УДК 519.6: 517.925

Ф. В. Чабан[1], Г. А. Шинкаренко[1,2]

АПОСТЕРІОРНІ ОЦІНЮВАЧІ ПОХИБОК СКІНЧЕННОЕЛЕМЕНТНИХ АПРОКСИМАЦІЙ ДЛЯ ЗАДАЧІ ПРО ВИМУШЕНІ ГАРМОНІЧНІ КОЛИВАННЯ П'ЄЗОЕЛЕКТРИКІВ

Сформульовано варіаційну задачу про відшукання амплітуди вектора швидкостей пружних зміщень і електричного потенціалу п'єзоелектрика з митєвою пам'яттю, який здійснює усталені вимушені коливання під впливом гармонічних навантажень заданої кругової частоти. Встановлено умови коректності цього класу задач і знайдено апріорні оцінки збіжності апроксимацій методу скінченних елементів до їхніх розв'язків. Побудовано апостеріорні оцінювачі похибок апроксимацій методу скінченних елементів, які дозволяють знайти розподіл енергетичних норм похибок шляхом розв'язування локальних задач про нев'язку апроксимації на кожному скінченному елементі тріангуляції. Алгоритм обчислення оцінювачів такого ґатунку детально описано для двовимірних задач як для трикутних, так і чотирикутних скінченних елементів і допускає поширення на тривимірний випадок. Ефективність і надійність оцінювача кусково-білінійних апроксимацій методу скінченних елементів проілюстровано числовими розв'язками модельної задачі.

Апроксимації методу скінченних елементів (МСЕ), які описують поведінку п'єзоелектриків з великими значеннями частот вимушених усталених коливань, часто характеризуються втратою стійкості (а, отже, й точності) обчислень. Ці дефекти комп'ютерного моделювання сигналізують про нездатність вибраних розрахункових сіток до відтворення ускладнених структур розв'язків розглядуваних задач і, як правило, приводять до надлишкових трудомістких витрат обчислювальних експериментів. З огляду на ці факти актуальними стають питання: поглибленого аналізу використаних математичних моделей п'єзоелектрики стосовно коректності формулювань і регулярності їхніх розв'язків; збіжності послідовності апроксимацій МСЕ; надійного обчислення наближень їхніх розв'язків, зокрема, із наперед заданою точністю.

Метою цієї статті є дати відповіді на вищезгадані питання. У **п. 1** наводимо варіаційне формулювання задачі про динамічну взаємодію фізико-механічних полів у п'єзоелектриках, запозичене нами із праць [5, 6]. У **п. 2** будуємо відповідну їй варіаційну задачу про амплітуди швидкостей зміщень та електричного потенціалу п'єзоелектрика, що виникають за умов усталених вимушених гармонічних навантажень заданої частоти.

У спосіб, подібний до [6], у **п. 3** встановлюємо умови коректності розглядуваної варіаційної задачі про усталені коливання і характеризуємо її структуру за допомогою еквівалентної задачі про сідлову точку квадратичного функціонала.

У **п. 4** за допомогою дискретизації Гальоркіна описуємо класичну схему МСЕ і, наслідуючи міркування [6] за звичайних допущень щодо регулярності шуканого розв'язку та вибраних просторів апроксимації, надаємо апріорні оцінки швидкості збіжності послідовності наближень методу скінченних елементів.

У **п. 5** формулюємо варіаційну задачу про похибку знайденої апроксимації МСЕ і, залишаючись в умовах класичної схеми Гальоркіна, подаємо задачу про її наближене розв'язування, яке приводить до апостеріорного оцінювача похибки (АОП) знайденої апроксимації МСЕ.

В наступному пункті наводимо деякі числові результати, які характеризують сконструйовану схему з використанням кусково-білінійних апроксимацій швидкості і потенціалу та кусково-біквадратичного апостеріорного оцінювача їх похибок.

1. Формулювання варіаційної задачі динаміки п'єзоелектриків. Нехай п'єзоелектрик займає обмежену зв'язну область Ω точок $x=(x_1,\dots,x_d)$ з евклідового простору $\mathbb{R}^d$, з неперервною за Ліпшицем границею $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_\sigma = \Gamma_p \cup \Gamma_e \cup \Gamma_d$ та одиничним вектором зовнішньої нормалі $n = (n_1,\dots,n_d)$, де $n_i = \cos(n, x_i)$. Вважаємо, що на п'єзоелектрик діють зовнішні та внутрішні механічні та електричні навантаження, які в кожен момент часу $t \in [0,T]$, $0 < T < +\infty$, описуються лінійними функціоналами $\ell(t)$ і $r(t)$ відповідно. Будемо припускати, що частина його поверхні Γ_u жорстко защемлена, а частина Γ_p – заземлена, і початковий стан розглядуваного п'єзоелектрика характеризується заданими векторами пружних зміщень $u_0 = u_0(x)$, їхніх швидкостей $v_0 = v_0(x)$ і розподілом електричного потенціалу $p_0 = p_0(x)$. За деталями стосовно фізико-механічних характеристик п'єзоелектриків і постановки початково-крайових задач відсилаємо читача до монографій [1, 3, 4, 10, 11] і статей [5, 6].

