УДК 517.95

О. М. Бугрій, Х. П. Глинянська

ДЕЯКІ ПАРАБОЛІЧНІ ВАРІАЦІЙНІ НЕРІВНОСТІ ЗІ ЗМІННИМ СТЕПЕНЕМ НЕЛІНІЙНОСТІ: ОДНОЗНАЧНА РОЗВ'ЯЗНІСТЬ І ТЕОРЕМИ ПОРІВНЯННЯ

Розглянуто параболічні варіаційні нерівності в просторах Соболєва та узагальнених просторах Лебеґа. Встановлено достатні умови існування і єдиності розв'язку цих нерівностей. Доведено також деякі теореми порівняння.

Відомо, що варіаційні нерівності описують перебіг різних процесів, пов'язаних, зокрема, з задачами з тертям в теорії пружності, задачами з теорії пластичності, теорії оптимального керування та ін. Різні варіаційні нерівності в звичайних просторах Лебеґа і Соболєва вивчалися в [1, 9, 10, 13, 17, 19]. Змішані задачі для параболічних рівнянь і їх систем в узагальнених просторах Лебеґа та Соболєва вивчалися в [3, 7], для параболічних варіаційних нерівностей в узагальнених просторах Лебеґа та Соболєва – в [2, 4–6, 14]. Нагадаємо, що розв'язок варіаційних нерівностей шукається на певній замкненій опуклій підмножині K деякого банахового простору. У працях [2, 4–6, 14] припускалося, що ця множина складається з функцій, які не залежать від часової змінної t. У цій статті для певного типу параболічних варіаційних нерівностей в звичайних просторах Соболєва та узагальнених просторах Лебеґа від такої умови вдалося відмовитися. Аналогічні результати у звичайних просторах Лебеґа і Соболєва одержано в [1].

Нехай $T \in (0,+\infty)$, $p \in (1,+\infty)$ – фіксовані числа, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – обмежена область з межею $\partial\Omega \subset C^1$, $\Gamma_1 \subset \partial\Omega$ – кусково-гладка гіперповерхня, $Q_{t_1,t_2} = \Omega \times (t_1,t_2)$, $0 \le t_1 < t_2 \le T$, $\Omega_\tau = \{(x,t):\ x \in \Omega,\ t = \tau\}$, $\tau \in [0,T]$. Норму деякого банахового простору B позначимо через $\|\cdot;B\|$, а спряжений до B простір – через B^*. Скалярний добуток між B^* і B позначатимемо через $\langle \cdot,\cdot \rangle_B$. Для спрощення викладок замість, наприклад, $u(\cdot,t)$ писатимемо просто $u(t)$, а замість $u(x,t)$ писатимемо u.

У [18] вперше введено узагальнені простори Лебеґа $L^{q(x)}(\Omega)$ (деякі властивості цих просторів вивчалися в [11, 14–16]). Нагадаємо, як це було зроблено. Нехай виконується умова

(Q): $\quad q \in L^\infty(\Omega)$, $1 < q_1 \equiv \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} q(x) \le \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} q(x) \equiv q_2 < +\infty$.

Означимо функціонал $\rho_q(\cdot,\Omega)$ рівністю $\rho_q(v,\Omega) = \int\limits_\Omega |v(x)|^{q(x)} dx$, де v – деяка функція. Узагальненим простором Лебеґа $L^{q(x)}(\Omega)$ називають множину вимірних функцій v, для яких $\rho_q(v,\Omega) < +\infty$. Відомо, що простір $L^{q(x)}(\Omega)$ є банаховим стосовно норми $\|v;L^{q(x)}(\Omega)\| = \inf\{\lambda > 0 : \rho_q(v/\lambda,\Omega) \le 1\}$ (див. теорему 1 і зауваження 1 [11, с. 616, 621]).

Зауваження 1. Нехай $S_q(s) = \begin{cases} s^{q_1}, & s \in [0,1], \\ s^{q_2}, & s > 1, \end{cases}$ $S_{1/q}(s) = \begin{cases} s^{1/q_2}, & s \in [0,1], \\ s^{1/q_1}, & s > 1, \end{cases}$ і виконується умова **(Q)**. У лемі 1 [4, с. 168] показано, що для довільної функції $v : \Omega \to \mathbb{R}$ виконуються нерівності

$$\|v;L^{q(x)}(\Omega)\| \le S_{1/q}(\rho_q(v,\Omega)), \quad \text{якщо} \quad \rho_q(v,\Omega) < +\infty,$$

$$\rho_q(v,\Omega) \le S_q(\|v;L^{q(x)}(\Omega)\|), \quad \text{якщо} \quad \|v;L^{q(x)}(\Omega)\| < +\infty.$$

 ISSN 0130–9420. Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2009. – 52, № 4. – С. 42-57.

Аналогічно до $L^{q(x)}(\Omega)$ означимо простір $L^{q(x)}(Q_{0,T})$, увівши замість $\rho_q(\cdot,\Omega)$ функціонал $\rho_q(\cdot,Q_{0,T})$. Нехай $X = \{u \in W^{1,p}(\Omega) \mid \ u|_{\Gamma_1} = 0\}$, де p – число,

$$V = X \cap L^{q(x)}(\Omega) \cap L^2(\Omega),$$

$$U(Q_{0,T}) = \Big\{ u : (0,T) \to$$

$$\to V \mid \int\limits_{Q_{0,T}} \left[\sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}|^p + |u|^p + |u|^{q(x)} + |u|^2 \right] dx\,dt < +\infty \Big\}.$$

$$K = \{ u \in U(Q_{0,T}) \mid u \le \psi \quad \text{майже скрізь в} \quad Q_{0,T} \},$$

де $\psi = \psi(x,t)$ – деяка функція. Означимо сім'ю операторів $A(t): V \to V^*$, $t \in (0,T)$, так:

$$\langle A(t)v, w \rangle_V = \int\limits_{\Omega} \left[\sum_{i=1}^{n} a_i(x,t) |v_{x_i}(x)|^{p-2} v_{x_i}(x) w_{x_i}(x) + \right.$$

$$\left. + b(x,t)|v(x)|^{p-2} v(x)w(x) + g(x,t)|v(x)|^{q(x)-2} v(x)w(x) \right] dx$$

$$\forall v, w \in V.$$

Нехай виконуються умови:

(P): $p \in (1,+\infty)$;

(A): $a_i \in L^{\infty}(Q_{0,T})$, $0 < a_0 \le a_i(x,t) \le a^0 < +\infty$ майже для всіх $(x,t) \in Q_{0,T}$, $i = 1,\ldots,n$;

(B): $b \in L^{\infty}(Q_{0,T})$, $0 < b_0 \le b(x,t) \le b^0 < +\infty$ майже для всіх $(x,t) \in Q_{0,T}$;

(G): $g \in L^{\infty}(Q_{0,T})$, $0 < g_0 \le g(x,t) \le g^0 < +\infty$ майже для всіх $(x,t) \in Q_{0,T}$;

(F): $f \in L^2(Q_{0,T})$;

(Ψ): $\psi \in L^2(Q_{0,T})$, $\psi \ge 0$;

(U): $u_0 = u_0(x)$ – така функція просторової змінної x, що $u_0 \in K$.

Розглянемо параболічну варіаційну нерівність

$$\int\limits_0^{\tau} \langle v_t(t) + A(t)u(t) - f(t), v(t) - u(t) \rangle_V \, dt \ge$$

$$\ge \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} |v(x,\tau) - u(x,\tau)|^2 \, dx - \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} |v(x,0) - u_0(x)|^2 \, dx, \qquad (1)$$

де $\tau \in (0,T]$, v – деяка пробна функція.

Означення. Функцію $u \in U(Q_{0,T}) \cap C([0,T]; L^2(\Omega)) \cap K$ називатимемо розв'язком параболічної варіаційної нерівності (1), якщо вона задовольняє (1) для всіх $\tau \in (0,T]$ і для всіх $v \in U(Q_{0,T}) \cap C([0,T]; L^2(\Omega)) \cap K$, $v_t \in [U(Q_{0,T})]^*$.

Позначимо через $\mathrm{SV}(u_0, f, \psi)$ множину розв'язків параболічної варіаційної нерівності (1) в сенсі попереднього означення (можливо, $\mathrm{SV}(u_0, f, \psi) = \varnothing$).

