УДК 512.64

В. П. Щедрик

ПЕРЕТВОРЮВАЛЬНІ МАТРИЦІ ТА ПОРОДЖЕНІ НИМИ ДІЛЬНИКИ

Над комутативною областю елементарних дільників кожна матриця є добутком оборотних матриць і певної діагональної матриці, які відповідно називають перетворювальними матрицями та канонічною діагональною формою. Встановлено необхідні та достатні умови, коли за допомогою лише перетворювальних матриць описуються всі дільники матриці, які мають наперед задану канонічну діагональну форму.

Нехай R − комутативна область елементарних дільників [9]. Кожна $(n \times n)$-матриця A над R може бути записана у вигляді $A = P^{-1}\Psi Q^{-1}$, де P та Q − оборотні матриці, а $\Psi = \operatorname{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, $\varepsilon_i \mid \varepsilon_{i+1}$, $i = 1, \ldots, n-1$. При цьому матриці P, Q називають перетворювальними матрицями, Ψ − канонічною діагональною формою (к. д. ф.), а елементи ε_i − інваріантними множниками матриці A.

Відомо [2, 4, 10, 11], що, коли $A = BC$ і Φ − к. д. ф. матриці B, то $\Phi \mid \Psi$. Тому природно класифікувати дільники матриці A, як це запропонував З. І. Боревич [1], за їхніми к. д. ф.: розглядаючи задачу опису дільників матриці A, спершу зображати матрицю Ψ у вигляді $\Psi = \Phi\Delta$, де $\Phi = \operatorname{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, $\varphi_i \mid \varphi_{i+1}$, $i = 1, \ldots, n-1$, і вже після цього шукати всі дільники матриці A з к. д. ф. Φ. Оскільки

$$A = P^{-1}\Psi Q^{-1} = \left(P^{-1}\Phi\right)\left(\Delta Q^{-1}\right),$$

то матриця $P^{-1}\Phi$ є лівим дільником матриці A з к. д. ф. Φ. Більше того, оскільки

$$A = \left(P^{-1}\Phi\right)\left(\Delta Q^{-1}\right) = \left(P^{-1}\Phi U^{-1}\right)\left(U\Delta Q^{-1}\right),$$

де $U \in GL_n(R)$, то кожна матриця $P^{-1}\Phi U^{-1}$ також буде лівим дільником матриці A. Зауважимо, що перетворювальна матриця P визначена неоднозначно, і згідно з [3, 11] множина всіх таких матриць має вигляд $\mathbf{P}_A = \mathbf{G}_\Psi P$, де

$$\mathbf{G}_\Psi = \{H \in GL_n(R) \mid H\Psi = \Psi H_1, \quad H_1 \in GL_n(R)\},$$

і є мультиплікативною групою, яка за умови $\det \Psi \neq 0$ складається з усіх оборотних матриць вигляду

$$\begin{Vmatrix} h_{11} & h_{12} & \ldots & h_{1,n-1} & h_{1n} \\ \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} h_{21} & h_{22} & \ldots & h_{2,n-1} & h_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_1} h_{n1} & \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_2} h_{n2} & \ldots & \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n-1}} h_{n,n-1} & h_{nn} \end{Vmatrix}.$$

Зі сказаного випливає, що $\mathbf{P}_A^{-1}\Phi GL_n(R)$ є множиною лівих дільників матриці A з к. д. ф. Φ. Природно постає питання − чи ця множина описує всі ліві дільники матриці A з к. д. ф. Φ. Взагалі кажучи, відповідь є негативною. В. М. Петричкович [5, 6], досліджуючи факторизацію матриць над адекватними областями [8], тобто областями цілісності, в яких кожний скінченно породжений ідеал є головним, і для кожного ненульового елемента a

і кожного елемента b існують такі елементи c, d, що $a = cd$, причому c – взаємно простий з b, а кожний необоротний дільник d_i елемента d має необоротний спільний дільник із b, навів контрприклад на цю гіпотезу і вказав необхідні та достатні умови її виконання. З огляду на трудність перевірки вказаних умов, був сенс у продовженні вивчення цього питання. Наслідком таких досліджень стало як формулювання простих у перевірці необхідних і достатніх умов, так і поширення отриманих результатів на більш загальні класи областей елементарних дільників.