Для формулювання варіаційної задачі введемо простори допустимих пружних зміщень та електричних потенціалів

$$V = \left\{ v \in \left[H^1(\Omega)\right]^d : v = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_u \right\},$$

$$Q = \left\{ q \in H^1(\Omega) : q = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_p,\ q = \text{const} \quad \text{на} \quad \Gamma_e \right\} \tag{1}$$

відповідно і позначимо $\Phi := V \times Q$ і спряжений до нього простір через $\Phi' := V' \times Q'$. На підставі початково-крайової задачі динаміки п'єзоелектриків [5, 6] сформулюємо відповідну їй варіаційну постановку:

$$\textit{задано} \qquad \psi_0 = (u_0, p_0) \in \Phi, \quad v_0 \in H \quad i \quad (\ell, r) \in L^2(0,T;\Phi');$$

$$\textit{знайти} \quad \psi = (u,p) \in L^2(0,T;\Phi) \quad \textit{таке, що}$$

$$m(u''(t), v) + a(u'(t), v) + c(u(t), v) - e(p(t), v) = \langle \ell(t), v \rangle,$$

$$g(p'(t), q) + z(p(t), q) + e(q, u'(t)) = \langle r(t), q \rangle \qquad \forall t \in (0,T],$$

$$m(u'(0) - v_0, v) = 0, \qquad c(u(0) - u_0, v) = 0 \qquad \forall v \in V,$$

$$g(p(0) - p_0, q) = 0 \qquad \forall q \in Q, \tag{2}$$

де білінійні та лінійні форми визначаються такими виразами:

$$m(u,v) = \int_\Omega \rho u_i v_i \, dx, \qquad a(u,v) = \int_\Omega a_{ijkm} \varepsilon_{ij}(u) \varepsilon_{km}(v) \, dx,$$

$$c(u,v) = \int_\Omega c_{ijkm} \varepsilon_{ij}(u) \varepsilon_{km}(v) \, dx, \quad e(q,v) = \int_\Omega e_{kij} E_k(q) \varepsilon_{ij}(v) \, dx \qquad \forall v \in V,$$

$$z(p,q) = \int_\Omega z_{km} E_k(p) E_m(q) \, dx, \qquad g(p,q) = \int_\Omega g_{km} E_k(p) E_m(q) \, dx \qquad \forall q \in Q,$$

$$\langle \ell, v \rangle = \int_\Omega \rho f_i v_i \, dx + \int_{\Gamma_\sigma} \widehat{\sigma}_i v_i \, d\gamma \qquad \forall v \in V, \qquad \langle r, q \rangle = -Iq\big|_{\Gamma_e} \qquad \forall q \in Q.$$

2. Варіаційна задача про усталені вимушені коливання в термінах амплітуд швидкостей зміщень та електричного потенціалу. За умов, що навантаження на п'єзоелектрик змінюються гармонічно в часі з круговою частотою $\omega = \text{const} > 0$ за законом

$$\ell(t) = \ell_1 \cos \omega t + \ell_2 \sin \omega t, \qquad r(t) = r_1 \cos \omega t + r_2 \sin \omega t \quad \forall t \in (0,T], \tag{3}$$

наближені розв'язки задачі (2) шукаємо у вигляді лінійних комбінацій

$$u(x,t) \cong u_1(x)\cos\omega t + u_2(x)\sin\omega t\,,$$

$$p(x,t) \cong p_1(x)\cos\omega t + p_2(x)\sin\omega t\,, \tag{4}$$

де u_1, u_2 та p_1, p_2 – невідомі амплітуди механічних зміщень та електричного потенціалу відповідно. За таких умов можна записати розвинення

$$u'(t) \cong -\omega\big[u_1\sin\omega t - u_2\cos\omega t\big] = s_1\cos\omega t + s_2\sin\omega t\,, \tag{5}$$

де амплітуди швидкостей зміщень визначено за правилами

$$s_1 := \omega u_2, \qquad s_2 := -\omega u_1\,. \tag{6}$$

Підставивши (3) і наближення (4), (5) у рівняння задачі (2) і знехтувавши її початковими умовами, отримуємо варіаційну задачу про знаходження амплітуди швидкостей зміщень та потенціалу вимушених гармонічних коливань п'єзоелектрика:

задано $\omega = \mathrm{const} > 0$, $\chi = (\ell_1, r_1, \ell_2, r_2) \in W' = \Phi' \times \Phi'$;

знайти вектор амплітуд $\psi = (s_1, p_1, s_2, p_2) \in W = \Phi \times \Phi$ *такий, що*

$$\omega m(s_2, v_1) + a(s_1, v_1) - \omega^{-1} c(s_2, v_1) - e(p_1, v_1) = \langle \ell_1, v_1 \rangle\,,$$

$$\omega g(p_2, q_1) + e(q_1, s_1) + z(p_1, q_1) = \langle r_1, q_1 \rangle,$$

$$-\omega m(s_1, v_2) + a(s_2, v_2) + \omega^{-1} c(s_1, v_2) - e(p_2, v_2) = \langle \ell_2, v_2 \rangle \quad \forall v_1, v_2 \in V\,,$$

$$-\omega g(p_1, q_2) + e(q_2, s_2) + z(p_2, q_2) = \langle r_2, q_2 \rangle \qquad \forall q_1, q_2 \in Q\,. \tag{7}$$

Одержана задача (7) буде основним об'єктом дослідження статті. Зазначимо, що задачу про вимушені коливання можна отримати й іншим шляхом (див., наприклад, [6, 7]).

3. Коректність варіаційної задачі про вимушені усталені коливання. Переходячи до аналізу коректності формулювання задачі (7), зауважимо (див. [6]), що симетричні білінійні форми $c(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$ і $a(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$ є неперервними і V-еліптичними, що дозволяє на просторі допустимих зміщень V означити еквівалентні енергетичні норми

$$\|u\|_V = c^{1/2}(u,u), \qquad |u|_V = a^{1/2}(u,u) \qquad \forall u \in V\,. \tag{8}$$

Подібно на просторі допустимих потенціалів Q введемо енергетичні норми

$$\|p\|_Q = g^{1/2}(p,p), \qquad |p|_Q = z^{1/2}(p,p) \qquad \forall p \in Q\,. \tag{9}$$

