УДК 539.3

Г. С. Кіт, О. П. Сушко

ЗАДАЧІ СТАЦІОНАРНОЇ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ І ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ТІЛА З ТЕПЛОПРОНИКНИМ ДИСКОВИМ ВКЛЮЧЕННЯМ (ТРІЩИНОЮ)

Задачу стаціонарної теплопровідності для тіла з теплопроникним дисковим включенням, між поверхнями якого здійснюється неідеальний тепловий контакт, зведено до гіперсингулярного інтегрального рівняння II роду. Наведено точний розв'язок цього рівняння, коли його права частина є поліномом 3-го степеня, а в осесиметричному випадку – n-го степеня. Для цих випадків знайдено зумовлені тепловими диполями зсувні зусилля на включенні і визначено коефіцієнти інтенсивності дотичних напружень для теплопроникної кругової тріщини.

Багато елементів сучасних конструкцій та інженерних споруд працюють в умовах нерівномірного нагріву, тому при оцінці їх міцності виникає потреба врахування температурних напружень. Наявність у тілі концентраторів типу тонких теплоактивних включень, на яких задана температура, теплові потоки, або теплопроникних (зокрема теплоізольованих), між поверхнями яких відбувається неідеальний тепловий контакт, зумовлює локальне зростання в околі таких включень температурних ґрадієнтів і напружень. Список робіт з питань дослідження напружено-деформованого стану тіл з дисковими теплоактивними включеннями та тріщинами наведено у монографії [6] і праці [8].

Важливим є також вивчення розподілу температури та напружень в околі теплопроникних включень і тріщин. У цьому випадку таке включення є тепловим екраном, ідеальність теплового контакту порушується, воно починає впливати на теплові та механічні поля у тілі, його поверхні прогріваються нерівномірно, внаслідок чого виникають дотичні напруження.

Задачі про збурення теплового потоку в однорідному середовищі включеннями з іншою теплопровідністю є важливими у техніці та геофізиці. Розв'язки таких задач можна використовувати для оцінки зміни геотермічного ґрадієнта, що є важливим при термічних методах розвідки в геофізиці, а також при вивченні термонапруженого стану земної кори з тектонічними тріщинами з заповнювачем низької жорсткості. Відомо, що в земній корі та верхній мантії є як вертикальний, так і горизонтальний ґрадієнти температури; останній особливо помітний у верхніх шарах Землі в зоні переходу від океанічного типу земної кори до континентального [1, 11]. Нерівномірний розподіл температури в околі тектонічних тріщин зумовлює появу термопружних напружень, які разом з іншими факторами можуть призвести до росту цих тріщин.

Плоским задачам стаціонарної теплопровідності та термопружності тіл з теплоізольованими тріщинами присвячено низку робіт, огляд яких наведено у монографіях [6, 17]. Значно менше розв'язано задач у випадку тривимірних тіл. Це можна пояснити відсутністю єдиного загального методу розв'язування змішаних тривимірних задач теплопровідності та термопружності, такого як метод Колосова – Мусхелішвілі в плоскій задачі теорії пружності.

Розв'язуванню задач теплопровідності та термопружності для тіл із круговими теплоізольованими або теплопроникними тріщинами в осесиметричній постановці з використанням інтегрального перетворення Ганкеля і дуальних інтегральних рівнянь присвячені праці [2–5, 7, 14, 19–21]. Загальний метод розв'язування просторових задач для безмежного тіла з плоскими тріщинами, на поверхнях яких задано різні теплові та силові навантаження, наведено у монографії [6]. З використанням гармонічних потенціалів простого та подвійного шарів такі задачі зведено до розв'язування двовимірних сингулярних інтегральних рівнянь. При цьому густини потенціалів мають простий фізичний сенс: у випадку задач теплопровідності − це густини джерел і диполів тепла на місці розташування тріщин, а у випадку задачі термопружності − це стрибки зміщень протилежних поверхонь тріщин.

Мета цієї роботи − визначення температурного поля і напруженого стану тіла з теплопроникним дисковим включенням (тріщиною), між поверхнями якого здійснюється неідеальний тепловий контакт.