Згідно з [11] множина всіх лівих дільників матриці A з к. д. ф. Φ має вигляд $(\mathbf{L}(\Psi,\Phi)P)^{-1}\Phi GL_n(R)$, де $\mathbf{L}(\Psi,\Phi)$ – множина оборотних матриць вигляду

$$\left\| \begin{matrix} \ell_{11} & \ell_{12} & \cdots & \ell_{1,n-1} & \ell_{1n} \\ \dfrac{\varphi_2}{(\varphi_2,\varepsilon_1)}\ell_{21} & \ell_{22} & \cdots & \ell_{2,n-1} & \ell_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_1)}\ell_{n1} & \dfrac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_2)}\ell_{n2} & \cdots & \dfrac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_{n-1})}\ell_{n,n-1} & \ell_{nn} \end{matrix} \right\|,$$

яка має властивість $\mathbf{L}(\Psi,\Phi) = \mathbf{G}_\Phi \mathbf{L}(\Psi,\Phi)\mathbf{G}_\Psi$. Таким чином, наша задача зводиться до встановлення таких умов, при яких

$$\mathbf{P}_A^{-1}\Phi GL_n(R) = (\mathbf{L}(\Psi,\Phi)P)^{-1}\Phi GL_n(R).$$

Теорема 1. *Множина* $\mathbf{P}_A^{-1}\Phi GL_n(R)$ *складається з усіх лівих дільників матриці* $A = P^{-1}\Psi Q^{-1}$ *з канонічною діагональною формою* Φ *тоді й тільки тоді, коли*

$$\mathbf{L}(\Psi,\Phi) = \mathbf{G}_\Phi \mathbf{G}_\Psi .$$

Д о в е д е н н я. *Необхідність*. Нехай

$$(\mathbf{L}(\Psi,\Phi)P)^{-1}\Phi GL_n(R) = \mathbf{P}_A^{-1}\Phi GL_n(R).$$

Це означає, що для кожної матриці L із $\mathbf{L}(\Psi,\Phi)$ та V із $GL_n(R)$ існують такі матриці $P_1 \in \mathbf{P}_A$ і $U \in GL_n(R)$, що $(LP)^{-1}\Phi V = P_1^{-1}\Phi U$. Оскільки $\mathbf{P}_A = \mathbf{G}_\Psi P$, то в групі $\mathbf{G}_\Psi$ існує така матриця K, що $P_1 = KP$. Отже, $(LP)^{-1}\Phi V = (KP)^{-1}\Phi U$. Звідси $(KL^{-1})\Phi = \Phi(UV^{-1})$. Це означає, що $KL^{-1} = H \in \mathbf{G}_\Phi$, тобто $L = H^{-1}K$. Зваживши на те, що $H^{-1} \in \mathbf{G}_\Phi$, отримуємо $L \in \mathbf{G}_\Phi \mathbf{G}_\Psi$. Отже, $\mathbf{L}(\Psi,\Phi) \subseteq \mathbf{G}_\Phi \mathbf{G}_\Psi$.

Нехай $H \in \mathbf{G}_\Phi$, $K \in \mathbf{G}_\Psi$. Оскільки $\Psi = \Phi\Delta$, то виконуються такі рівності

$$(HK)\Psi = H\Psi K_1 = H\Phi\Delta K_1 = \Phi(H_1\Delta K_1),$$

тобто $HK \in \mathbf{L}(\Psi,\Phi)$. Тому $\mathbf{G}_\Phi \mathbf{G}_\Psi \subseteq \mathbf{L}(\Psi,\Phi)$. Таким чином, $\mathbf{L}(\Psi,\Phi) = \mathbf{G}_\Phi \mathbf{G}_\Psi$.

Достатність. Маємо

$$(\mathbf{L}(\Psi,\Phi)P)^{-1}\Phi GL_n(R) = (\mathbf{G}_\Phi \mathbf{G}_\Psi P)^{-1}\Phi GL_n(R) =$$

$$= (\mathbf{G}_\Phi \mathbf{P}_A)^{-1}\Phi GL_n(R) = \mathbf{P}_A^{-1}\mathbf{G}_\Phi \Phi GL_n(R) = \mathbf{P}_A^{-1}\Phi GL_n(R). \quad \Diamond$$

Наслідок. *Якщо множина* $\mathbf{P}_A^{-1}\Phi GL_n(R)$ *складається з усіх лівих дільників неособливої матриці* $A = P^{-1}\Psi Q^{-1}$ *з канонічною діагональною формою* Φ *і* $A = BC$, *де* $B \sim \Phi$, *то* $C \sim \Delta$.