Нехай виконуються умови **(F)**, **(Ψ)**, **(U)**, $u \in \mathrm{SV}(u_0, f, \psi)$. Взявши в (1) v таке, що $v(0) = u_0$, отримаємо, що $\int\limits_{\Omega} |v(x,\tau) - u(x,\tau)|^2 \, dx \to 0$ при $\tau \to +0$.

Тому $\lim\limits_{\tau\to+0} u(\tau) = \lim\limits_{\tau\to+0} v(\tau)$ у просторі $L^2(\Omega)$. Оскільки $u, v \in C([0,T]; L^2(\Omega))$, то з отриманої рівності границь і припущення на v одержимо таку умову в сенсі простору $L^2(\Omega)$:

$$u(0) = u_0 . \tag{2}$$

Зауваження 2. Нехай виконуються умови **(Q)–(G)**. Застосувавши нерівність

$$(|s_1|^{r-2} s_1 - |s_2|^{r-2} s_2)(s_1 - s_2) \ge 0 \qquad \forall\, s_1, s_2 \in \mathbb{R}, \qquad \forall\, r > 1 ,$$

для всіх $u, v \in V$ і $t \in (0,T)$ одержимо, що

$$\langle A(t)u - A(t)v, u - v\rangle_V = \int\limits_\Omega \Bigg[\sum_{i=1}^n a_i(|u_{x_i}|^{p-2} u_{x_i} -$$

$$- |v_{x_i}|^{p-2} v_{x_i})(u_{x_i} - v_{x_i}) + b(|u|^{p-2} u - |v|^{p-2} v)(u - v) +$$

$$+ g(|u|^{q(x)-2} u - |v|^{q(x)-2} v)(u - v)\Bigg] dx \ge 0 . \tag{3}$$

Тому при кожному $t \in (0,T)$ оператор $A(t)$ є монотонним. Крім того, $V \subset L^2(\Omega) \subset V^*$, де $V^* = X^* + L^{q'(x)}(\Omega) + L^2(\Omega)$, $\dfrac{1}{q(x)} + \dfrac{1}{q'(x)} = 1$ при $x \in \Omega$.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* **(Q)–(U)**. *Тоді варіаційна нерівність* (1) *не може мати більше одного розв'язку.*

Д о в е д е н н я цієї теореми проводиться від супротивного. Припускаємо, що існує два розв'язки (1), робимо певні перетворення (див., наприклад, [6, 14]), використовуємо (3) і приходимо до того, що ці розв'язки співпадають майже скрізь на $Q_{0,T}$. ◊

Нехай $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $v^\pm = \max\{\pm v, 0\}$. Перш ніж перейти до доведення існування розв'язку варіаційної нерівності (1), розглянемо сім'ю допоміжних задач зі штрафом:

$$u_t^k(t) + A(t)u^k(t) + k(u^k(t) - \psi(t))^+ = f(t), \qquad t \in (0,T), \tag{4}$$

$$u^k(0) = u_0 . \tag{5}$$

Означення. Функцію $u \in U(Q_{0,T}) \cap C([0,T]; L^2(\Omega))$, $u_t \in [U(Q_{0,T})]^*$, називатимемо розв'язком задачі (4), (5), якщо u задовольняє (5) в сенсі простору $L^2(\Omega)$ і

$$- \int\limits_{Q_{0,T}} uv\varphi_t\, dx\, dt + \int\limits_0^T \langle A(t)u(t), v\rangle_V\, \varphi(t)\, dt + k \int\limits_{Q_{0,T}} (u - \psi)^+ v\varphi\, dx\, dt =$$

$$= \int\limits_{Q_{0,T}} fv\varphi\, dx\, dt \qquad \forall v \in V, \quad \varphi \in C_0^\infty((0,T)).$$

Відмітимо, що для $t \in (0,T)$ рівняння (4) можна розуміти і як рівність у сенсі простору V^*.

Позначимо через $\mathrm{SP}(k, u_0, f, \psi)$ множину розв'язків задачі (4), (5) в сенсі попереднього означення (можливо, $\mathrm{SP}(k, u_0, f, \psi) = \varnothing$).

Зауваження 3. Із [2] випливає, що $U(Q_{0,T})$, $[U(Q_{0,T})]^* \subset D^*(0,T; V^*)$. Тому похідну від функції $v \in U(Q_{0,T})$ будемо брати в розумінні простору

$D^*(0,T;V^*)$. У [14] показано, що для всіх $u \in [U(Q_{0,T})]^*$, $v \in U(Q_{0,T})$ виконується формула $\langle u,v \rangle_{U(Q_{0,T})} = \int\limits_0^T \langle u(t),v(t) \rangle_V \, dt$.

Зауваження 4. Нехай $G \subset \mathbb{R}^m$ – деяка область з досить гладкою межею. З теореми А.1 в [9, с. 47] випливає, що, якщо $z \in W^{1,r}(G)$, $r \ge 1$, то $z^+ \in W^{1,r}(G)$. Крім того, для кожного $1 \le i \le n$ та довільної гладкої функції φ з компактним в G носієм маємо

$$\int\limits_G (z^+)_{y_i} \varphi \, dy = \int\limits_{G \cap \{z>0\}} z_{y_i} \varphi \, dy .$$

Отже, ввівши функцію $h : h = z_{y_i}$ для $z > 0$ і $h = 0$ для $z \le 0$, отримаємо, що $\int\limits_G [(z^+)_{y_i} - h]\varphi \, dy = 0$ для всіх $\varphi \in C_0^\infty(G)$. Оскільки $(z^+)_{y_i} - h \in$ $\in L^1_{\mathrm{loc}}(G)$, то з [12, с. 36] випливає, що $(z^+)_{y_i} - h = 0$ майже скрізь на G. Таким чином, одержуємо формулу $(z^+)_{y_i} = \begin{cases} z_{y_i}, & z > 0, \\ 0, & z \le 0, \end{cases}$ яка виконується майже скрізь в G. Аналогічна формула справджується і для функції z^-.

Зауваження 5. Нехай $u, v \in U(Q_{0,T})$ – деякі функції, $v_t \in L^2(Q_{0,T})$. Використовуючи зауваження 3 і 4 для $i = 1,\dots,n$ та $0 \le t_1 < t_2 \le T$, отримуємо

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} a_i \left| u_{x_i} \right|^{p(x)-2} u_{x_i} (\pm u^\pm)_{x_i} \, dx \, dt = \int\limits_{Q_{t_1,t_2} \cap \{u \gtrless 0\}} a_i \left| u_{x_i} \right|^{p(x)} dx \, dt =$$

$$= \int\limits_{Q_{t_1,t_2}} a_i \left| (u^\pm)_{x_i} \right|^{p(x)} dx \, dt ,$$

$$\left\langle v_t, \pm v^\pm \right\rangle_{U(Q_{t_1,t_2})} = \int\limits_{t_1}^{t_2} \left\langle v_t(t), \pm v^\pm(t) \right\rangle_V dt =$$

$$= \pm \int\limits_{Q_{t_1,t_2}} v_t v^\pm dx \, dt = \int\limits_{Q_{t_1,t_2}} (v^\pm)_t v^\pm dx \, dt .$$

Зауваження 6. Якщо функція $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є монотонно неспадною, то для всіх $r, s \in \mathbb{R}$ виконується нерівність $(\varphi(r) - \varphi(s))(r - s) \ge 0$. Крім того, $(\varphi(r) - \varphi(s))(r - s)^+ \ge 0$ для всіх $r, s \in \mathbb{R}$. Доведемо останню нерівність. Якщо $r > s$, то $(r - s)^+ = r - s \ge 0$, $\varphi(r) - \varphi(s) \ge 0$. Перемноживши ці нерівності, отримуємо необхідний результат. Якщо $r \le s$, то $(r - s)^+ = 0$ і знову все доведено.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови* **(Q)**–**(U)** *і умова*

(C1): $a_1, \dots, a_n,\ b,\ g \in C([0,T]; L^\infty(\Omega))$.