Визначення температурного поля. Розглянемо пружне ізотропне тіло з тонким дисковим теплопроникним включенням радіуса a, між поверхнями якого є неідеальний тепловий контакт. Початок декартової системи координат $Ox_1x_2x_3$ розмістимо в центрі круга S, який є серединною площиною включення, спрямувавши вісь Ox_3 перпендикулярно до області S. Умову неідеального теплового контакту між поверхнями включення запишемо у вигляді [13, 15]

$$\lambda \frac{\partial T(x^*)}{\partial x_3} - \lambda_n(x)\left[T^+(x^*) - T^-(x^*)\right] = 0,$$

$$x^* = x^*(x_1, x_2, x_3), \qquad x = x^*(x_1, x_2, 0), \tag{1}$$

де T^+ і T^- − граничні значення температури на поверхнях включення; λ − коефіцієнт теплопровідності тіла; $\lambda_n(x) = \lambda_0/h(x)$ − теплопроникність включення; λ_0 і $h(x)$ − коефіцієнт теплопровідності та товщина включення. Завдяки використанню умови (1) вдається оминути побудову розв'язку задачі теплопровідності для включення, моделюючи його фізичною поверхнею, наділеною поперечною теплопроникністю λ_n.

Температурне поле у тілі з включенням запишемо у вигляді

$$T(x^*) = t_0(x^*) + t(x^*), \tag{2}$$

де $t_0(x^*)$ − температурне поле в тілі без включення; $t(x^*)$ − температурне поле, зумовлене збуренням температури $t_0(x^*)$ включенням. Підставивши (2) в умову (1), одержимо

$$\lambda \frac{\partial t(x^*)}{\partial x_3} - \frac{\lambda_0}{h(x)}\left[t^+(x) - t^-(x)\right] = -\lambda \frac{\partial t_0(x^*)}{\partial x_3}, \qquad x_3 = 0. \tag{3}$$

З цієї умови видно, що шукана температура має стрибок на поверхнях включення, тому її доцільно шукати у вигляді гармонічного потенціалу подвійного шару:

$$t(x^*) = -\frac{1}{4\pi\lambda}\frac{\partial}{\partial x_3}\iint_S \frac{\gamma(\xi)}{R(x^*,\xi)}\,d_\xi S = \frac{x_3}{4\pi\lambda}\iint_S \frac{\gamma(\xi)}{R^3(x^*,\xi)}\,d_\xi S, \tag{4}$$

де $R(x^*,\xi) = \sqrt{(x_1-\xi_1)^2 + (x_2-\xi_2)^2 + x_3^2}$; $\gamma(\xi)$ − густина подвійного шару, розподіленого по області S.

Відомо, що потенціал подвійного шару має розрив при переході через шар:

$$t^\pm(x^*)\Big|_{x_3\to\pm 0} = \begin{cases} \pm\dfrac{1}{2\lambda}\gamma(x), & x \in S, \\ 0, & x \notin S. \end{cases} \tag{5}$$

Із виразу (5) маємо, що

$$t^+(x) - t^-(x) = \frac{\gamma(x)}{\lambda}, \qquad x \in S. \tag{6}$$

Знайдемо похідну по нормалі до області S від $t(x^*)$ із виразу (4):

$$\left.\frac{\partial t(x^*)}{\partial x_3}\right|_{x_3=0} = -\frac{1}{4\pi\lambda}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\left.\iint_S \frac{\gamma(\xi)d_\xi S}{R(x^*,\xi)}\right|_{x_3=0} = \frac{1}{4\pi\lambda}\Delta_x \iint_S \frac{\gamma(\xi)}{R(x,\xi)}d_\xi S\,,$$

де $\Delta_x = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ – оператор Лапласа. Внісши цей оператор під інтеграл, одержимо

$$\left.\frac{\partial t(x^*)}{\partial x_3}\right|_{x_3=0} = \frac{1}{4\pi\lambda}\iint_S \frac{\gamma(\xi)}{R^3(x,\xi)}d_\xi S\,. \tag{7}$$

Підставимо (7) і (6) в умову (3), помноживши обидві її сторони на $4/\pi$. Тоді для визначення густини потенціалу подвійного шару $\gamma(\xi)$ одержимо сингулярне інтегральне рівняння

$$\frac{1}{\pi^2}\iint_S \frac{\gamma(\xi)}{R^3(x,\xi)}d_\xi S - H^*(x)\gamma(x) = q(x)\,, \tag{8}$$

де $H^*(x) = \dfrac{4\lambda_0}{\pi\lambda h(x)}$ і $q(x) = -\dfrac{4\lambda}{\pi}\left.\dfrac{\partial t_0(x^*)}{\partial x_3}\right|_{x_3=0}$.

Рівняння вигляду (8) має місце також при дослідженні концентрації напружень у тривимірних тілах з тонкими включеннями [12]. Там залежність між напруженнями та переміщеннями на поверхнях включення записується з використанням гіпотези пружної основи типу Вінклера. Така залежність добре описує взаємодію включення з основним матеріалом, коли жорсткість включення менша від жорсткості матриці. Тому наведені нижче розв'язки рівняння (8) можна буде використати і для тонкого пружного включення.