Д о в е д е н н я. Оскільки $B = (LP)^{-1}\Phi U^{-1}$, де $L \in \mathbf{L}(\Psi, \Phi)$, $U \in GL_n(R)$, причому згідно з теоремою 1 $L = HK$, де $H\Phi = \Phi H_1$, $K\Psi = \Psi K_1$, то $B = (HKP)^{-1}\Phi U^{-1}$. Тоді

$$A = P^{-1}\Psi Q^{-1} = P^{-1}K^{-1}K\Psi Q^{-1} = (KP)^{-1}\Psi K_1 Q^{-1} = (KP)^{-1}\Phi\Delta K_1 Q^{-1} =$$

$$= (KP)^{-1}H^{-1}H\Phi\Delta K_1 Q^{-1} = (HKP)^{-1}\Phi H_1\Delta K_1 Q^{-1} =$$

$$= ((HKP)^{-1}\Phi U^{-1})(UH_1\Delta K_1 Q^{-1}) = BC_1 .$$

Очевидно, що $C_1 \sim \Delta$. Оскільки матриця A − неособлива і $A = BC = DC_1$, то $C \sim C_1 \sim \Delta$. Це й потрібно було довести. ◊

Зауважимо, що аналогічний результат було отримано В. М. Петричковичем [5, 6] у випадку, коли R − область головних ідеалів та адекватна область.

Щоб сформулювати умову рівності множин $\mathbf{L}(\Psi, \Phi)$ і $\mathbf{G}_\Phi \mathbf{G}_\Psi$ на мові інваріантних множників, встановимо декілька допоміжних тверджень.

Лема 1. *Нехай нижня унітрикутна матриця F записується у вигляді*

$$F = HS . \tag{1}$$

де $H \in \mathbf{G}_\Phi$, $S \in \mathbf{G}_\Psi$. Тоді в групах $\mathbf{G}_\Phi, \mathbf{G}_\Psi$ існують відповідно такі нижні унітрикутні матриці H_1, S_1, що $F = HS$.

Д о в е д е н н я. Із рівності (1) випливає, що для матриці S у групі $\mathbf{G}_\Phi$ існує така матриця H, що матриця HS є нижньою унітрикутною матрицею. Тоді із властивості 2 роботи [7] випливає, що

$$\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}, \det S_i\right) = 1, \qquad i = 2, \dots, n ,$$

де S_i − матриця, отримана із матриці S викресленням перших її i рядків та i стовпців. З іншого боку, оскільки $S \in \mathbf{G}_\Psi$, то згідно з наслідками 2 і 3 із [7]

$$\left(\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_{i-1}}, \det S_i\right) = 1, \qquad i = 2, \dots, n .$$

Отже,

$$\left(\frac{\varepsilon_i \varphi_i}{\varepsilon_{i-1}\varphi_{i-1}}, \det S_i\right) = 1, \qquad i = 2, \dots, n . \tag{2}$$

Розглянемо d-матрицю $\Gamma = \operatorname{diag}(\varepsilon_1\varphi_1, \dots, \varepsilon_n\varphi_n)$. Із рівності (2) випливає, що в групі $\mathbf{G}_\Gamma$ існує така матриця K, що $KS = S_1$ є нижньою унітрикутною матрицею. Зауваживши, що $K \in \mathbf{G}_\Psi$ і $K \in \mathbf{G}_\Phi$, а, отже, $K^{-1} \in \mathbf{G}_\Phi$, отримуємо

$$F = HS = (HK^{-1})(KS) = H_1 S_1 ,$$

де $H_1 \in \mathbf{G}_\Phi$, $S_1 \in \mathbf{G}_\Psi$. Оскільки F і S_1 − нижні унітрикутні матриці, то такою ж буде і матриця H_1. ◊

Лема 2. *Нехай $(a_1, \dots, a_n) = 1$ і*

$$\left(\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_1}, a_n\right) = 1 .$$

Тоді в групі $\mathbf{G}_\Psi$ існує матриця з останнім стовпцем $\|a_1 \ \dots \ a_n\|^\top$ і визначником, що дорівнює одиниці.