Тоді $\mathrm{SP}(k, u_0, f, \psi) \ne \varnothing$ *при* $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, *тобто розв'язок задачі зі штрафом* (4), (5) *існує.*

Д о в е д е н н я. Доведемо лише цікавіший випадок $k \in \mathbb{N}$. Використаємо метод Фаедо – Гальоркіна. Нехай $w^1, w^2, \dots, w^j, \dots$ – базис у просторі V, $u^{k,m}(x,t) = \sum\limits_{j=1}^m \beta_j^{k,m}(t) w^j(x)$, $(x,t) \in Q_{0,T}$. Функції $\beta_1^{k,m}, \beta_2^{k,m}, \dots, \beta_m^{k,m}$ вибираються так, щоб вони були розв'язками системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\left\langle u_t^{k,m}(t) + A(t)u^{k,m}(t) + k\big(u^{k,m}(t) - \psi(t)\big)^+, w^\mu \right\rangle_V =$$

$$= \left\langle f(t), w^\mu \right\rangle_V, \qquad \mu = 1,\ldots,m, \tag{6}$$

з початковими умовами $\beta_i^{k,m}(0) = \tilde{\beta}_i^m$, $i \in \{1,\ldots,m\}$, де $\tilde{\beta}_1^m,\ldots,\tilde{\beta}_m^m$ – коефіцієнти u_0 відносно базису $\{w^j\}_{j=1}^n$ в V, тобто $u_0^m(x) \equiv \sum_{i=1}^m \tilde{\beta}_i^m w^i(x) \to u_0(x)$ сильно в V при $m \to \infty$. З теореми Каратеодорі випливає, що такі функції $\beta_1^{k,m},\ldots,\beta_m^{k,m}$ існують. Відмітимо, що $u^{k,m}(0) = u_0^m$.

Домножимо (1) на $\beta_\mu^{k,m}(t)$, підсумуємо за μ від 1 до m, проінтегруємо одержану рівність по $t \in (0,\tau) \subset [0,T]$. Отримаємо рівність

$$\frac{1}{2}\left\|u^{k,m}(\tau);L^2(\Omega)\right\|^2 + \int\limits_{Q_{0,\tau}} \left[\sum_{i=1}^n a_i \left|u_{x_i}^{k,m}\right|^p + b\left|u^{k,m}\right|^p + \right.$$

$$\left. + g\left|u^{k,m}\right|^{q(x)}\right] dx\,dt + k\int\limits_{Q_{0,\tau}} (u^{k,m} - \psi)^+ u^{k,m} dx\,dt =$$

$$= \int\limits_{Q_{0,\tau}} f u^{k,m} dx\,dt + \frac{1}{2}\left\|u_0^m;L^2(\Omega)\right\|^2, \qquad \tau \in (0,T].$$

Використавши нерівність $fu^{k,m} \le \frac{1}{2}|f|^2 + \frac{1}{2}\left|u^{k,m}\right|^2$, з попередньої рівності та умов **(A)**, **(B)**, **(G)** одержимо, що

$$\frac{1}{2}\left\|u^{k,m}(\tau);L^2(\Omega)\right\|^2 + \int\limits_{Q_{0,\tau}} \left[a_0 \sum_{i=1}^n \left|u_{x_i}^{k,m}\right|^p + b_0\left|u^{k,m}\right|^p + \right.$$

$$\left. + g_0\left|u^{k,m}\right|^{q(x)}\right] dx\,dt + k\int\limits_{Q_{0,\tau}} (u^{k,m} - \psi)^+ u^{k,m} dx\,dt \le$$

$$\le \frac{1}{2}\int\limits_{Q_{0,\tau}} |f|^2\,dx\,dt + \frac{1}{2}\left\|u_0^m;L^2(\Omega)\right\|^2 + \frac{1}{2}\int_0^\tau \left\|u^{k,m}(t);L^2(\Omega)\right\|^2 dt, \tag{7}$$

$\tau \in [0,T]$. Тому з леми Ґронуола – Белмана випливає нерівність

$$\left\|u^{k,m}(\tau);L^2(\Omega)\right\|^2 \le C_1, \qquad \tau \in [0,T], \tag{8}$$

де стала $C_1 > 0$ не залежить від $k,\ m,\ \tau$. Звідси отримуємо, що

$$\int\limits_{Q_{0,T}} \left|u^{k,m}\right|^2 dx\,dt \le C_2, \tag{9}$$

де стала $C_2 > 0$ не залежить від $k,\ m$, а з (7) – оцінки

$$\sup_{\tau\in[0,T]} \left\|u^{k,m}(\tau);L^2(\Omega)\right\|^2 +$$

$$+ \int\limits_{Q_{0,T}} \left[\sum_{i=1}^n \left|u_{x_i}^{k,m}\right|^p + \left|u^{k,m}\right|^p + \left|u^{k,m}\right|^{q(x)}\right] dx\,dt \le C_3, \tag{10}$$

де стала $C_3 > 0$ не залежить від $k,\ m$.

Тому існує підпослідовність $\{u^{k,m_j}\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \{u^{k,m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ така, що $u^{k,m_j} \to$ $\to u^k$ *-слабко в просторі $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ і слабко в $U(Q_{0,T})$, $Au^{k,m_j} +$ $+ k(u^{k,m_j} - \psi)^+ \to \chi_k$ слабко в $[U(Q_{0,T})]^*$ при $j\to\infty$.

Задамо довільне $\varepsilon > 0$. Нехай $0 < T_1 < T_2 < T$, $\delta \in (0, T - T_2)$. Домножимо (6) на $\beta_\mu^{k,m}(t) - \tilde{\beta}_\mu^m$ і підсумуємо за $\mu = 1,\ldots,m$. Зінтегрувавши за $t \in$ $\in (0,\delta)$, отримаємо, що

$$\int_0^\delta \left\langle u_t^{k,m}(t) + A(t)u^{k,m}(t) + k(u^{k,m}(t) - \psi(t))^+, u^{k,m}(t) - u_0^m \right\rangle_V dt =$$

$$= \int_0^\delta \left\langle f(t), u^{k,m}(t) - u_0^m \right\rangle_V dt. \tag{11}$$

Оскільки

$$\int_{Q_{0,\delta}} u_t^{k,m}(u^{k,m} - u_0^m)\,dx\,dt = \frac{1}{2}\int_\Omega \left|u^{k,m}(\delta) - u_0^m\right|^2 dx,$$

$$\int_{Q_{0,\delta}} (u^{k,m} - \psi)^+(u^{k,m} - u_0^m)\,dx\,dt = \int_{Q_{0,\delta}} \big[(u^{k,m} - \psi)^+ - (u_0^m - \psi)^+ +$$

$$+ (u_0^m - \psi)^+\big](u^{k,m} - u_0^m)\,dx\,dt \ge$$

$$\ge \int_{Q_{0,\delta}} (u_0^m - \psi)^+(u^{k,m} - u_0^m)\,dx\,dt,$$

$$\left\langle Au^{k,m}(t), u^{k,m}(t) - u_0^m \right\rangle_V = \left\langle Au^{k,m}(t) - Au_0^m, u^{k,m}(t) - u_0^m \right\rangle_V +$$

$$+ \left\langle Au_0^m, u^{k,m}(t) - u_0^m \right\rangle_V \ge \left\langle Au_0^m, u^{k,m}(t) - u_0^m \right\rangle_V, \quad t \in (0,\delta),$$

то з (11) одержимо, що

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \left|u^{k,m}(\delta) - u_0^m\right|^2 dx + \int_{Q_{0,\delta}} \Bigg[\sum_{i=1}^n a_i \left|u_{0,x_i}^m\right|^{p-2} u_{0,x_i}^m (u_{x_i}^{k,m} - u_{0,x_i}^{k,m}) +$$

$$+ b\left|u_0^m\right|^{p-2} u_0^m(u^{k,m} - u_0^m) +$$

$$+ g\left|u_0^m\right|^{q(x)-2} u_0^m (u^{k,m} - u_0^m)\Bigg]dx\,dt +$$

$$+ k\int_{Q_{0,\delta}} (u_0^m - \psi)^+(u^{k,m} - u_0^m)\,dx\,dt \le$$

$$\le \int_{Q_{0,\delta}} f(u^{k,m} - u_0^m)\,dx\,dt.$$

Послідовність $\{u_0^m\}_{m\in\mathbb{N}}$ обмежена в просторі V. Тому, використавши нерівність Гельдера та оцінки (9), (10), для досить малих $\delta > 0$ звідси легко отримуємо оцінку

$$\int_\Omega \left|u^{k,m}(x,\delta) - u_0^m(x)\right|^2 dx \le C_4(k)\varepsilon, \tag{12}$$

де стала $C_4(k) > 0$ не залежить від m, δ, ε, але залежить від k.