Якщо $H^*(x) = 0$, то маємо теплоізольоване включення. Тоді рівняння (8) служить також для визначення стрибка переміщень $\gamma(x)$ поверхонь тріщини при заданому на ній тиску $q(x)$ [6].

Для кругової області гіперсингулярне інтегральне рівняння (8) можна розв'язувати аналітично-чисельним методом [6]. Для цього його регуляризуємо, врахувавши, що $\gamma(x) = 0$ на колі, розбиваємо область S на граничні елементи за радіусом та кутом і задовольняємо рівняння у колокаційних точках усередині введених елементів, використовуючи кусково-сталу апроксимацію шуканих функцій та різницеві схеми для її перших і других похідних. Так приходимо до системи лінійних алгебричних рівнянь.

Для довільної однозв'язної області S, обмеженої гладким контуром $L(x)$, це рівняння також можна розв'язувати аналітично-чисельним способом, відобразивши попередньо контур $L(x)$ на коло одиничного радіуса [6].

Рівняння (8) має обмежений на контурі області S розв'язок

$$\gamma(x) = \sqrt{L(x)}\,\varphi(x), \qquad L(x) = a^2 - x_1^2 - x_2^2. \tag{9}$$

Розглянемо включення у вигляді тонкого сфероїда

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{a^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1, \qquad \frac{c}{a} \ll 1\,.$$

Його товщина $h = \dfrac{2c}{a}\sqrt{L(x)}$. Підставимо цей вираз і (9) у рівняння (8). Тоді

$$\frac{1}{\pi^2}\iint_S \frac{\sqrt{L(\xi)}\,\varphi(\xi)}{R^3(x,\xi)}d_\xi S - H\varphi(x) = q(x), \qquad H = \frac{2a\lambda_0}{\pi c\lambda}. \tag{10}$$

Якщо функція $q(x)$ є поліномом степеня n, то $\varphi(\xi)$ також є поліномом такого ж степеня і тоді можна одержати точний розв'язок рівняння (10).

Наведемо такий розв'язок, коли $q(x)$ і $\varphi(\xi)$ описуються поліномами третього степеня:

$$q(x) = \sum_{i,j=0}^{3} q_{ij} x_1^i x_2^j, \qquad \varphi(\xi) = \sum_{i,j=0}^{3} c_{ij} \xi_1^i \xi_2^j. \tag{11}$$

Підставимо вирази (11) у рівняння (10) та обчислимо інтеграли

$$J_{ij}(x) = \frac{1}{\pi^2} \iint_S \frac{\sqrt{L(\xi)}\, \xi_1^i \xi_2^j}{R^3(x,\xi)} d_\xi S \qquad \text{при} \qquad i, j = 0, 1, 2, 3: \tag{12}$$

$$J_{00} = \frac{1}{2}, \qquad J_{10}(x) = \frac{1}{2} 3x_1, \qquad J_{11}(x) = \frac{1}{8} 15 x_1 x_2,$$

$$J_{20}(x) = \frac{1}{16}(4a^2 - 33x_1^2 - 3x_2^2), \qquad J_{21}(x) = \frac{1}{32} x_2 (6a^2 - 75x_1^2 - 5x_2^2),$$

$$J_{30}(x) = \frac{1}{32} x_1 (18a^2 - 85x_1^2 - 15x_2^2).$$

Вирази для $J_{01}(x)$, $J_{02}(x)$, $J_{12}(x)$ і $J_{03}(x)$ одержуємо з наведених вище перестановкою індексів.

Прирівнявши в отриманому співвідношенні коефіцієнти при однакових степенях x_1 і x_2, одержимо систему алгебричних рівнянь для визначення коефіцієнтів c_{ij}, після розв'язання якої знайдемо:

$$c_{00} = -\frac{1}{1+H} q_{00} - \frac{4a^2(30+16H)}{(1+H)d_1^2 - 9}(q_{20} + q_{02}),$$

$$c_{20} = -\frac{16}{d_1 - 9}(d_1 q_{20} - 3q_{02}),$$

$$c_{10} = -\frac{2}{3+2H} q_{10} - \frac{12a^2(70+32H)}{(3+2H)(d_2 d_3 - 75)}(q_{12} + 3q_{30}),$$

$$c_{11} = -\frac{8}{15+8H} q_{11}, \qquad c_{12} = -\frac{32}{d_2 d_3 - 75}(d_2 q_{12} - 15 q_{30}),$$

$$c_{30} = \frac{32}{d_2 d_3 - 75}(5q_{12} - d_3 q_{30}),$$

$$d_1 = 33 + 16H, \qquad d_2 = 85 + 32H, \qquad d_3 = 75 + 32H.$$

Вирази для c_{01}, c_{21}, c_{02}, c_{03} одержуємо з c_{10}, c_{12}, c_{20}, c_{30}, замінивши q_{10}, q_{12}, q_{30}, q_{20}, q_{02} відповідно на q_{01}, q_{21}, q_{03}, q_{02}, q_{20}. Коефіцієнти c_{ij} збігаються з наведеними у праці [9], а при $H = 0$ – зі значеннями b_{ij} у статті [8].

