 2, \ldots, M-1$, − корені полінома Чебишева другого роду.

Тоді КІН визначаються за формулою

$$K_1^{\pm} = \mp\sqrt{\pi\ell}\,\varphi(\pm 1),$$

де

$$\varphi(1) = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}(-1)^{m+1}\varphi(\xi_m)\,\mathrm{ctg}\,\frac{2m-1}{4M}\pi,$$

$$\varphi(-1) = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}(-1)^{M+m}\varphi(\xi_m)\,\mathrm{tg}\,\frac{2m-1}{4M}\pi.$$

Розрахунки проводились при $M = 20$.

Коефіцієнт інтенсивності напружень у випадку температурного поля, враховуючи формулу (3), подамо у вигляді суми

$$K = k_2K_0 + k_1K_1 + k_3(K_2 - K_1), \tag{8}$$

де k_i − КІН при $\sigma_{yy} = \frac{1}{x^i}$, K_i − коефіцієнти з формули (3).

Коефіцієнт інтенсивності напружень у випадку одновісного розтягу подамо у вигляді такої суми:

$$K = k_0P_0 + k_2P_2 + k_4P_4, \tag{9}$$

тут P_i − коефіцієнти при $\frac{1}{x^i}$ з формули (6).

У табл. 1 і 2 наведено величини k_i^- біля лівого кінця тріщини, обчислені при значеннях $\ell^* = \frac{\ell}{R} = 0.05$ (табл. 1) і $\ell^* = 0.25$ (табл. 2) для різних значень δ (δ − віддаль від лівого кінця тріщини до включення (див. рис. 1)).

Таблиця 1

k_i^-	δ	$H(\xi, x) = 0$	$\Gamma = 0$	$\Gamma = 1/3$	$\Gamma = 3$	$\Gamma = \infty$
k_0^-	0.1	0.224	0.148	0.183	0.281	0.389
	0.3	0.224	0.212	0.218	0.229	0.236
	0.5	0.224	0.220	0.222	0.225	0.227
k_1^-	0.1	0.198	0.132	0.163	0.249	0.343
	0.3	0.169	0.160	0.165	0.173	0.178
	0.5	0.142	0.144	0.146	0.148	0.149
k_2^-	0.1	0.177	0.119	0.146	0.221	0.303
	0.3	0.127	0.121	0.125	0.130	0.134
	0.5	0.096	0.095	0.096	0.097	0.098
k_3^-	0.1	0.157	0.107	0.130	0.196	0.267
	0.3	0.096	0.092	0.094	0.099	0.101
	0.5	0.063	0.062	0.063	0.064	0.064
k_4^-	0.1	0.140	0.096	0.117	0.174	0.236
	0.3	0.073	0.069	0.071	0.074	0.076
	0.5	0.041	0.041	0.041	0.042	0.042

Таблиця 2

k_i^-	δ	$H(\xi, x) = 0$	Γ = 0	Γ = 1/3	Γ = 3	Γ = ∞
k_0^-	0.1	0.5	0.307	0.395	0.652	0.943
	0.3	0.5	0.447	0.475	0.527	0.561
	0.5	0.5	0.479	0.490	0.501	0.520
k_1^-	0.1	0.412	0.262	0.331	0.529	0.753
	0.3	0.353	0.318	0.337	0.371	0.394
	0.5	0.309	0.297	0.304	0.315	0.321
k_2^-	0.1	0.343	0.226	0.279	0.434	0.607
	0.3	0.251	0.228	0.240	0.263	0.278
	0.5	0.192	0.185	0.189	0.196	0.199
k_3^-	0.1	0.287	0.195	0.237	0.359	0.494
	0.3	0.180	0.164	0.173	0.188	0.198
	0.5	0.120	0.116	0.118	0.122	0.124
k_4^-	0.1	0.242	0.169	0.203	0.299	0.406
	0.3	0.130	0.119	0.125	0.135	0.142
	0.5	0.076	0.073	0.074	0.077	0.078

У табл. 3 і 4 наведено значення КІН біля лівого та правого кінця тріщини (відповідно верхній і нижній рядки), обчислені при значеннях $\ell^* = 0.05$ (табл. 3) і $\ell^* = 0.25$ (табл. 4), із урахуванням регулярного ядра $H(\xi, x)$ інтегрального рівняння (5) (стовпчик ***I***) і без його врахування (стовпчик ***II***) при одновісному розтязі, коли $\sigma_{yy}^1(x,0)$ визначаються за формулою (6).