З (6) одержимо, що

$$\left\langle u_t^{k,m}(t+\delta) - u_t^{k,m}(t), u^{k,m}(t+\delta) - u^{k,m}(t)\right\rangle_V +$$

$$+ \left\langle A(t+\delta)u^{k,m}(t+\delta) - A(t)u^{k,m}(t), u^{k,m}(t+\delta) - u^{k,m}(t)\right\rangle_V +$$

$$+ k\left\langle (u^{k,m}(t+\delta) - \psi(t+\delta))^+ -\right.$$

$$\left. - (u^{k,m}(t) - \psi(t))^+, u^{k,m}(t+\delta) - u^{k,m}(t)\right\rangle_V =$$

$$= \left\langle f(t+\delta) - f(t), u^{k,m}(t+\delta) - u^{k,m}(t)\right\rangle_V, \quad t \in (0, T_2). \quad (13)$$

Зінтегрувавши за $t \in (0,\tau) \subset (0, T_2)$, після елементарних перетворень отримаємо, що

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \left|u^{k,m}(\tau+\delta) - u^{k,m}(\tau)\right|^2 dx + \int_0^\tau \left\langle A(t+\delta)u^{k,m}(t+\delta) -\right.$$

$$\left. - A(t+\delta)u^{k,m}(t), u^{k,m}(t+\delta) - u^{k,m}(t)\right\rangle_V dt +$$

$$+ k\int_{Q_{0,\tau}} \left[(u^{k,m}(t+\delta) - \psi(t+\delta))^+ - (u^{k,m}(t) - \psi(t+\delta))^+\right] \times$$

$$\times \left[u^{k,m}(t+\delta) - u^{k,m}(t)\right] dx\,dt \le \frac{1}{2}\int_\Omega \left|u^{k,m}(\delta) - u_0^m\right|^2 dx +$$

$$+ \int_{Q_{0,\tau}} \left[f(t+\delta) - f(t)\right]\left[u^{k,m}(t+\delta) - u^{k,m}(t)\right] dx\,dt -$$

$$- \int_0^\tau \left\langle \left[A(t+\delta) - A(t)\right]u^{k,m}(t), u^{k,m}(t+\delta) - u^{k,m}(t)\right\rangle_V dt -$$

$$- k\int_{Q_{0,\tau}} \left[(u^{k,m}(t) - \psi(t+\delta))^+ - (u^{k,m}(t) - \psi(t))^+\right] \times$$

$$\times \left[u^{k,m}(t+\delta) - u^{k,m}(t)\right] dx\,dt, \qquad \tau \in (0, T_2). \quad (14)$$

До другого доданка зліва застосуємо оцінку (3). У третьому доданку зліва скористаємося монотонністю функції $z(s) = (s-r)^+$, $s \in \mathbb{R}$, і зауваженням 6. До інтеграла з f застосуємо нерівність Юнга. Для заданого $\varepsilon > 0$ можна вибрати $\delta > 0$ таким малим, що модуль третього доданка справа буде меншим від ε. При цьому треба використати нерівність Гельдера, умову **(C1)** та оцінку (10). В останньому доданку справа скористаємося нерівністю Юнга та тим, що функція $y(s) = (r-s)^+$, $s \in \mathbb{R}$, задовольняє умову Ліпшиця зі сталою $L = 1$. Тоді з (14) одержимо, що

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \left|u^{k,m}(\tau+\delta) - u^{k,m}(\tau)\right|^2 dx \le \frac{1}{2}\int_\Omega \left|u^{k,m}(\delta) - u_0^m\right|^2 dx +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{Q_{0,\tau}} |f(t+\delta) - f(t)|^2 dx\,dt + \varepsilon + \frac{k^2}{2}\int_{Q_{0,\tau}} |\psi(t+\delta) - \psi(t)|^2 dx\,dt +$$

$$+ \int_{Q_{0,\tau}} \left|u^{k,m}(t+\delta) - u^{k,m}(t)\right|^2 dx\,dt, \qquad \tau \in (0, T_2). \quad (15)$$

Тому, використавши (12), абсолютну неперервність інтеграла Лебеґа та лему Ґронуола – Белмана, звідси отримаємо оцінку

$$\int_{\Omega} \left| u^{k,m}(\tau+\delta) - u^{k,m}(\tau) \right|^2 dx \le C_5(k)\varepsilon, \qquad \tau \in (0, T_2), \tag{16}$$

з якої випливає одностайна неперервність послідовності $\{u^{k,m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ на відрізку $[0, T_2]$. Далі аналогічно, як і (16), показуємо одностайну неперервність цієї послідовності на $[T_1, T]$ і (можливо, при переході до нової підпослідовності) отримуємо збіжність

$$u^{k,m_j} \to u^k \quad \text{у просторі} \quad C([0,T]; L^2(\Omega)) \quad \text{при} \quad j \to \infty .$$

Запишемо рівність (6) для $m = m_j$, домножимо її на функцію $\varphi \in C_0^\infty((0,T))$, зінтегруємо за $t \in (0,T)$. Зробивши певні перетворення, перейдемо до границі при $j \to \infty$:

$$-\int_{Q_{0,T}} u^k w^\mu \varphi_t \, dx\, dt + \int_0^T \left\langle \chi_k(t), w^\mu \right\rangle_V \varphi(t)\, dt = \int_{Q_{0,T}} f w^\mu \varphi \, dx\, dt . \tag{17}$$

Оскільки (17) виконується для будь-якого $\mu \in \mathbb{N}$, то ця рівність справджується, якщо замінити функції w^μ на будь-яку їх лінійну комбінацію. Тоді не складно показати, що

$$\left\langle u_t^k(t), v \right\rangle_V + \left\langle \chi_k(t), v \right\rangle_V = \left\langle f(t), v \right\rangle_V , \qquad v \in V, \qquad t \in (0,T),$$

а тому $u_t^k + \chi_k = f$. Далі стандартним чином отримуємо, що

$$\chi_k = A u^k + k(u^k - \psi)^+$$

(див., наприклад, [10, с. 171]) і показуємо, що $u^k \in \mathrm{SP}(k, u_0, f, \psi)$.

Теорему доведено. ◊

Доведемо одне додаткове твердження. Оскільки воно має самостійний інтерес, то сформулюємо його в досить загальному вигляді.

Лема 1. *Нехай* $r \in L^\infty(Q_{0,T})$, $1 < r_1 \le r(x,t) \le r_2 < +\infty$, $\dfrac{1}{r(x,t)} + \dfrac{1}{r'(x,t)} = 1$ *майже для всіх* $(x,t) \in Q_{0,T}$, $\{z_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset L^{r(x,t)}(Q_{0,T})$, $w \in L^{r'(x,t)}(Q_{0,T})$, $\mathcal{E}_m(\tau) = \int_{Q_{0,\tau}} w(x,t) z_m(x,t)\, dx\, dt$, $\tau \in [0,T]$. *Тоді, якщо* $z_m \to 0$ *слабко в просторі* $L^{r(x,t)}(Q_{0,T})$ *при* $m \to \infty$, *то* $\mathcal{E}_m(\tau) \to 0$ *при* $m \to \infty$ *рівномірно за* $\tau \in [0,T]$.