Щоб спростити подальші викладки, означимо на $W = \Phi \times \Phi$ нову білінійну форму

$$\begin{aligned}\Pi(\omega;\psi,\varphi) := {} & \omega\big[m(s_2,v_1) - m(s_1,v_2)\big] + \omega\big[g(p_2,q_1) - g(p_1,q_2)\big] + \\ & + \big[a(s_1,v_1) + a(s_2,v_2)\big] + \big[z(p_1,q_1) + z(p_2,q_2)\big] + \\ & + \big[e(q_1,s_1) - e(p_1,v_1)\big] + \big[e(p_2,s_2) - e(p_2,v_2)\big] - \\ & - \omega^{-1}\big[c(s_2,v_1) - c(s_1,v_2)\big] \\ & \forall\, \psi = (s_1,p_1,s_2,p_2),\ \varphi = (v_1,q_1,v_2,q_2) \in W\end{aligned} \tag{10}$$

і лінійний функціонал

$$\langle \chi, \varphi \rangle = \sum_{i=1}^{2} \big[\langle \ell_i, v_i \rangle + \langle r_i, q_i \rangle\big] \qquad \forall\, \varphi = (v_1, q_1, v_2, q_2) \in W\,. \tag{11}$$

Використавши позначення (10) і (11), надамо задачі (7) коротшого запису:

задано $\omega = \text{const} > 0, \quad \chi = (\ell_1, r_1, \ell_2, r_2) \in W'$;

знайти вектор $\psi = (s_1, p_1, s_2, p_2) \in W$ *такий, що*

$$\Pi(\omega; \psi, \varphi) = \langle \chi, \varphi \rangle \qquad \forall \varphi = (v_1, q_1, v_2, q_2) \in W. \tag{12}$$

Теорема 1 (про коректність варіаційної задачі усталених вимушених коливань). *Нехай частина межі* Γ_u *пружного тіла, що займає обмежену зв'язну область* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *з неперервною за Ліпшицем межею* Γ, *має ненульову міру,* $\operatorname{mes} \Gamma_u > 0$, *і нехай дані початково-крайової задачі задовольняють такі умови регулярності:* ρ, a_{ijkm}, c_{ijkm}, g_{ij}, $z_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, $\chi = (\ell_1, r_1, \ell_2, r_2) \in W'$, *а фізико-механічні характеристики* a_{ijkm}, c_{ijkm}, g_{ijkm}, z_{ijkm} *задовольняють звичайні умови симетрії та еліптичності.*

Тоді для кожного значення $\omega > 0$ *варіаційна задача* (12) *має єдиний розв'язок* $\psi = (s_1, p_1, s_2, p_2) \in W$ *такий, що* $\|\psi\|_W \le \|\chi\|_*$, *де*

$$\|\chi\|_* := \sup_{0 \ne \varphi \in W} |\langle \chi, \varphi \rangle| \cdot \|\varphi\|_W^{-1}.$$

Для доведення коректності задачі (12) скористаємося міркуваннями зі статті [10]. Введемо на просторі W скалярний добуток згідно з правилом

$$(\psi, \varphi) = \sum_{i=1}^{2} \left[a(s_i, v_i) + z(p_i, q_i) \right] \quad \forall \psi = (s_1, p_1, s_2, p_2), \ \varphi = (v_1, q_1, v_2, q_2) \in W$$

та відповідну йому енергетичну норму

$$\|\varphi\|_W = \sqrt{(\varphi, \varphi)} = \sqrt{\Pi(\omega; \varphi, \varphi)} \qquad \forall \varphi \in W. \tag{13}$$

Можна показати, що складові задачі (12) є неперервними, іншими словами,

$$|\Pi(\omega; \psi, \varphi)| \le C \max\{\omega^{-1}, 1, \omega\} \cdot \|\psi\|_W \cdot \|\varphi\|_W,$$

$$|\langle \chi, \varphi \rangle| \le C \|\chi\|_* \cdot \|\varphi\|_W \qquad \forall \psi, \varphi \in W \tag{14}$$

зі сталою C, значення якої не залежить від величин, які нас можуть цікавити. Зважаючи на властивості (14), W-еліптичність білінійної форми (10)

$$\Pi(\omega; \varphi, \varphi) = \|\varphi\|_W^2 \qquad \forall \varphi \in W, \qquad \forall \omega \ge 0 \tag{15}$$

та лему Лакса – Мільграма – Вишика, приходимо до висновку, що задача (12) є коректно поставлена. Отже, існує єдиний вектор $\psi = (s_1, p_1, s_2, p_2) \in W$, який задовольняє рівняння задачі (12) та умову стійкості

$$\|\psi\|_W \le C \|\chi\|_* \qquad \forall \omega > 0. \tag{16}$$

Безпосередньо зі структури варіаційних рівнянь задачі (7) про гармонічні коливання випливають такі висновки: ***1***) якщо частота вимушених коливань $\omega \to 0$, то задача (7) вироджується до коректно поставленої варіаційної стаціонарної задачі п'єзоелектрики; ***2***) якщо частота вимушених коливань $\omega \to \infty$, то задача (7) стає сингулярно збуреною, оскільки містить малі параметри ω^{-1} біля старших похідних.