Таблиця 3

δ	Γ = 0		Γ = 1/3		Γ = 3		Γ = ∞	
	I	***II***	***I***	***II***	***I***	***II***	***I***	***II***
0.2	0.398	0.448	0.296	0.313	0.169	0.160	0.128	0.112
	0.381	0.420	0.289	0.302	0.175	0.168	0.138	0.125
0.3	0.376	0.397	0.286	0.293	0.179	0.174	0.145	0.137
	0.361	0.377	0.279	0.285	0.183	0.180	0.153	0.147
0.5	0.329	0.334	0.266	0.268	0.193	0.192	0.171	0.168
	0.319	0.323	0.262	0.264	0.196	0.195	0.176	0.174
0.7	0.297	0.299	0.253	0.254	0.203	0.202	0.187	0.186
	0.291	0.293	0.251	0.251	0.204	0.204	0.190	0.189

Таблиця 4

δ	Γ = 0		Γ = 1/3		Γ = 3		Γ = ∞	
	I	***II***	***I***	***II***	***I***	***II***	***I***	***II***
0.2	0.750	0.908	0.604	0.663	0.428	0.383	0.385	0.296
	0.662	0.734	0.566	0.594	0.453	0.433	0.423	0.383
0.3	0.739	0.820	0.598	0.628	0.432	0.409	0.385	0.340
	0.650	0.693	0.561	0.577	0.457	0.445	0.427	0.404
0.5	0.681	0.709	0.573	0.584	0.449	0.440	0.412	0.395
	0.618	0.636	0.548	0.554	0.466	0.461	0.442	0.432
0.7	0.663	0.647	0.553	0.559	0.462	0.458	0.435	0.427
	0.592	0.601	0.537	0.540	0.474	0.471	0.455	0.450

Якщо регулярне ядро $H(\xi, x) = 0$, що, зокрема, має місце для термічного включення, яке відрізняється від матриці тільки коефіцієнтом лінійного температурного розширення, отримуємо точне значення КІН за формулою [9]

$$K_1^{\pm} = -\frac{1}{\pi\sqrt{\ell}} \int_{-\ell}^{\ell} \sqrt{\frac{\ell \pm \xi}{\ell \mp \xi}}\, p(\xi)\, d\xi = -\frac{1}{\pi\sqrt{\ell}} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{\ell \pm \xi}{\sqrt{\ell^2 - \xi^2}}\, p(\xi)\, d\xi\,. \qquad (10)$$

Тут величина $K_1^{\pm}$ відноситься відповідно до правого та лівого кінця тріщини ($x = \pm\ell$), $p(\xi)$ − нормальні зусилля на тріщині. Підставимо у формулу (10) $p(\xi) = -\sigma_{yy}(\xi, 0)$ і обчислимо інтеграли, поклавши $\xi = \ell \sin\varphi$. Тоді

$$k_i^{\pm} = \frac{\sqrt{\ell}}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{(1 \pm \sin\varphi)\, d\varphi}{(c + \ell \sin\varphi)^i} \qquad \text{при} \qquad \sigma_{yy}(x, 0) = \frac{1}{(c + x)^i}\,, \quad i = 1, \ldots, 4\,,$$

де $c = R + \delta + \ell$. Остаточно отримаємо

$$k_1^{\pm} = \sqrt{\ell}\left(\frac{\ell \mp c}{\sqrt{c^2 - \ell^2}} \pm 1\right), \qquad k_2^{\pm} = \frac{\sqrt{\ell}}{(c \pm \ell)\sqrt{c^2 - \ell^2}}\,,$$

$$k_3^{\pm} = \frac{\sqrt{\ell}\,(2c - \ell)}{2(c \pm \ell)(c^2 - \ell^2)^{3/2}}\,, \qquad k_4^{\pm} = \frac{\sqrt{\ell}\,(c^2 - c\ell + \ell^2)}{(c \pm \ell)(c^2 - \ell^2)^{5/2}}\,. \qquad (11)$$

Висновки. Розглянуто плоску деформацію тіла з круглим циліндричним включенням і розміщеною на продовженні його діаметра тріщиною при дії далеко від включення однорідного теплового потоку та розтягувальних зусиль. Для певних значень модулів зсуву включення і матриці розв'язано методом механічних квадратур сингулярне інтегральне рівняння з регулярним ядром, що враховує взаємодію включення та тріщини, і визначено КІН. Без урахування регулярного ядра одержано точні формули для КІН.

Аналіз наведених у таблицях, а також у роботі [14] результатів розрахунків показує, що при довжині тріщини, меншій від радіуса включення, та віддалі до включення $\delta > R/4$ регулярне ядро при $1/3 < G_2/G_1 < 3$ мало впливає на КІН. Тоді за формулами (11) можна визначати КІН при довільних теплофізичних характеристиках тіла та вказаному вище діапазоні зміни модулів зсуву.

Якщо при певному навантаженні напруження на місці тріщини $\sigma_{yy}(x, 0) = \sum_{i=0}^{4} \frac{P_i}{x^i}$, то вираз для КІН записується у вигляді $K^{\pm} = \sum_{i=0}^{4} k_i^{\pm} P_i$. Тоді, використовуючи табл. 1 і 2, у яких наведено значення k_i^{-} біля лівого кінця тріщини, можна знайти КІН при вказаному вище навантаженні.

Із формули (3) випливає, що зумовлені температурним фактором напруження в залежності від коефіцієнтів лінійного температурного розширення включення і матриці можуть бути розтягувальними або стискувальними. У першому випадку вони будуть сприяти поширенню тріщини при розтязі, а в другому − гальмувати її.