Д о в е д е н н я. Нехай $n=2$. Оскільки $(a_1, a_2)=1$ і $\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}, a_2\right)=1$, то

$$\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}a_1, a_2\right)=1.$$

Тому існують такі u, v, що

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}a_1u+a_2v=1.$$

Тоді шуканою матрицею буде

$$\begin{Vmatrix} v & a_1 \\ -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}u & a_2 \end{Vmatrix}.$$

Припустимо, що це твердження правильне для всіх матриць порядку $\le n-1$. Нехай $(a_2, \dots, a_n)=\delta$. Тоді

$$\left(\frac{a_2}{\delta}, \dots, \frac{a_n}{\delta}\right)=1.$$

Оскільки $\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_2} \mid \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_1}$ і $\frac{a_n}{\delta} \mid a_n$, то $\left(\frac{a_n}{\delta}, \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_2}\right)=1$. За припущенням індукції в групі $\mathbf{G}_{\Psi_1}$ існує матриця вигляду

$$\begin{Vmatrix} u_{11} & \dots & u_{1,n-2} & \frac{a_2}{\delta} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n-1,1} & \dots & u_{n-1,n-2} & \frac{a_n}{\delta} \end{Vmatrix}=U_1.$$

Звідси випливає, що

$$\det\begin{Vmatrix} u_{11} & \dots & u_{1,n-2} & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n-1,1} & \dots & u_{n-1,n-2} & a_n \end{Vmatrix}=\delta.$$

Розглянемо матрицю

$$\begin{Vmatrix} x_1 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}x_2 & u_{11} & \dots & u_{1,n-2} & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_1}x_n & u_{n-1,1} & \dots & u_{n-1,n-2} & a_n \end{Vmatrix}=V,$$

де $x_1, \dots, x_n$ − невідомі. Тоді

$$\det V=x_1\delta-\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}x_2a_1\Delta_1+\dots+(-1)^{n+1}\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_1}x_na_1\Delta_{n-1},$$

де

$$\Delta_i=\begin{vmatrix} u_{11} & \dots & u_{1,n-2} \\ \dots & \dots & \dots \\ u_{i-1,1} & \dots & u_{i-1,n-2} \\ u_{i+1,1} & \dots & u_{i+1,n-2} \\ \dots & \dots & \dots \\ u_{n-1,1} & \dots & u_{n-1,n-2} \end{vmatrix}, \qquad i=1,\dots,n-1.$$

Оскільки

$$\begin{Vmatrix} u_{11} & \dots & u_{1,n-2} \\ \dots & \dots & \dots \\ u_{n-1,1} & \dots & u_{n-1,n-2} \end{Vmatrix}$$

є $(n-1)\times(n-2)$ -підматрицею оборотної матриці U_1 порядку $n-1$, то

$$(\Delta_1, \dots, \Delta_{n-1}) = 1.$$

Зваживши на те, що $\delta \mid a_n$ і $\left(\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_1}, a_n\right) = 1$, отримуємо $\left(\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_1}, \delta\right) = 1$. Звідси випливає, що $\left(\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_1}, \delta\right) = 1,\ i = 2, \dots, n$. Тоді

$$\left(\delta, \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} a_1\Delta_1, \dots, \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_1} a_1\Delta_{n-1}\right) = \left(\left(\delta, \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} a_1\Delta_1\right), \dots, \left(\delta, \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_1} a_1\Delta_{n-1}\right)\right) =$$

$$= (\delta, a_1\Delta_1, \dots, a_1\Delta_{n-1}) = (\delta, a_1(\Delta_1, \dots, \Delta_{n-1})) = (\delta, a_1) = 1.$$

Отже, існують такі $x_1 = v_1, \dots, x_n = v_n$, що $\det V = 1$. ◊

Лема 3. *Нехай* $\varphi_n \neq 0$ *і*

$$\frac{\varphi_i}{(\varphi_i, \varepsilon_j)} = \left(\frac{\varphi_i}{\varphi_j}, \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_j}\right), \qquad i = 2, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n-1, \quad i > j.$$

Тоді, якщо L *– нижня унітрикутна матриця із* $\mathbf{L}(\Psi, \Phi)$, *то в групах* $\mathbf{G}_\Phi$, $\mathbf{G}_\Psi$ *існують такі матриці* H, K, *що* $L = HK$.