4. Апроксимації МСЕ і їх збіжність. Схема Гальоркіна передбачає перенесення розв'язку варіаційної задачі (12) з простору $W := \Phi \times \Phi$ до його певним чином вибраного скінченновимірного підпростору апроксимацій $W_h := \Phi_h \times \Phi_h$, $\Phi_h \subset \Phi$, $\dim W_h = N(h) < +\infty$. Таким чином, дискретизована за Гальоркіним задача (12) має вигляд

задано $\omega = \text{const} > 0, \quad \chi \in W'$ *та*

простір апроксимацій $W_h \subset W, \ \dim W_h < +\infty;$

знайти вектор $\psi_h = (s_1^h, p_1^h, s_2^h, p_2^h) \in W_h$ *такий, що*

$$\Pi(\omega; \psi_h, \varphi) = \langle \chi, \varphi \rangle \qquad \forall \varphi \in W_h. \tag{17}$$

Оскільки задача (12) є коректно поставленою, то цю властивість має і дискретизована задача (17). З огляду на [5] неважко переконатися, що за типових для схем МСЕ допущень є правильною

Теорема 2 (про збіжність апроксимацій МСЕ). *Нехай* $\psi \subset W$ *– розв'язок задачі* (12), *причому існує натуральне* $k \geq 1$ *таке, що* $\psi \in \in W \cap \left[H^{k+1}(\Omega)\right]^{2(d+1)}$, *і нехай апроксимації МСЕ* ψ_h *визначаються як розв'язки задачі* (17) *у просторах* $W_h \subset W$, *побудованих з допомогою кусково-поліноміальних базисів МСЕ і мають таку властивість: для кожного* $\varphi \in W \cap \left[H^{k+1}(\Omega)\right]^{2(d+1)}$, $k \geq 1$, *існують* $\varphi_h \in W_h$ *та* $S = \text{const} > 0$ *такі, що* $\|\varphi - \varphi_h\|_{m,\Omega} \leq S \cdot h^{k+1-m} \|\varphi\|_{k+1,\Omega}$, $0 \leq m \leq k$, *де* h *– діаметр сітки скінченних елементів та* k *– максимальний степінь повного полінома від* d *змінних, який точно відтворюється базисними функціями з* W_h *у межах кожного скінченного елемента. Тоді швидкість збіжності послідовності* $\{\psi_h\} \subset W$ *характеризується оцінкою*

$$\|\psi - \psi_h\|_{1,\Omega} \leq S h^k C \cdot \max\{\omega^{-1}, 1, \omega\} \cdot \|\psi\|_{k+1,\Omega},$$

де $C = \text{const} > 0$ *не залежить від величин, що нас цікавлять.*

На цьому етапі деталізуємо структуру задачі (17) за допущення, що простір апроксимацій W_h конструюється технологією методу скінченних елементів. Спочатку в той чи інший спосіб виберемо поділ $\Im_h = \{K\}$ області Ω на скінченні елементи K, $h := \max\limits_{K \in \Im_h} h_K$, $h_K := \text{diam}\, K$. Позначимо через X_V (відповідно X_Q) множину всіх вузлів $x^m = (x_1^m, \ldots, x_d^m)$ тріангуляції $\Im_h$, які не належать до частини межі Γ_u (відповідно Γ_p), $N_V := \text{card}\, X_V$ (відповідно $N_Q := \text{card}\, X_Q$).

Побудуємо тепер систему кусково-визначених скалярних функцій $w^j = w^j(x)$ з властивостями

$$w^j(x^m) = \delta_{jm} \qquad \forall x^m \in X_V,$$

$$\Omega_j := \text{supp}\, w^j = \{K \in \Im_h : w^j(x) \neq 0 \quad \text{на} \quad \bar{K}\}, \quad j = 1, \ldots, N_V. \tag{18}$$

Утворимо базис простору апроксимацій V_h із векторів вигляду

$$w_1^j(x) := \begin{pmatrix} w^j(x) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \ldots, \ w_d^j(x) := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ w^j(x) \end{pmatrix}, \quad j = 1, \ldots, N_V. \tag{19}$$

Тоді $M := \dim V_h = N_V \cdot d$, і кожен вектор $v^h = (v_1^h(x), \ldots, v_d^h(x))$ із цього простору V_h можна подати у вигляді лінійної комбінації $v^h(x) = \sum\limits_{j=1}^{N_V} \sum\limits_{m=1}^{d} a_m^j w_m^j(x)$ векторів w_m^j або у скалярному записі $v_k^h(x) = \sum\limits_{j=1}^{N_V} a_k^j w^j(x), \ k = 1, \ldots, d$.

Подібним чином за базис простору апроксимацій електричних потенціалів Q_h, $\dim Q_h = N_Q$, виберемо систему кусково-визначених скалярних функцій $\eta^i = \eta^i(x)$ з властивостями

$$\eta^i(x^k) = \delta_{ik} \qquad \forall x^k \in X_Q,$$

$$\Omega_i := \operatorname{supp}\eta^i = \{K \in \Im_h : \eta^i(x) \neq 0 \quad \text{на} \quad \bar{K}\},\ i = 1,\dots,N_Q. \tag{20}$$

За цією деталізацією структури просторів апроксимацій дискретизованій задачі (17) надамо вигляду:

знайти вектори $s_\alpha^h(x) = \sum\limits_{j=1}^{N_V}\sum\limits_{m=1}^{d} s_{\alpha m}^j w_m^j(x)$ *та* $p_\alpha^h(x) = \sum\limits_{j=1}^{N_Q} b_\alpha^j \eta^j(x)$, $\alpha = 1,2$,

такі, що

$$\begin{aligned}
&\omega m(s_2, v_1) + a(s_1, v_1) - \omega^{-1} c(s_2, v_1) - e(p_1, v_1) = \langle \ell_1, v_1 \rangle,\\
&z(p_1, q_1) + \omega g(p_2, q_1) + e(q_1, s_1) = \langle r_1, q_1 \rangle,\\
&-\omega m(s_1, v_2) + a(s_2, v_2) + \omega^{-1} c(s_1, v_2) - e(p_2, v_2) = \langle \ell_2, v_2 \rangle \quad \forall v_1, v_2 \in V,\\
&z(p_2, q_2) - \omega g(p_1, q_2) + e(q_2, s_2) = \langle r_2, q_2 \rangle \qquad \forall q_1, q_2 \in Q,
\end{aligned} \tag{21}$$

або в матричному записі:

знайти вектори $\bar{s}_\alpha = (s_{\alpha 1}^1, s_{\alpha 2}^1, \dots, s_{\alpha d}^1, \dots, s_{\alpha 1}^{N_V}, s_{\alpha 2}^{N_V}, \dots, s_{\alpha d}^{N_V}) \in \mathbb{R}^M$ *та*

$\bar{b}_\alpha = (b_\alpha^1, b_\alpha^2, \dots, b_\alpha^{N_Q}) \in \mathbb{R}^{N_Q}$, $\alpha = 1,2$, *такі, що задовольняють систему алгебричних рівнянь*

$$\begin{bmatrix} A & -E & \omega M - \omega^{-1} C & 0 \\ E^\top & Z & 0 & \omega G \\ -[\omega M - \omega^{-1} C] & 0 & A & -E \\ 0 & -\omega G^\top & E^\top & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{s}_1 \\ \bar{b}_1 \\ \bar{s}_2 \\ \bar{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\ell}_1 \\ \bar{r}_1 \\ \bar{\ell}_2 \\ \bar{r}_2 \end{bmatrix}. \tag{22}$$

Тут A – симетрична додатно визначена матриця, елементи $A_{n\ell}$ якої обчислюються згідно з правилами

$$A_{n\ell} := a(w_m^i, w_k^j), \quad n = d(i-1) + m, \quad \ell = d(j-1) + k,$$
$$i, j = 1,\dots,N_V, \quad m, k = 1,\dots,d,$$

складові матриць M та C обчислюються у подібний спосіб; симетричні додатно визначені матриці Z і G визначаються так:

$$Z = \{z(\eta^i, \eta^j)\}_{i,j=1}^{N_Q}, \qquad G = \{g(\eta^i, \eta^j)\}_{i,j=1}^{N_Q};$$

прямокутна матриця E має дещо складнішу структуру:

$$E_{m\ell} := e(\eta^m, w_k^j), \quad \ell = d(j-1) + k, \qquad k = 1,\dots,d,$$
$$m = 1,\dots,N_Q, \quad j = 1,\dots,N_V.$$

4. Задача про похибку апроксимації МСЕ та її оцінювач. З огляду на (17) тепер сформулюємо варіаційну задачу про відшукання похибки дискретизації Гальоркіна:

задано $\omega = \text{const} > 0$ *та* $\psi_h \in W_h$;

знайти похибку $e := \psi - \psi_h = (e^1, \xi^1, e^2, \xi^2) \in \mathcal{E} := W \backslash W_h$ *таку, що*

$$\Pi(\omega; e, \varphi) = \langle \rho(\omega; \psi_h), \varphi \rangle := \langle \chi, \varphi \rangle - \Pi(\omega; \psi_h, \varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{E}. \tag{23}$$

Оскільки функціонал $\rho(\omega; \varphi_h) : W \to \mathbb{R}$ обмежений на W, то задача (23) коректно поставлена. Знайти розв'язок (23) так само важко, як і вихід-

ної задачі (12), тому дискретизуємо її за схемою Гальоркіна в деякому скінченновимірному підпросторі $\mathcal{E}_h$ із простору похибок $\mathcal{E}$. Щоб використати цю процедуру на практиці, пов'яжемо її реалізацію із поділом $\mathfrak{I}_h = \{K\}$ області Ω на скінченні елементи K і далі будемо припускати, що власне на ньому за допомогою певної технології МСЕ знайдено кусково-визначений розв'язок $\psi_h \in W_h$ дискретизованої задачі (17). Тепер сформулюємо задачу про апостеріорний оцінювач похибки апроксимації МСЕ:

$$\textit{задано}\ \ \omega = \text{const} > 0\,,\ \ \psi_h \in W_h\ \ \textit{та}\ \ \mathcal{E}_h \subset \mathcal{E},\ \ \dim \mathcal{E}_h < +\infty\,;$$

$$\textit{знайти оцінювач}\ \ e_h := (e_h^1, \xi_h^1, e_h^2, \xi_h^2) \in \mathcal{E}_h\ \ \textit{такий, що}$$

$$\Pi(\omega; e_h, \varphi) = \left\langle \rho(\omega; \psi_h), \varphi \right\rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{E}_h\,. \tag{24}$$

Оскільки її складові задовольняють умови леми Лакса – Мільграма – Вишика, то варіаційна задача (24) про відшукання наближення e_h до актуальної похибки дискретизації $e = \psi - \psi_h \in \mathcal{E} = W \setminus W_h$ є коректно поставленою.

Якщо в той чи інший спосіб задача про апостеріорний оцінювач похибки (24) розв'язана, то значення його енергетичної норми

$$\left|e_h\right|_W^2 = \sqrt{(e_h, e_h)} \tag{25}$$

визначає приблизну величину похибки знайденої апроксимації МСЕ $\psi_h \in W_h$.

У деяких випадках практичних застосувань такої кількісної характеристики похибки буває достатньо, однак неважко обчислити розподіл норми похибки поміж скінченними елементами K використаної тріангуляції $\mathfrak{I}_h$:

$$\left|e_h\right|_K^2 := \int_K \sum_{\alpha=1}^{2} \left[c_{ijkm} \varepsilon_{ij}(e_h^\alpha) \varepsilon_{km}(e_h^\alpha) + g_{km} E_k(\xi_h^\alpha) E_m(\xi_h^\alpha) \right] dx \quad \forall K \in \mathfrak{I}_h\,. \tag{26}$$

5. Розв'язування локальних задач про похибку дискретизації МСЕ. Тут з огляду на (26) пропонуємо спеціальний спосіб побудови просторів E_h, який дозволяє обчислювати оцінювач e_h на довільно вибраному окремому елементі K незалежно від решти елементів тріангуляції $\mathfrak{I}_h$. Мова йде про належне конструювання базису простору $\mathcal{E}_h := \mathcal{E}_h^V \times \mathcal{E}_h^Q$, яке забезпечить знаходження норм (26) на кожному скінченному елементі K. Для цього потрібно розв'язати систему лінійних алгебричних рівнянь порядку $2 \cdot (d+1)$.