Д о в е д е н н я. Нехай виконуються умови леми 1, $\tau \in [0,T]$. Якщо $\chi^\tau(t) = \begin{cases} 1, & t \le \tau, \\ 0, & t > \tau, \end{cases}$ то $\chi^\tau w \in L^{r'(x,t)}(Q_{0,T})$. Тому $\mathcal{E}_m(\tau) = \int_{Q_{0,T}} \chi^\tau w z_m \, dx\, dt \to 0$ для кожного фіксованого $\tau \in [0,T]$. Доведемо рівномірну збіжність. Задамо довільне $\varepsilon > 0$. Зрозуміло, що існує така стала $C_6 > 0$, що $\left\| z_m ; L^{r(x,t)}(Q_{0,T}) \right\| < C_6$ для всіх $m \in \mathbb{N}$. З абсолютної неперервності інтеграла Лебеґа випливає існування такого числа $h_0 > 0$, що для всіх $h \in (-h_0, h_0)$, $\tau \in [0,T]$ ($\tau + h \in [0,T]$) виконується оцінка $\int_{Q_{\tau,\tau+h}} |w(x,t)|^{r'(x,t)} dx\, dt \le \varepsilon$. Тому з узагальненої нерівності Гельдера (див., наприклад, [11, с. 594]) і зауваження 1 випливає, що

$$\left|\mathcal{L}_m(\tau+h)-\mathcal{L}_m(\tau)\right| = \left|\int\limits_{Q_{\tau,\tau+h}} w z_m dx\,dt\right| \le$$

$$\le C_7(r)\left\|w; L^{r'(x,t)}(Q_{\tau,\tau+h})\right\|\cdot\left\|z_m; L^{r(x,t)}(Q_{\tau,\tau+h})\right\| \le$$

$$\le C_7(r) S_{1/r'}\left(\int\limits_{Q_{\tau,\tau+h}} |w(x,t)|^{r'(x,t)}\,dx\,dt\right)\times$$

$$\times S_{1/r}\left(\int\limits_{Q_{\tau,\tau+h}} |z_m(x,t)|^{r(x,t)}\,dx\,dt\right) \le$$

$$\le C_7(r) S_{1/r'}(\varepsilon) S_{1/r}(C_6)\,,$$

для всіх $h \in (-h_0, h_0)$, $\tau \in [0,T]$ ($\tau + h \in [0,T]$). Отже, послідовність $\{\mathcal{L}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ є одностайно неперервною на відрізку $[0,T]$. Подібна до попередньої оцінка показує її рівномірну обмеженість. Тому з теореми Асколі − Арцела випливає твердження леми. ◊

Теорема 3. *Нехай виконуються умови* **(Q)−(U)**, **(C1).** *Тоді* $\mathrm{SV}(u_0, f, \psi) \ne \varnothing$, *тобто варіаційна нерівність* (1) *має розв'язок.*

Д о в е д е н н я проведемо методом штрафу. Нехай виконуються умови теореми, $k \in \mathbb{N}$, $u^k \in \mathrm{SP}(k, u_0, f, \psi)$. Домножимо (4) на $u^k(t)$ скалярно в V та проінтегруємо по $t \in (0,\tau) \subset (0,T)$. Після деяких перетворень отримаємо оцінку (7) з заміною $u^{k,m}$ на u^k та u_0^m на u_0. Як і оцінки (9), (10), з неї отримуємо, що

$$\sup_{\tau\in[0,T]}\left\|u^k(\tau); L^2(\Omega)\right\|^2 +$$

$$+\int\limits_{Q_{0,T}}\left[\sum_{i=1}^n\left|u^k_{x_i}\right|^p + \left|u^k\right|^p + \left|u^k\right|^2 + \left|u^k\right|^{q(x)}\right]dx\,dt \le C_7 \qquad (18)$$

і, крім того,

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} (u^k-\psi)^+ u^k\,dx\,dt \le \frac{1}{k}C_8\,, \qquad (19)$$

де сталі $C_7, C_8 > 0$ не залежать від k. Отже, існує підпослідовність $\{u^{k_m}\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \{u^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ така, що $u^{k_m} \to u$ *-слабко в $L^\infty\left(0,T; L^2(\Omega)\right)$ та слабко в $U(Q_{0,T})$, $Au^{k_m} \to \chi$ слабко в $[U(Q_{0,T})]^*$ при $m \to \infty$. Принагідно зауважимо, що, на відміну від теореми 2, не знаємо, як для цієї послідовності отримати збіжність у просторі $C\left([0,T]; L^2(\Omega)\right)$ (див. оцінку (16), в якій стала залежить від k). Хоча, якщо, наприклад, функція ψ не залежить від t, то це зробити легко.

Нехай $v \in U(Q_{0,T}) \cap C\left([0,T]; L^2(\Omega)\right)$, $v_t \in [U(Q_{0,T})]^*$, $v \in K$. Домножимо (4) з u^{k_m} замість u^k на $v(t) - u^{k_m}(t)$ і, використавши рівність $(v-\psi)^+ = 0$, для всіх $\tau \in (0,T]$ одержимо, що

$$\int\limits_0^\tau \left\langle v_t(t) + A(t)u^{k_m}(t) - f(t), v(t) - u^{k_m}(t)\right\rangle_V dt \ge$$

$$\ge \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}\left|v - u^{k_m}\right|^2 dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\left|v(0) - u_0\right|^2 dx\,. \qquad (20)$$

Можна показати, що $\chi = Au$ (див. [2]) та те, що $u \in K$ (див. [6]).

Нехай $\rho \in C([0,T])$. Домножимо (20) на $\varphi(\tau)$ та зінтегруємо за $\tau \in (0,T)$:

$$\int_0^T \left\{ \int_0^\tau \left\langle v_t(t) + A(t)u^{k_m}(t) - f(t), v(t) - u^{k_m}(t) \right\rangle_V dt - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\int_{\Omega_\tau} \left| v - u^{k_m} \right|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |v(0) - u_0|^2 dx \right\} \varphi(\tau)\, d\tau \ge 0\,. \qquad (21)$$

Взявши з обох частин цієї нерівності нижню границю при $m \to \infty$, отримаємо оцінку (21) з u замість u^{k_m}. З огляду на довільність φ з цієї нерівності випливає, що

$$\int_0^\tau \left\langle v_t(t) + A(t)u(t) - f(t), v(t) - u(t) \right\rangle_V dt \ge$$

$$\ge \frac{1}{2}\int_{\Omega_\tau} |v - u|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega |v(0) - u_0|^2 dx \qquad (22)$$

майже для всіх $\tau \in (0,T)$ (множина точок, де ця нерівність не виконується залежить від u та v).

Покажемо тепер, що $u \in C([0,T]; L^2(\Omega))$. Нехай $\{\tilde{u}^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ – послідовність розв'язків задач

$$\frac{1}{k}\tilde{u}^k_t + \tilde{u}^k = u, \qquad \tilde{u}^k(0) = u_0$$

(див. [10]). Оскільки $u \in K$, то $\tilde{u}^k \in K$. Крім того, $\tilde{u}^k \to u$ слабко в $U(Q_{0,T})$ та сильно в $L^2(Q_{0,T})$ (див., наприклад, [2, 14]). Поклавши в (22) $v = \tilde{u}^k$, отримаємо, що

$$\left\| \tilde{u}^k(\tau) - u(\tau); L^2(\Omega) \right\|^2 \le 2\int_0^\tau \left\langle \tilde{u}^k_t(t) + A(t)u(t) - f(t), \tilde{u}^k(t) - u(t) \right\rangle_V dt \le$$

$$\le 2\int_0^\tau \left\langle A(t)u(t) - f(t), \tilde{u}^k(t) - u(t) \right\rangle_V dt \qquad (23)$$

майже для всіх $\tau \in (0,T)$ (множина точок, де ця нерівність не виконується залежить від u та k, а також від $\tilde{u}^k$).

Нехай $S_1 \subset [0,T]$ – множина τ, для яких виконується (23) для всіх $k \in \mathbb{N}$ і виконується (22) для $v = 0$. Нехай $S_2 = [0,T] \setminus S_1$ і це є множина міри нуль за Лебегом як зліченне об'єднання множин міри нуль.