Д о в е д е н н я. Нехай $n = 2$. Тоді

$$L = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ f_{21}\ell & 1 \end{Vmatrix}, \qquad f_{21} = \frac{\varphi_2}{(\varphi_2, \varepsilon_1)} = \left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}, \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right), \qquad \ell \in R.$$

В кільці R існують такі u, v, що

$$f_{21} = \frac{\varphi_2}{\varphi_1} u + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} v.$$

Тоді

$$L = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ f_{21}\ell & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\varphi_2}{\varphi_1} u\ell & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} v\ell & 1 \end{Vmatrix} = HK.$$

Отже, твердження справджується для матриць 2-го порядку. Припустимо його правильність для всіх матриць порядку $\leq n-1$ і розглянемо довільну нижню унітрикутну матрицю L із $\mathbf{L}(\Psi, \Phi)$

$$L = \left\Vert \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ f_{21}\ell_{21} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n-1,1}\ell_{n-1,1} & f_{n-1,2}\ell_{n-1,2} & \dots & 1 & 0 \\ \hline f_{n1}\ell_{n1} & f_{n2}\ell_{n2} & \dots & f_{n,n-1}\ell_{n,n-1} & 1 \end{array} \right\Vert = \begin{Vmatrix} L_{11} & \mathbf{0} \\ L_{21} & 1 \end{Vmatrix},$$

де $f_{ij} = \frac{\varphi_i}{(\varphi_i, \varepsilon_j)}$. Позначимо

$$\Phi_n = \operatorname{diag}(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}), \qquad \Psi_n = \operatorname{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}),$$

$$\Phi_1 = \operatorname{diag}(\varphi_2, \dots, \varphi_n), \qquad \Psi_1 = \operatorname{diag}(\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n).$$

Оскільки $L_{11} \in \mathbf{L}(\Psi_n, \Phi_n)$, то в групах $\mathbf{G}_{\Phi_n}$, $\mathbf{G}_{\Psi_n}$ існують відповідно такі нижні унітрикутні матриці H_1, K_1, що $L_{11} = H_1K_1$. Тоді виконується рівність

$$\left\| \begin{matrix} H_1^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{matrix} \right\| L \left\| \begin{matrix} K_1^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ f_{n1}\ell'_{n1} & f_{n2}\ell'_{n2} & \dots & f_{n,n-1}\ell'_{n,n-1} & 1 \end{array} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{matrix} 1 & \mathbf{0} \\ S_{21} & S_{22} \end{matrix} \right\| = S.$$

Зауваживши, що $S_{22} \in \mathbf{L}(\Psi_1, \Phi_1)$, згідно з припущенням індукції отримуємо, що в групах $\mathbf{G}_{\Phi_1}$, $\mathbf{G}_{\Psi_1}$ існують такі нижні унітрикутні матриці H_2, K_2, що $S_{22} = H_2 K_2$. Тоді

$$\left\| \begin{matrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & H_2^{-1} \end{matrix} \right\| S \left\| \begin{matrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & K_2^{-1} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ f_{n1}a & 0 & \dots & 0 & 1 \end{matrix} \right\|,$$

де $a \in R$. Оскільки $f_{n1} = \left(\frac{\varphi_n}{\varphi_1}, \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_1} \right)$, то в кільці R існують такі u_n, v_n, що

$$f_{n1} = \frac{\varphi_n}{\varphi_1} u_n + \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_1} v_n.$$

Тоді

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ f_{n1}a & 0 & \dots & 0 & 1 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \frac{\varphi_n}{\varphi_1} u_n a & 0 & \dots & 0 & 1 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_1} v_n a & 0 & \dots & 0 & 1 \end{matrix} \right\| =$$

$$= MN,$$

де $M \in \mathbf{G}_\Phi$, $N \in \mathbf{G}_\Psi$. Таким чином, виконується рівність

$$\left\| \begin{matrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & H_2^{-1} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} H_1^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{matrix} \right\| L \left\| \begin{matrix} K_1^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & K_2^{-1} \end{matrix} \right\| = MN,$$