1. *Бережницкий Л. Т., Панасюк В. В., Труш И. И.* К вопросу о влиянии включений на разрушение тела с трещиной // Физ.-хим. механика материалов. − 1970. − **6**, № 5. − С. 36−43.
2. *Зашкильняк И. М.* Интегральные уравнения задач теплопроводности и термоупругости для кусочно-однородной плоскости с криволинейными трещинами // Докл. АН УССР. Сер. А. − 1977. − № 11. − С. 1001−1005.
3. *Зашкильняк И. М.* Термоупругое состояние полуплоскости с включением и криволинейными трещинами // Мат. методы и физ.-мех. поля. − 1985. − Вып. 22. − С. 60−65.
4. *Зеленяк В. М., Євтушенко О. О.* Інтегральні рівняння стаціонарних задач теплопровідності і термопружності для півпростору з циліндричними включеннями та криволінійними тріщинами // Прикл. проблеми механіки і математики. − 2005. − Вип. 3. − С. 140−146.
5. *Кит Г. С., Зашкильняк И. М.* Термоупругое состояние плоскости с круговым включением, ослабленным трещинами // Докл. АН УССР. Сер. А. − 1976. − № 7. − С. 630−633.

6. *Кит Г. С., Кривцун М. Г.* Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1983. – 280 с.
7. *Матисяк С. Й., Євтушенко О. О., Зеленяк В. М.* Нагрівання півпростору з включенням і тріщиною // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2004. – **40**, № 4. – С. 34–40.

   Те саме: *Matysiak S. I., Evtushenko O. O., Zeleniak V. M.* Heating of a half-space containing an inclusion and a crack // Materials Sci. – 2004. – **40**, No. 2. – P. 466–474.
8. *Новацкий В.* Теория упругости. – Москва: Мир, 1975. – 872 с.
9. *Саврук М. П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1981. –324 с.
10. *Саврук М. П., Зеленяк В. М.* Плоская задача теплопроводности и термоупругости для двух спаянных разнородных полуплоскостей с криволинейными включениями и трещинами // Физ.-хим. механика материалов. – 1988. – **24**, № 2. – С. 23–28.

    Те саме: *Savruk M. P., Zelenyak V. M.* Plane problem of thermal conductivity and thermal elasticity for two joined dissimilar half-planes with curved inclusions and cracks // Soviet Materials Sci. – 1988. – **24**, No. 2. – P. 124–129.
11. *Саврук М. П., Зеленяк В. М.* Плоская задача теплопроводности и термоупругости для конечного кусочно-однородного тела с трещинами // Физ.-хим. механика материалов. – 1987. – **23**, № 5. – С. 70–78.

    Те саме: *Savruk M. P., Zelenyak V. M.* The plane problem of thermal conductivity and thermal elasticity for a finite piecewise uniform body with cracks // Soviet Materials Sci. – 1987. – **23**, No. 5. – P. 502–510.
12. *Саврук М. П., Зеленяк В. М.* Сингулярные интегральные уравнения плоских задач теплопроводности и термоупругости для кусочно-однородной плоскости с трещинами // Физ.-хим. механика материалов. – 1986. – **22**, № 3. – С. 82–88.

    Те саме: *Savruk M. P., Zelenyak V. M.* Singular integral equations of plane problems of thermal conductivity and thermoelasticity for a piecewise-uniform plane with cracks // Soviet Materials Sci. – 1986. – **22**, No. 3. – P. 297–304.
13. *Френчко Ю. С.* Влияние стационарного температурного поля на напряженное состояние плоскости с инородным включением и трещиной // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1975. – Вып. 1. – С. 160–164.
14. *Atkinson C.* The interaction between a crack and an inclusion // Int. J. Engng. Sci. – 1972. – **10**. – P. 127–136.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ТРЕЩИНЫ С ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ ПРИ НАГРЕВЕ И РАСТЯЖЕНИИ ТЕЛА

Рассмотрена плоская деформация бесконечного тела с цилиндрическим включением с отличными от материала тела механическими и теплофизическими характеристиками при заданных далеко от включения однородного теплового потока и растягивающих усилий. Найдены коэффициенты интенсивности напряжений в окрестности трещины, расположенной на продолжении диаметра включения, путем решения сингулярного интегрального уравнения методом механических квадратур. Исследовано, при каком соотношении длины трещины и ее расстояния до включения в расчетах можно пренебречь регулярным ядром интегрального уравнения. В этом случае получены аналитические формулы для определения коэффициентов интенсивности напряжений.

INTERACTION BETWEEN CRACK AND CYLINDRICAL INCLUSION UNDER HEATING AND BODY EXTENSION

Flat deformation of an infinite body with cylindrical inclusion with different from the body material mechanical and thermophysical characteristics is considered at given (far from the inclusion) homogeneous heat flow and tensile forces. The stress intensity factors are found in the vicinity of the crack located on the continuation of the diameter of inclusion by solution of the singular integral equation using the method of mechanical quadratures. It is investigated at what relation of the crack length and its distances to the inclusion in calculations it is possible to neglect a regular kernel of the integral equation. In this case the analytical formulas to define the stress intensity factors are obtained.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
04.03.09