Переозначимо функцію $u : [0,T] \to L^2(\Omega)$ на множині S_2. Нехай $\tau_0 \in$ $\in S_2$. Оскільки міра Лебеґа в $\mathbb{R}$ множини S_2 дорівнює нулеві, то існує така послідовність $\{\tau_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \subset S_1$, що $\tau_\ell \to \tau_0$ при $\ell \to \infty$. З оцінки (22) для $v = 0$, $\tau = \tau_\ell$ випливає, що

$$\left\| u(\tau_\ell); L^2(\Omega) \right\|^2 \le 2\int_0^{\tau_\ell} \left\langle f(t) - A(t)u(t), u(t) \right\rangle_V dt + \left\| u_0; L^2(\Omega) \right\|^2 \le C_9\,,$$

де стала $C_9 > 0$ не залежить від ℓ. Тому існує елемент $w^{\tau_0} \in L^2(\Omega)$ і підпослідовність $\{\tau_{\ell_m}\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \{\tau_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ така, що $u(\tau_{\ell_m}) \to w^{\tau_0}$ слабко в $L^2(\Omega)$ при $m \to \infty$. З (23) отримаємо

$$\left\|\tilde{u}^k(\tau_{\ell_m}) - u(\tau_{\ell_m}); L^2(\Omega)\right\|^2 \le 2\int\limits_0^{\tau_{\ell_m}} \left\langle A(t)u(t) - f(t), \tilde{u}^k(t) - u(t)\right\rangle_V dt\,.$$

Оскільки $\tilde{u}^k \in C([0,T];L^2(\Omega))$, то, взявши з цієї нерівності нижню границю при $m \to \infty$ та врахувавши лему 5.3 з [8, с. 20], одержимо, що

$$\left\|\tilde{u}^k(\tau_0) - w^{\tau_0}; L^2(\Omega)\right\|^2 \le 2\int\limits_0^{\tau_0} \left\langle A(t)u(t) - f(t), \tilde{u}^k(t) - u(t)\right\rangle_V dt\,.$$

Такий елемент w^{τ_0} побудуємо для кожного $\tau^0 \in S_2$. Нехай $\hat{u}:[0,T] \to L^2(\Omega)$ – така функція, що $\hat{u}(\tau) = \begin{cases} u(\tau), & \tau \in S_1, \\ w^\tau, & \tau \in S_2. \end{cases}$ Тоді з попередньої нерівності або нерівності (23) випливає, що

$$\left\|\tilde{u}^k(\tau) - \hat{u}(\tau); L^2(\Omega)\right\|^2 \le 2\int\limits_0^{\tau} \left\langle A(\tau)\hat{u}(\tau) - f(\tau), \tilde{u}^k(\tau) - \hat{u}(\tau)\right\rangle_V dt \qquad (24)$$

вже для всіх $\tau \in [0,T]$. Розписавши праву частину (24) і до кожного її доданка застосувавши аналог леми 1, одержимо, що права частина нерівності (24) прямує до нуля при $k \to \infty$ рівномірно за $\tau \in [0,T]$. Тому і $\tilde{u}^k \to \hat{u}$ в просторі $C([0,T];L^2(\Omega))$. Отже, $\hat{u} \in C([0,T];L^2(\Omega))$. Оскільки $\tilde{u}^k \to u$ слабко в $U(Q_{0,T})$ при $k \to \infty$, то можна вважати, що u це і є $\hat{u}$, тому $u \in C([0,T];L^2(\Omega))$. Тоді, оскільки в (22) $v \in C([0,T];L^2(\Omega))$, за допомогою граничного переходу отримаємо нерівність (22) вже для всіх $\tau \in [0,T]$.

Теорему доведено. ◊

Теорема 4. *Нехай виконуються умови* **(Q)–(U)**, *умова*

(C2): *функції* $a_1,\ldots,a_n,b,g$ *не залежать від змінної* t,

і $Au_0 \in L^2(\Omega)$, $\psi_t \in L^2(Q_{0,T})$, $f_t \in L^2(Q_{0,T})$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. *Тоді, якщо* $u^k \in \mathrm{SP}(k,u_0,f,\psi)$, *то* $u_t^k \in L^2(Q_{0,T})$, *а якщо, крім того,* ψ *не залежить від змінної* t *та* $u \in \mathrm{SV}(u_0,f,\psi)$, *то й* $u_t \in L^2(Q_{0,T})$.

Д о в е д е н н я. Нехай виконуються умови теореми і $\delta > 0$. Розглянемо формулу (13). У ній доданок, що містить A, є невід'ємним, оскільки A не залежить від t. Тому у формулі (15) не буде доданка з ε. Поділимо її на $\delta^2/2$ і спрямуємо δ до нуля. Одержимо нерівність

$$\int\limits_{\Omega_\tau} \left|u_t^{k,m}\right|^2 dx \le \int\limits_{\Omega} \left|u_t^{k,m}(0)\right|^2 dx + \int\limits_{Q_{0,\tau}} |f_t|^2\, dx\, dt +$$
$$+ k^2 \int\limits_{Q_{0,\tau}} |\psi_t|^2\, dx\, dt + 2\int\limits_{Q_{0,\tau}} \left|u_t^{k,m}\right|^2 dx\, dt\,, \qquad (25)$$

$\tau \in (0,T_2)$. З огляду на довільність T_2 можна вважати, що ця нерівність виконується і для всіх $\tau \in [0,T]$. Оскільки множина елементів $u_t^{k,m}(0) = f(0) - Au_0^m$, $k \in \mathbb{N}$, є обмеженою в $L^2(\Omega)$, то на підставі леми Ґронуола – Беллмана після деяких перетворень отримаємо оцінку

$$\int\limits_{Q_{0,T}} \left|u_t^{k,m}\right|^2 dx\, dt \le C_{10}\left(1 + \int\limits_{Q_{0,T}} |f_t|^2\, dx\, dt + k^2 \int\limits_{Q_{0,T}} |\psi_t|^2\, dx\, dt\right), \qquad (26)$$

де стала $C_{10} > 0$ не залежить від k, m. Отже, послідовність $\{u_t^{k,m}\}_{m\in N}$ є обмеженою в просторі $L^2(Q_{0,T})$, а тому $u_t^k \in L^2(Q_{0,T})$. Якщо, крім того, ψ не залежить від t, то $\psi_t = 0$ і тому з попередньої оцінки та леми 5.3 [8, с. 20] після граничного переходу при $m \to \infty$ не складно отримати, що

$$\int\limits_{Q_{0,T}} \left|u_t^k\right|^2 dx\,dt \le C_{10}\left(1 + \int\limits_{Q_{0,T}} |f_t|^2\,dx\,dt\right). \tag{27}$$

Тоді послідовність $\{u_t^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ є обмеженою в просторі $L^2(Q_{0,T})$, а тому $u_t \in \in L^2(Q_{0,T})$. Теорему доведено. ◊

Зауваження 7. Оскільки при прийнятих припущеннях варіаційна нерівність (1) не може мати більше одного розв'язку, то кожна слабко збіжна підпослідовність з $\{u^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ збігається до тієї ж самої функції u (див. лему 5.4 [8, с. 20]). Тому і вся послідовність слабко збігається до цієї ж функції. Отже, $u^k \to u$ слабко в $U(Q_{0,T})$, $Au^k \to Au$ слабко в $[U(Q_{0,T})]^*$ при $k \to \to \infty$, а при виконанні всіх умов теореми 4 і $u_t^k \to u_t$ слабко в $L^2(Q_{0,T})$ при $k \to \infty$. У цьому випадку можна виділити підпослідовність (див. теорему 5.1 [10, с. 70] та лему 1.18 [8, с. 39]), яка збігатиметься до u сильно в $L^p\big(0,T;\,L^2(\Omega)\big)$, а тому і в $L^{\min\{p,2\}}(Q_{0,T})$ та майже скрізь в $Q_{0,T}$.

Теорема 5. *Нехай* $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $u_0^1, u_0^2 \in K$, $\psi_1, \psi_2, f_1, f_2 \in L^2(Q_{0,T})$, *виконуються умови* **(Q)–(G)**, $u_1^k \in \mathrm{SP}(k, u_0^1, f_1, \psi_1)$, $u_2^k \in \mathrm{SP}(k, u_0^2, f_2, \psi_2)$ *і, крім того,* $(u_1^k)_t, (u_2^k)_t \in L^2(Q_{0,T})$. *Тоді з оцінок* $u_0^1 \le u_0^2$, $f_1 \le f_2$, $\psi_1 \le \psi_2$ *випливає, що* $u_1^k \le u_2^k$.