тобто

$$L = \left(\left\| \begin{matrix} H_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & H_2 \end{matrix} \right\| M \right) \left(N \left\| \begin{matrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & K_2 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} K_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{matrix} \right\| \right) = HK,$$

де $H \in \mathbf{G}_\Phi$, $K \in \mathbf{G}_\Psi$. ◊

Теорема 2. *Нехай* R *− адекватна область і* Ψ *− неособлива матриця. Для того щоб* $\mathbf{L}(\Psi, \Phi) = \mathbf{G}_\Phi \mathbf{G}_\Psi$, *необхідно та достатньо, щоб*

$$\frac{\varphi_i}{(\varphi_i, \varepsilon_j)} = \left(\frac{\varphi_i}{\varphi_j}, \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_j} \right), \qquad i = 2, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n-1, \quad i > j.$$

Д о в е д е н н я. *Необхідність.* Нехай $n = 2$. Оскільки в множині $\mathbf{L}(\Psi, \Phi)$ існує матриця

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ f_{21} & 1 \end{matrix} \right\|, \qquad f_{21} = \frac{\varphi_2}{(\varphi_2, \varepsilon_1)},$$

то $F = HK$, де $H \in \mathbf{G}_\Phi$, $K \in \mathbf{G}_\Psi$. Згідно з лемою 1 матриці H та K можна вважати нижніми унітрикутними, тобто

$$\left\|\begin{matrix} 1 & 0 \\ f_{21} & 1 \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} 1 & 0 \\ \frac{\varphi_2}{\varphi_1}h & 1 \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} 1 & 0 \\ \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}k & 1 \end{matrix}\right\|.$$

Отже,

$$f_{21} = \frac{\varphi_2}{\varphi_1}h + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}k.$$

Зауваживши, що $f_{21} \mid \frac{\varphi_2}{\varphi_1}$ і $f_{21} \mid \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$, отримуємо $f_{21} = \left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}, \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)$.

Припустимо, що твердження є правильним для всіх матриць порядку $\leq n-1$. Тоді із рівності $\mathbf{L}(\Psi_n, \Phi_n) = \mathbf{G}_{\Phi_n}\mathbf{G}_{\Psi_n}$ випливає, що

$$\frac{\varphi_i}{(\varphi_i, \varepsilon_j)} = \left(\frac{\varphi_i}{\varphi_j}, \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_j}\right), \qquad i = 2, \dots, n-1, \quad j = 1, \dots, n-2, \quad i > j.$$

Також із рівності $\mathbf{L}(\Psi_1, \Phi_1) = \mathbf{G}_{\Phi_1}\mathbf{G}_{\Psi_1}$ випливає, що

$$\frac{\varphi_i}{(\varphi_i, \varepsilon_j)} = \left(\frac{\varphi_i}{\varphi_j}, \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_j}\right), \qquad i = 3, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n, \quad i > j.$$

І для завершення доведення необхідності потрібно показати, що

$$f_{n1} = \frac{\varphi_n}{(\varphi_n, \varepsilon_1)} = \left(\frac{\varphi_n}{\varphi_1}, \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_1}\right).$$

У множині $\mathbf{L}(\Psi, \Phi)$ існує матриця

$$L = \left\|\begin{matrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ f_{n1} & 0 & \dots & 0 & 1 \end{matrix}\right\|,$$

яка згідно з припущенням теореми та леми 1 може бути записана у вигляді $L = HS$, де H і S − нижні унітрикутні матриці із груп $\mathbf{G}_\Phi$, $\mathbf{G}_\Psi$ відповідно. Тоді матриця S^{-1} має вигляд

$$S^{-1} = \left\|\begin{matrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ s_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n1} & s_{n2} & \dots & 1 \end{matrix}\right\|$$

і

$$H = \left\|\begin{matrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ h_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{n1} & h_{n2} & \dots & 1 \end{matrix}\right\| = LS^{-1} = \left\|\begin{matrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ s_{21} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n-1,1} & s_{n-1,2} & \dots & 1 & 0 \\ f_{n1} + s_{n1} & s_{n2} & \dots & s_{n,n-1} & 1 \end{matrix}\right\|.$$