На заданій тріангуляції $\mathfrak{I}_h = \{K\}$ розглянемо кусково-визначену невід'ємну функцію $b \in H_0^1(\Omega)$ бульбашкової структури:

$$b\Big|_K := b_K \in H_0^1(K)\,,$$

$$b_K(x_K) = 1 \qquad \forall K \in \mathfrak{I}_h\,, \qquad \forall h > 0\,, \tag{27}$$

де за точку $x_K \in K$ вибираємо, наприклад, центр ваги елемента K.

Апостеріорний оцінювач похибки $\overline{e}_K = (e_K^1, e_K^2)$ апроксимації швидкостей зміщень $s^h = (s_1^h, s_2^h)$ будемо шукати у вигляді лінійної комбінації

$$e_K^\alpha(x) := \varepsilon_1^\alpha \begin{pmatrix} b_K(x) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \varepsilon_2^\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ b_K(x) \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + \varepsilon_d^\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b_K(x) \end{pmatrix} \quad \forall x \in K,\ \alpha = 1,2\,, \tag{28}$$

з невідомими коефіцієнтами $\varepsilon_K^\alpha = (\varepsilon_1^\alpha, \ldots, \varepsilon_d^\alpha)$, $\alpha = 1,2$.

Подібно апостеріорний оцінювач похибки $\overline{\xi}_K = (\xi_K^1, \xi_K^2)$ апроксимації електричного потенціалу $p^h = (p_1^h, p_2^h)$ будемо шукати у вигляді лінійної комбінації

$$\xi_K^\alpha(x) := \pi^\alpha b_K(x) \qquad \forall x \in K, \quad \alpha = 1,2. \tag{29}$$

Застосувавши тепер процедуру Гальоркіна, отримуємо алгебричне подання задачі (24) про апостеріорний оцінювач похибки апроксимації МСЕ:

знайти вектори $\overline{\varepsilon}_K = (\varepsilon_K^1, \varepsilon_K^2) \in \mathbb{R}^{2d}$ *та* $\overline{\pi}_K = (\pi_K^1, \pi_K^2) \in \mathbb{R}^2$ *такі, що задовольняють систему алгебричних рівнянь*

$$\begin{bmatrix} A & -E & \omega M - \omega^{-1}C & 0 \\ E^\top & Z & 0 & \omega G \\ \omega^{-1}C - \omega M & 0 & A & -E \\ 0 & -\omega G^\top & E^\top & Z \end{bmatrix}_K \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_K^1 \\ \pi_K^1 \\ \varepsilon_K^2 \\ \pi_K^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{Z}^1 \\ \mathcal{R}^1 \\ \mathcal{Z}^2 \\ \mathcal{R}^2 \end{bmatrix}_K \quad \forall K \in \Im_h. \tag{30}$$

Тут компоненти векторів $\mathcal{Z}^\alpha$ та $\mathcal{R}^\alpha$ обчислюємо за правилами

$$\mathcal{Z}_m^1 := \left\langle \rho(\omega;\psi_h), (\overline{b}_K^m, 0, 0, 0) \right\rangle, \quad \mathcal{Z}_m^2 := \left\langle \rho(\omega;\psi_h), (0, 0, \overline{b}_K^m, 0) \right\rangle, \quad m = 1, \ldots, d,$$

$$\mathcal{R}^1 := \left\langle \rho(\omega;\psi_h), (0, \overline{b}_K, 0, 0) \right\rangle, \qquad \mathcal{R}^2 := \left\langle \rho(\omega;\psi_h), (0, 0, 0, \overline{b}_K) \right\rangle, \tag{31}$$

де

$$\overline{b}_K^1 = (b_K, 0, \ldots, 0), \quad \overline{b}_K^2 = (0, b_K, 0, \ldots, 0), \quad \ldots, \quad \overline{b}_K^d = (0, \ldots, 0, b_K). \tag{32}$$

Складові матриці системи рівнянь (30) обчислюємо згідно з правилами, поданими в **п. 4**, наприклад,

$$A_{ij}^K := a(b_K^i, b_K^j), \qquad i, j = 1, \ldots, d, \qquad E_m^K := e(b_K, b_K^m), \qquad m = 1, \ldots, d.$$

6. Результати обчислювальних експериментів. Розглянемо квадратну ніобіт-літієву пластинку з довжиною сторони $L = 0.01$ м, густиною маси $\rho = 4700$ кг/м^3, модулями пружності $c_{1111} = c_{2222} = 20.3 \cdot 10^{10}$ Н/м^2, $c_{1122} = 5.29 \cdot 10^{10}$ Н/м^2, $c_{1112} = c_{1222} = 0$ Н/м^2, $c_{1212} = 7.49 \cdot 10^{10}$ Н/м^2, модулями п'єзоелектрики $e_{222} = 2.54$ К/м, $e_{112} = e_{211} = -2.53$ К/м, $e_{111} = e_{212} = e_{122} = 0$ К/м, діелектричними проникностями $g_{11} = g_{22} = 43.6$ Ф/м, $g_{12} = 0$ Ф/м.