Д о в е д е н н я. Нехай виконуються умови теореми. Оскільки $u_i^k \in \in \mathrm{SP}(k, u_0^i, f_i, \psi_i)$, то виконуються рівності

$$\left\langle u_{i,t}^k(t) + A(t)u_i^k(t) + k(u_i^k(t) - \psi_i(t))^+, v\right\rangle_V =$$
$$= \left\langle f_i(t), v\right\rangle_V, \qquad t \in (0,T), \qquad i = 1,2.$$

Віднімемо одержані рівності (для зручності далі писатимемо w_1, w_2 замість u_1^k, u_2^k), покладемо $v = \big(w_1(t) - w_2(t)\big)^+$ і результат зінтегруємо за $t \in (0,\tau) \subset \subset [0,T]$. Одержимо рівність

$$J_1 + J_2 + J_3 = J_4, \tag{28}$$

де

$$J_1 = \int\limits_0^\tau \left\langle w_{1,t}(t) - w_{2,t}(t), \big(w_1(t) - w_2(t)\big)^+\right\rangle_V dt,$$

$$J_2 = \int\limits_0^\tau \left\langle A(t)w_1(t) - A(t)w_2(t), \big(w_1(t) - w_2(t)\big)^+\right\rangle_V dt,$$

$$J_3 = k\int\limits_0^\tau \left\langle \big(w_1(t) - \psi_1(t)\big)^+ - \big(w_2(t) - \psi_2(t)\big)^+, \big(w_1(t) - w_2(t)\big)^+\right\rangle_V dt,$$

$$J_4 = \int\limits_0^\tau \left\langle f_1(t) - f_2(t), \big(w_1(t) - w_2(t)\big)^+\right\rangle_V dt, \qquad \tau \in (0,T].$$

Оцінимо отримані інтеграли. Використавши зауваження 5 та умову $u_0^1 \le u_0^2$, одержимо

$$J_1 = \int\limits_{Q_{0,\tau}} (w_1 - w_2)_t (w_1 - w_2)^+ \, dx\, dt = \int\limits_{Q_{0,\tau}} \left((w_1 - w_2)^+\right)_t (w_1 - w_2)^+ \, dx\, dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_\tau} \left|(w_1 - w_2)^+\right|^2 dx, \qquad \tau \in (0,T].$$

Крім того, з зауважень 2 і 5 випливає, що

$$J_2 = \int\limits_{Q_{0,\tau}} \left[\sum_{i=1}^{n} a_i \left(\left|w_{1,x_i}\right|^{p-2} w_{1,x_i} - \left|w_{2,x_i}\right|^{p-2} w_{2,x_i} \right) ((w_1 - w_2)^+)_{x_i} + \right.$$

$$+ b(|w_1|^{p-2} w_1 - |w_2|^{p-2} w_2)(w_1 - w_2)^+ +$$

$$\left. + g(|w_1|^{q(x)-2} w_1 - |w_2|^{q(x)-2} w_2)(w_1 - w_2)^+ \right] dx\, dt =$$

$$= \int\limits_{Q_{0,\tau} \cap \{w_1 - w_2 > 0\}} \left[\sum_{i=1}^{n} a_i (|w_{1,x_i}|^{p-2} w_{1,x_i} - |w_{2,x_i}|^{p-2} w_{2,x_i}) \times \right.$$

$$\times (w_{1,x_i} - w_{2,x_i}) + b(|w_1|^{p-2} w_1 - |w_2|^{p-2} w_2)(w_1 - w_2) +$$

$$\left. + g(|w_1|^{q(x)-2} w_1 - |w_2|^{q(x)-2} w_2)(w_1 - w_2) \right] dx\, dt \geq 0.$$

Зрозуміло, що $J_3 = J_5 + J_6$, де

$$J_5 = k\int_0^\tau \left\langle (w_1(t) - \psi_1(t))^+ - (w_2(t) - \psi_1(t))^+, (w_1(t) - w_2(t))^+ \right\rangle_V dt,$$

$$J_6 = k\int_0^\tau \left\langle (w_2(t) - \psi_1(t))^+ - (w_2(t) - \psi_2(t))^+, (w_1(t) - w_2(t))^+ \right\rangle_V dt.$$

Розглянемо функцію $\varphi(r) = (r - s)^+$, $r \in \mathbb{R}$. Вона монотонно неспадна на $\mathbb{R}$ для всіх фіксованих $s \in \mathbb{R}$, а тому із зауваження 6 випливає оцінка

$$J_5 = k \int\limits_{Q_{0,\tau}} ((w_1 - \psi_1)^+ - (w_2 - \psi_1)^+)(w_1 - w_2)^+ \, dx\, dt \geq 0, \qquad \tau \in (0,T].$$

Розглянемо функцію $y(s) = -(r - s)^+$, $s \in \mathbb{R}$. Вона неспадна на $\mathbb{R}$ для всіх фіксованих $r \in \mathbb{R}$, тому $y(s_2) - y(s_1) \geq 0$ для довільних $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ таких, що $s_2 \geq s_1$. Оскільки з умови теореми $\psi_2 \geq \psi_1$, то

$$J_6 = k \int\limits_{Q_{0,\tau}} ([-(w_2 - \psi_2)^+] - [-(w_2 - \psi_1)^+])(w_1 - w_2)^+ \, dx\, dt \geq 0, \quad \tau \in (0,T].$$

Оскільки $f_1 \leq f_2$, то $J_4 = \int\limits_{Q_{0,\tau}} (f_1 - f_2)(w_1 - w_2)^+ \, dx\, dt \leq 0$. Отже, рівність (28) набуде вигляду $J_1 \leq 0$, тобто $\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_\tau} \left|(w_1 - w_2)^+\right|^2 dx \leq 0$, $\tau \in (0,T]$. Тому $(w_1 - w_2)^+ = 0$, тобто $w_1 \leq w_2$ і теорему доведено. ◊

Наслідок 1. *Нехай виконуються умови* **(Q)–(U)**, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $u^k \in \mathrm{SP}(k, u_0, f, \psi)$, $u_t^k \in L^2(Q_{0,T})$. *Якщо* $u_0 \geq 0$, $f \geq 0$, $\psi \geq 0$, то $u^k \geq 0$.

Це твердження зразу випливає з теореми 5, оскільки $0 \in SP(k, 0, 0, 0)$.

Теорема 6. *Нехай виконуються умови* **(Q)–(U)** *і* $u^k \in \mathrm{SP}(k, u_0, f, \psi)$, *де* $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. *Тоді*

$$u^0 \geq u^1 \geq \ldots \geq u^k \geq \ldots \geq 0.$$

Д о в е д е н н я. Нехай виконуються умови теореми. Для початку покажемо, що $u^1 \leq u^0$. Візьмемо в (4), домноженій на $v = (u^1 - u^0)^+$, функцію $u = u^1$, а потім $u = u^0$, віднімемо одержані рівності та результат зінтегруємо за $t \in (0, \tau) \subset [0, T]$. Одержимо, що

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0,$$

де

$$I_1 = \int_0^\tau \left\langle u_t^1(t) - u_t^0(t), (u^1(t) - u^0(t))^+ \right\rangle_V dt,$$

$$I_2 = \int_0^\tau \left\langle A(t)u^1(t) - A(t)u^0(t), (u^1(t) - u^0(t))^+ \right\rangle_V dt,$$

$$I_3 = \int_0^\tau \left\langle 1 \cdot (u^1(t) - \psi(t))^+ - 0 \cdot (u^0(t) - \psi(t))^+, (u^1(t) - u^0(t))^+ \right\rangle_V dt, \quad \tau \in (0, T].$$

Аналогічно, як і в теоремі 5, отримаємо, що $I_1 = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_\tau} \left|(u^1 - u^0)^+\right|^2 dx$, $I_2 \geq 0$. Крім того,

$$I_3 = \int\limits_{Q_{0,\tau}} (u^1(t) - \psi(t))^+ (u^1(t) - u^0(t))^+ dt \geq 0,$$

оскільки підінтегральна функція є невід'ємною. Таким чином,

$$\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_\tau} \left|(u^1 - u^0)^+\right|^2 dx \leq 0, \qquad \tau \in (0, T].$$

Тому $(u^1 - u^0)^+ = 0$, тобто $u^1 \leq u^0$.