З цієї рівності випливає, що

$$f_{n1} = h_{n1} - s_{n1}.$$

Оскільки $h_{n1} = \frac{\varphi_n}{\varphi_1}h'_{n1}$ і $s_{n1} = \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_1}s'_{n1}$, то $\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_1}, \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_1}\right) \mid f_{n1}$. Зауваживши також, що $f_{n1} \mid \left(\frac{\varphi_n}{\varphi_1}, \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_1}\right)$, отримуємо $f_{n1} = \left(\frac{\varphi_n}{\varphi_1}, \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_1}\right)$.

Достатність. Спершу покажемо, що для кожної матриці L із $\mathbf{L}(\Psi, \Phi)$ існують такі матриці $\overline{H} \in \mathbf{G}_\Phi$, та $\overline{K} \in \mathbf{G}_\Psi$, що $\overline{H}L\overline{K}$ буде нижньою унітрикутною матрицею.

Нехай $L = \left\| \ell_{ij} \right\|_1^2 \in \mathbf{L}(\Psi, \Phi)$. Оскільки $(\ell_{21}, \ell_{22}) = 1$, то існують такі u_1, u_2, що

$$u_1 \ell_{21} + u_2 \ell_{22} = 1,$$

причому згідно з [12] елемент u_2 виберемо так, щоб

$$\left(u_2, \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right) = 1.$$

На підставі леми 2 у групі $\mathbf{G}_\Psi$ існує матриця вигляду

$$\left\| \begin{matrix} k_1 & u_1 \\ \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} k_2 & u_2 \end{matrix} \right\| = \bar{K}.$$

Тоді

$$L\bar{K} = \left\| \begin{matrix} * & \ell'_{12} \\ * & 1 \end{matrix} \right\|.$$

Отже,

$$\left\| \begin{matrix} 1 & -\ell'_{12} \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\| L\bar{K} = \left\| \begin{matrix} e & 0 \\ * & 1 \end{matrix} \right\|,$$

де $e \in U(R)$. Таким чином,

$$\bar{H} = \left\| \begin{matrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} 1 & -\ell'_{12} \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\|.$$

Припустимо, що твердження є правильним для всіх матриць порядку $\le n-1$. Розглянемо матриці порядку n. Нехай $L = \left\| \ell_{ij} \right\|_1^n \in \mathbf{L}(\Psi, \Phi)$. Оскільки $(\ell_{n1}, \dots, \ell_{nn}) = 1$, то існують такі $u_1, \dots, u_n$, що

$$u_1 \ell_{n1} + \dots + u_n \ell_{nn} = 1,$$

причому елемент u_n виберемо таким чином, що $\left(u_n, \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_1} \right) = 1$.

На підставі леми 2 у групі $\mathbf{G}_\Psi$ існує матриця K_n з останнім стовпцем $\left\| u_1 \ \dots \ u_n \right\|^\top$. Тоді

$$LK_n = \left\| \begin{matrix} & \ell'_{1n} \\ & \dots \\ * & \ell'_{n-1,n} \\ & 1 \end{matrix} \right\|.$$

Отже,

$$\underbrace{\left\| \begin{matrix} 1 & 0 & \dots & 0 & -\ell'_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -\ell'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\ell'_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{matrix} \right\|}_{H_n} LK_n = \left\| \begin{matrix} L_{n-1} & \mathbf{0} \\ * & 1 \end{matrix} \right\| = L_n.$$

Оскільки $H_n \in \mathbf{G}_\Phi$, то $L_n \in \mathbf{L}(\Psi, \Phi)$. Тому $L_{n-1} \in \mathbf{L}(\Psi_n, \Phi_n)$. За припущенням індукції у групах $\mathbf{G}_{\Phi_n}$, $\mathbf{G}_{\Psi n}$ існують такі матриці H_{n-1}, K_{n-1}, що матриця $L'_{n-1} = H_{n-1} L_{n-1} K_{n-1}$ буде нижньою унітрикутною матрицею. Тоді матриця

$$\left(\begin{Vmatrix} H_{n-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{Vmatrix} H_n \right) L \left(K_n \begin{Vmatrix} K_{n-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{Vmatrix} \right) = \bar{H} L \bar{K}$$