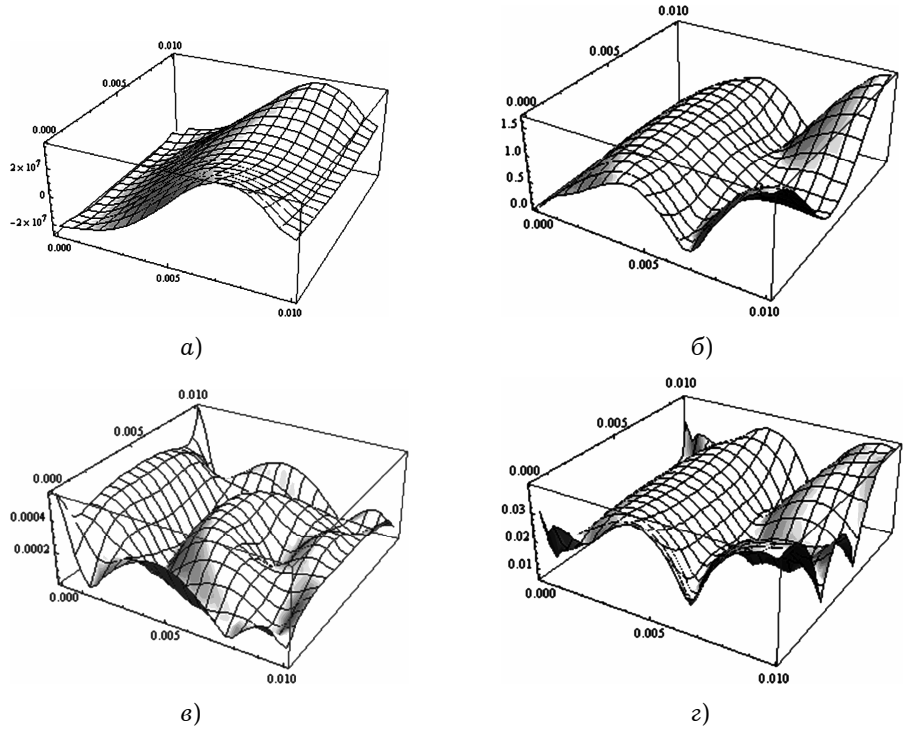
Припускаємо, що край пластинки $x_1 = 0$ жорстко защемлений і заземлений, на протилежний край пластинки діє тиск $\sigma_{11}(t) = \overline{\sigma}_1 \cos \omega t$, $\overline{\sigma}_1 = 5 \cdot 10^6$ Н/м^2, $\omega = 3 \cdot 10^6$ Гц, $\sigma_{12}(t) = 0$ і $D_1(L, y) = 0$, решта межі вільна від механічних навантажень ($\sigma_{12}(t) = \sigma_{22}(t) = 0$) і контактує з електричним ізолятором ($D_2(x, 0) = D_2(x, L) = 0$).

Апроксимації МСЕ обчислювали на рівномірних сітках $\Im_h$ із $N \times N$ квадратних скінченних елементів, на кожному з яких використовували білінійні базисні функції для наближення як амплітуд швидкостей, так і електричного потенціалу.

Після введення на кожному елементі K локальних координат (α_1, α_2) так, що $|\alpha_i| \le 1$, $i = 1,2$, апостеріорний оцінювач похибки $\overline{e}_K$ обчислювали на ньому за допомогою біквадратичної функції вигляду

$$b_K(\alpha_1, \alpha_2) = (1 - \alpha_1^2)(1 - \alpha_2^2) \qquad \forall K := \{(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2 : |\alpha_i| \le 1\}.$$

Незважаючи на те, що довжина генерованої хвилі заданої частоти дорівнює $\lambda = 2\pi\omega^{-1}\sqrt{c_{1111}\cdot\rho^{-1}} \approx 0.043$ м, рис. 1*б* і рис. 1*в* ілюструють складну структуру апроксимацій МСЕ амплітуди швидкості зміщень $|s| = \sqrt{s_1^2 + s_2^2}$ та індукції $|D| = \sqrt{D_1^2 + D_2^2}$, обчислених на рівномірних тріангуляціях із 1024 конгруентних скінченних елементів. Графік апостеріорного оцінювача похибок, побудований за значеннями $|e| = \sqrt{|\overline{\varepsilon}_K|^2 + |\overline{\pi}_K|^2}$ у центрах ваг скінченних елементів (див. рис. 1*г*), вказує на відносно великі (й очікувані) його значення в околах кутів пластини і на співрозмірні з ними значення усередині лівої половини пластини, хоча рис. 1*а* демонструє цілком задовільну поведінку амплітуди напруження σ_{11}.



а) *б*)

в) *г*)

Рис. 1

У табл. 1 наведено відносні значення похибок обчислення амплітуд швидкості зміщень та електричного потенціалу, знайдені за нормами відповідних апостеріорних оцінювачів похибок, а також їхні показники швидкості збіжності, обчислені за згаданими відносними похибками за формулою

$$\varkappa(f_h) = \log_2(f_{2h} - f_h) - \log_2(f_h - f_{h/2}).$$

Таблиця 1

Кількість елементів $N \times N$	64	256	1024	4096
$\left\|e^h\right\|_V \left\|s^h\right\|_V^{-1} \cdot 100\%$	17.18	8.11	4.29	2.32
Порядки збіжності амплітуди швидкості зміщень $\varkappa(s^h)$	–	1.25	0.96	–
$\left\|\xi^h\right\|_V \left\|p^h\right\|_V^{-1} \cdot 100\%$	16.53	6.13	3.21	1.77
Порядки збіжності амплітуди потенціалу $\varkappa(p^h)$	–	1.83	1.02	–

Як бачимо, обчислені порядки швидкості збіжності кусково-білінійних апроксимацій МСЕ близькі до одиниці, що, з одного боку, цілком узгоджується із апріорними оцінками збіжності, встановленими у теоремі 2, а, з іншого боку, свідчить про надійність та ефективність пропонованої схеми знаходження апостеріорних оцінок похибок.