Тепер нехай $k \in \mathbb{N}$. Покажемо, що $u^{k+1} \leq u^k$. Аналогічно до попереднього випадку

$$\int_0^\tau \left\langle (u^{k+1}(t) - u^k(t))_t, (u^{k+1}(t) - u^k(t))^+ \right\rangle_V dt +$$

$$+ \int_0^\tau \left\langle A(t)u^{k+1}(t) - A(t)u^k(t), (u^{k+1}(t) - u^k(t))^+ \right\rangle_V dt +$$

$$+ \int_0^\tau \Big\langle (k+1)(u^{k+1}(t) - \psi(t))^+ -$$

$$- k(u^k(t) - \psi(t))^+, (u^{k+1}(t) - u^k(t))^+ \Big\rangle_V dt = 0, \qquad \tau \in (0, T],$$

тобто

$$\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_\tau} \left|(u^{k+1} - u^k)^+\right|^2 dx + J \leq 0, \qquad \tau \in (0, T], \tag{29}$$

де

$$J = \int\limits_{Q_{0,\tau}} ((k+1)(u^{k+1} - \psi)^+ - k(u^k - \psi)^+)(u^{k+1} - u^k)^+ dx\, dt, \qquad \tau \in (0, T).$$

Зрозуміло, що

$$J = \int\limits_{Q_{0,\tau}} \big((k+1)(u^{k+1}-\psi)^+ - k(u^k-\psi)^+\big)(u^{k+1}-u^k)^+\,dx\,dt =$$

$$= k \int\limits_{Q_{0,\tau}} \big((u^{k+1}-\psi)^+ - (u^k-\psi)^+\big)(u^{k+1}-u^k)^+\,dx\,dt +$$

$$+ \int\limits_{Q_{0,\tau}} (u^{k+1}-\psi)^+(u^{k+1}-u^k)^+\,dx\,dt\,.$$

До першого доданка застосуємо зауваження 6 і одержимо, що

$$J \ge \int\limits_{Q_{0,\tau}} (u^{k+1}-\psi)^+(u^{k+1}-u^k)^+\,dx\,dt, \qquad \tau \in (0,T]\,.$$

Оскільки підінтегральна функція в інтегралі справа є невід'ємною, то $J \ge 0$. Тоді нерівність (29) набуде вигляду

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} \left|(u^{k+1}-u^k)^+\right|^2 dx \le 0, \qquad \tau \in (0,T]\,.$$

Тому $(u^{k+1}-u^k)^+ = 0$, тобто $u^{k+1} \le u^k$, і, враховуючи наслідок 1, теорему доведено. ◊

Наведемо ще одне просте допоміжне твердження.

Лема 2. *Нехай* $G \subset \mathbb{R}^r$ *– область,* $r \ge 1$. *Якщо майже скрізь в області* G *виконуються умови:* $u^m \to u$ *та* $v^m \to v$ *при* $m \to \infty$, $u^m \le v^m$ *для* $m \in \mathbb{N}$, *то* $u \le v$ *майже скрізь на* G.

Д о в е д е н н я. Нехай виконуються умови леми, $y \in G$ – така точка, що $u^m(y) \to u(y)$, $v^m(y) \to v(y)$ при $m \to \infty$, $u^m(y) \le v^m(y)$ для $m \in \mathbb{N}$. Тоді $u(y) \le v(y)$. Припустивши протилежне, маємо

$$0 < u(y) - v(y) = u(y) - u^m(y) + u^m(y) - v^m(y) + v^m(y) - v(y) \le$$

$$\le u(y) - u^m(y) + v^m(y) - v(y) \le$$

$$\le \left|u(y) - u^m(y)\right| + \left|v^m(y) - v(y)\right| \to 0$$

при $m \to \infty$. Отримана суперечність і доводить лему. ◊

Наслідок 2. *Нехай виконуються умови* **(Q)–(U)**, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $u^k \in \mathrm{SP}(k, u_0, f, \psi)$, *і* $\{u^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *(можливо, і при переході до підпослідовності) збігається до функції* $u \in \mathrm{SV}(u_0, f, \psi)$ *майже скрізь в* $Q_{0,T}$ *(див. зауваження 7). Якщо* $u_0 \ge 0$, $f \ge 0$, $\psi \ge 0$, *то з наслідку* 1, *теореми* 6 *і леми* 2 *випливає, що* $u^0 \ge u^1 \ge \ldots \ge u^k \ge \ldots \ge u \ge 0$.

1. *Бенсусан А., Лионс Ж.-Л.* Импульсное управление и квазивариационные неравенства. – Москва: Наука, 1987. – 600 с.
2. *Бугрій О. М.* Параболічні варіаційні нерівності в узагальнених просторах Лебега // Наук. зап. Вінницьк. держ. пед. ун-ту ім. М. Коцюбинського. Сер. Фізика і математика. – 2002. – Вип. 1. – С. 310–321.
3. *Бугрій О. М.* Про задачі з однорідними граничними умовами для нелінійних рівнянь з виродженням // Укр. мат. вісн. – 2008. – **5**, № 4. – С. 435–469.
4. *Бугрій О. М.* Скінченність часу стабілізації розв'язку нелінійної параболічної варіаційної нерівності зі змінним степенем нелінійності // Мат. студії. – 2005. – **24**, № 2. – С. 167–172.
5. *Бугрій О. М., Лавренюк С. П.* Параболічна варіаційна нерівність, що узагальнює рівняння політропної фільтрації // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 7. – С. 867–878.

Те саме: *Buhrii O. M., Lavrenyuk S. P.* On a parabolic variational inequality that generalizes the equation of polytropic filtration // Ukr. Math. J. – 2001. – **53**, No. 7. – P. 1027–1042.
6. *Бугрій О. М., Панат О. Т.* Деякі властивості розв'язків параболічних варіаційних нерівностей зі змінним степенем нелінійності // Мат. методи та фіз.-мех. Поля. – 2006. – **49,** № 2. – С. 99–107.
7. *Бугрій О., Лавренюк С.* Мішана задача для параболічного рівняння, яке узагальнює рівняння політропної фільтрації // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2000. – Вип. 56. – С. 33–43.
8. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – Москва: Мир, 1978. – 336 с.
9. *Киндерлерер Д., Стампаккья Г.* Введение в вариационные неравенства и их приложения. – Москва: Мир, 1983. – 256 с.
10. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейних краевых задач. – Москва: Мир, 1972. – 588 с.
11. *Шарапудинов И. И.* О топологии пространства $L^{p(t)}([0,1])$ // Мат. заметки. – 1979. – **26**, № 4. – С. 613–632.
12. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Второй специальный курс. – Москва: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1984. – 208 с.
13. *Besenyei A.* On nonlinear parabolic variational inequalities containing nonlocal terms // Acta Math. Hungar. – 2007. – **116**, No. 1-2. – P. 145–162.
14. *Buhrii O. M., Mashiev R. A.* Uniqueness of solutions of the parabolic variational inequality with variable exponent of nonlinearity // Nonlinear Anal. – 2009. – **70**. – P. 2325–2331.
15. *Kováčik O., Rákosnik J.* On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{l,p(x)}$ // Czechosl. Math. J. – 1991. – **41**, No. 4. – P. 592–618.
16. *Musielak J.* Orlicz spaces and modular spaces. – Berlin–Heidelberg: Springer, 1983. – 222 p. – Lect. Notes Math. – **1034**.
17. *Nagase H.* On a few properties of solutions of nonlinear parabolic variational inequalities // Nonlinear Anal. – 2001. – **47**. – P. 1659–1669.
18. *Orlicz W.* Über konjugierte Exponentenfolgen // Studia Math. (Lwow). – 1931. – **3**. – P. 200–211.
19. *Rudd M., Schmitt K.* Variational inequalities of elliptic and parabolic type // Taiwanese J. Math. – 2002. – **6**, No. 3. – P. 287–322.

НЕКОТОРЫЕ ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ ВАРИАЦИОННЫЕ НЕРАВЕНСТВА С ПЕРЕМЕННОЙ СТЕПЕНЬЮ НЕЛИНЕЙНОСТИ: ОДНОЗНАЧНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ И ТЕОРЕМЫ СРАВНЕНИЯ

Рассматриваются параболические вариационные неравенства в пространствах Соболева и обобщённых пространствах Лебега. Найдены достаточные условия существования и единственности решений этих неравенств. Также доказаны некоторые теоремы сравнения.

SOME PARABOLIC VARIATIONAL INEQUALITIES WITH VARIABLE DEGREE OF NONLINEARITY: UNIQUE SOLVABILITY AND COMPARISON THEOREMS

Some parabolic variational inequalities in Sobolev spaces and generalized Lebesque spaces are considered. The existence and uniqueness conditions for solution of these inequalities are obtained. Some comparison theorems are also proved.

Львів. нац. ун-т імені Івана Франка, Львів

Одержано
01.12.08