буде нижньою унітрикутною матрицею, причому $\bar{H} \in \mathbf{G}_\Phi$, $\bar{K} \in \mathbf{G}_\Psi$. На підставі леми 3 матриця $\bar{H} L \bar{K}$ може бути записана у вигляді $\bar{H} L \bar{K} = H_1 K_1$, де $H_1 \in \mathbf{G}_\Phi$ і $K_1 \in \mathbf{G}_\Psi$. Таким чином, $L = (\bar{H}^{-1} H_1)(K_1 \bar{K}^{-1})$. Це й потрібно було довести. ◊

1. *Боревич З. И.* О факторизации матриц над кольцом главных идеалов // III Всесоюз. симп. по теории колец, алгебр и модулей, Тарту 21–24 сент. 1976 г.: Тез. докл. – Тарту: Тарт. ун-т, 1976. – С. 19.
2. *Забавский Б. В., Казимирский П. С.* Приведение пары матриц над адекватным кольцом к специальному треугольному виду применением идентичных односторонних преобразований // Укр. мат. журн. – 1984. – **36**, № 2. – С. 256–258.
   Те саме: *Zabavskii B. V., Kazimirskii P. S.* Reduction of a pair of matrices over an adequate ring to a special triangular form by means of the same one-sided transformations // Ukr. Math. J. – 1984. – **36**, No. 2. – P. 233–235.
3. *Зелиско В. Р.* О строении одного класса обратимых матриц // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1980. – Вып. 12. – С. 14–21.
4. *Петричкович В. М.* Звідність пар матриць узагальнено еквівалентними перетвореннями до трикутних і діагональних форм та їх застосування // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – **43,** № 2. – С. 15–22.
5. *Петричкович В. М.* Паралельні факторизації многочленних матриць // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 9. – С. 1228–1233.
   Те саме: *Petrychkovych V. M.* Parallel factorizations of polynomial matrices // Ukr. Math. J. – 1992. – **44**, No. 9. – P. 1123–1127.
6. *Петричкович В. М.* Про паралельні факторизації матриць над кільцями головних ідеалів // Мат. методи та фіз.-мех поля. – 1997. – **40**, № 4. – С. 96–100.
7. *Щедрик В. П.* Про один клас дільників матриць // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1997. – **40,** № 3. – С. 13–19.
   Те саме: *Shchedryk V. P.* On a class of divisors of matrices // J. Math. Sci. – 1999. – **96**, No. 2. – P. 2804–2810.
8. *Helmer O.* The elementary divisors theorem for certain rings without chain condition // Bull. Amer. Math. Soc. – 1943. – **49**. – P. 225–236.
9. *Kaplansky I.* Elementary divisor ring and modules // Trans. Amer. Math. Soc. – 1949. – **66. –** P. 464–491.
10. *Newman M.* Integral matrices. – New York: Acad. Press., 1972. – 224 p.
11. *Shchedryk V. P.* Factorization of matrices over elementary divisor domain // Algebra and Discrete Math. – 2009. – No. 2. – P. 79–99.
12. *Shchedryk V. P.* Some determinant properties of primitive matrices over Bezout *B*-domain // Algebra and Discrete Math. – 2005. – No. 2. – P. 46–57.

ПРЕОБРАЗУЮЩИЕ МАТРИЦЫ И ПОРОЖДЕННЫЕ ИМИ ДЕЛИТЕЛИ

Над коммутативной областью элементарных делителей каждая матрица является произведением обратимых матриц и некоторой диагональной матрицы, которые, соответственно, называются преобразующими матрицами и канонической диагональной формой. Указываются необходимые и достаточные условия, когда с помощью лишь преобразующих матриц описываются все делители матрицы, которые имеют наперед заданную каноническую диагональную форму.

TRANSFORMING MATRICES AND DIVISORS GENERATED BY THEM

Over commutative elementary divisor domain every matrix is the product of invertible matrices and some diagonal matrix, which, respectively, are called transforming matrices and a canonical diagonal form. The necessary and sufficient conditions are established when all the divisors of matrix, which have given beforehand diagonal canonical form are described by using only transforming matrices.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
23.08.09