7. Висновки і заключні зауваження. У цій статті вивчено основні питання застосування МСЕ до розв'язування крайових задач про вимушені усталені гармонічні коливання п'єзоелектрика. З цією метою здійснено варіаційну постановку задачі у термінах амплітуд швидкості зміщень та електричного потенціалу і доведено коректність такого формулювання. На цій основі виконано дискретизацію Гальоркіна варіаційної задачі та за умов належної регулярності її розв'язку знайдено апріорні оцінки похибок апроксимацій МСЕ.

Після формулювання задачі про похибку апроксимацій МСЕ також з використанням дискретизації Гальоркіна запропоновано числову схему відшукання апостеріорних оцінювачів їхніх похибок, деталізований алгоритм якої подано для двовимірних задач п'єзоелектрики. Ще однією специфікою побудови АОП за цією схемою є здатність обчислення його значень на кожному скінченному елементі незалежно від решти елементів тріангуляції.

Як приклад реалізації можливостей цієї схеми наведено результати обчислювальних експериментів з відшукання кусково-лінійних апроксимацій МСЕ та їхнього кусково-визначеного біквадратичного АОП для задачі про коливання п'єзоелектричної пластинки. Вони показують, що обчислені за значеннями АОП показники швидкості збіжності цілком узгоджуються із апріорними оцінками збіжності апроксимацій МСЕ, поданими в теоремі 2.

У цілому запропонована для задач про гармонічні коливання п'єзоелектриків схема МСЕ з апостеріорним оцінювачем похибок може бути покладена в основу системи керування h-адаптивних обчислень апроксимацій МСЕ з наперед гарантованою точністю, подібно, як це зроблено для задач про статичну рівновагу пружних і п'єзоелектричних тіл [2, 8, 9].

1. *Жарий О. Ю., Улитко А. Ф.* Введение в механику нестационарных колебаний и волн. – Киев: Вища шк., 1989. – 184 с.
2. *Квасниця Г., Шинкаренко Г. А.* Порівняння простих апостеріорних оцінювачів похибок методу скінченних елементів для задач еластостатики // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Прикл. математика та інформатика. – 2003. – Вип. 7. – С. 162–174.
3. *Новацкий В.* Электромагнитные эффекты в твердых телах. – Москва: Мир, 1986. – 160 с.
4. *Партон В. З., Кудрявцев Б. А.* Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. – Москва: Наука, 1988. – 472 с.
5. *Шинкаренко Г. А.* Постановка та розв'язуваність початково-крайових задач електров'язкопружності // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1990. – Вип. 33. – С. 10–16.
6. *Шинкаренко Г. А.* Проекционно-сеточные аппроксимации для вариационных задач пироэлектричества. I. Постановка задач и анализ установившихся вынужденных колебаний // Дифференц. уравнения. – 1993. – **29**, № 7. – С. 1252–1260.
7. *Шульга Н. А., Болкисев А. М.* Колебания пьезоэлектрических тел. – Киев: Наук. думка, 1990. – 228 с.
8. *Chaban F. V., Shynkarenko H. A.* Constructing of h-adaptive finite element method for piezoelectricity problem // Журн. обчисл. та прикл. математики. Сер. Обчисл. математика. – 2009. – Вип. 1 (97). – С. 1–9.
9. *Chaban F., Shynkarenko H.* The construction and analysis of a posteriori error estimators for piezoelectricity stationary problems // Operator Theory: Advances and Appl. – 2009. – **191**. – P. 291–304.
10. *Premount A.* Mechatronics: Dynamics of electromechanical and piezoelectric systems. – Berlin: Springer, 2006. – 215 p.
11. *Yang J.* An introduction to the theory of piezoelectricity. – Berlin: Springer, 2005. – 309 p.

АПОСТЕРИОРНЫЕ ОЦЕНЩИКИ ПОГРЕШНОСТЕЙ КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ ДЛЯ ЗАДАЧИ О ВЫНУЖДЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЯХ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИКОВ

Сформулирована вариационная задача о нахождении амплитуды вектора скоростей упругих смещений и электрического потенциала пьезоэлектрика с мгновенной памятью, который осуществляет установившиеся вынужденные колебания под влиянием гармонических нагрузок заданной круговой частоты. Установлены условия корректности этого класса задач и найдены априорные оценки сходимости аппроксимаций метода конечных элементов к их решениям. Построены апостериорные оценщики погрешностей аппроксимаций метода конечных элементов, позволяющие найти распределение энергетических норм погрешностей путем решения локальных задач о невязке аппроксимации на каждом конечном элементе триангуляции. Алгоритм вычисления оценщиков такого сорта детально описан для двумерных задач как для треугольных, так и четырехугольных конечных элементов и допускает расширение на трехмерный случай. Эффективность и надежность оценщика кусочно-билинейных аппроксимаций метода конечных элементов демонстрируется числовыми решениями модельной задачи.

A POSTERIORI ERROR ESTIMATORS OF FINITE ELEMENT APPROXIMATIONS FOR FORCED HARMONIC VIBRATIONS PROBLEM OF PIEZOELECTRICS

A variation problem on elastic deformation speed vector amplitude and electric potential of piezoelectric with instantaneous memory, which performs steady-state forced vibration under the influence of harmonic loads with given circular frequency is formulated. The correctness conditions to this kind of problems is determined and a priory estimations of finite element method approximation convergence to their solutions are found. In addition to such characteristics, a posteriori error estimators of finite element method approximation are built, which allows to calculate the error energy norms distribution by solving the local problems about residuals on each finite element of triangulation. Such sort estimators calculation algorithm in details is described for two-dimensional problems for triangle and for quadrilaterals finite elements and it can be extended on three-dimensional case. The efficiency and reliability of estimator of piecewise-bilinear finite element method approximation is illustrated by numeric results of the solved model problem.

[1] Львів. нац. ун-т імені Івана Франка, Львів,
[2] Політехніка Опольська, Ополе, Польща

Одержано
06.03.09