Якщо права частина рівняння (10) є довільною гладкою функцією, то її можна наближено записати у вигляді полінома і одержати точний розв'язок.

Осесиметричне температурне поле. В осесиметричному випадку, коли густина теплових диполів не залежить від кутової координати, вираз для температури (4) та інтегральне рівняння (10) можна записати в циліндричній системі координат (r, x_3). Для цього розглянемо інтеграл [6]

$$\iint_S \frac{d_\xi S}{R(x^*, \xi)} = \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\rho\, d\rho\, d\varphi}{\sqrt{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos(\varphi - \theta) + x_3^2}} =$$

$$= 2\pi \int_0^\infty e^{-\eta |x_3|} \int_0^a \rho J_0(\eta\rho) J_0(\eta r)\, d\rho\, d\eta, \tag{13}$$

де $J_0(z)$ – функція Бесселя.

Якщо потужність теплових диполів в області S є $\gamma(\rho)$, то із (4) і (13) маємо

$$t(r,x_3) = -\frac{1}{4\pi\lambda}\frac{\partial}{\partial x_3}\iint_S \frac{\gamma(\rho)}{R(x^*,\xi)}\,dS = \frac{\operatorname{sgn} x_3}{2\lambda}\int_0^\infty \eta\Gamma(\eta)J_0(\eta r)e^{-\eta|x_3|}\,d\eta\,, \quad (14)$$

$$\Gamma(\eta) = \int_0^a \rho\gamma(\rho)J_0(\eta\rho)\,d\rho\,. \quad (15)$$

Візьмемо звідси похідну за x_3 і підставимо в граничну умову (3). Тоді інтегральне рівняння (8) набуде вигляду

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \eta^2\Gamma(\eta)J_0(\eta r)\,d\eta - H^*(r)\gamma(r) = q(r)\,, \quad (16)$$

де $H^*(r) = \dfrac{\lambda_0}{\lambda h(r)}$, $q(r) = -\lambda \left.\dfrac{\partial t_0(r,x_3)}{\partial x_3}\right|_{x_3=0}$.

Для сфероїдного включення

$$\frac{r^2}{a^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1, \qquad \frac{c}{a} \ll 1\,,$$

товщина $h(r) = \dfrac{2c}{a}\sqrt{a^2 - r^2}$. Тоді $H^*(r) = \dfrac{a\lambda_0}{2c\lambda\sqrt{a^2 - r^2}}$.

Якщо права частина рівняння (16) є поліномом степеня $2n$, тоді також можна одержати точний розв'язок цього рівняння. Нехай

$$q(r) = \sum_{k=0}^{n} q_k r^{2k}, \qquad \gamma(r) = \sqrt{a^2 - \rho^2}\sum_{k=0}^{n} c_k\rho^{2k}. \quad (17)$$

Підставимо вираз для $\gamma(\rho)$ у формулу (15) і обчислимо інтеграл [16]

$$\Gamma(\eta) = \sum_{k=0}^{n} c_k\int_0^a \sqrt{a^2 - \rho^2}\rho^{2k+1}J_0(\eta\rho)\,d\rho =$$

$$= a\sqrt{\frac{a\pi}{2}}\sum_{k=0}^{n} c_k(k!)^2\sum_{i=0}^{k}\frac{(-1)^i 2^{k-i} a^{i+k}}{(i!)^2(k-i)!}\eta^{i-k-\frac{3}{2}}J_{i+k+\frac{3}{2}}(\eta a)\,. \quad (18)$$

Враховуючи (18), знайдемо значення інтегральної частини рівняння (16):

$$\int_0^\infty \eta^2\Gamma(\eta)J_0(\eta r)\,d\eta =$$

$$= a\sqrt{\frac{a\pi}{2}}\sum_{k=0}^{n} c_k(k!)^2\sum_{i=0}^{k}\frac{(-1)^i 2^{k-i} a^{i+k}}{(i!)^2(k-i)!}\int_0^\infty \eta^{i-k+\frac{1}{2}}J_{i+k+\frac{3}{2}}(\eta a)J_0(\eta r)\,d\eta =$$

$$= \frac{\pi}{2}\sum_{k=0}^{n} c_k k!\,a^{2k}\sum_{i=0}^{k}\frac{(-1)^i\,(3/2)_i}{(i!)^2(k-i)!}F\left(i+\frac{3}{2},-k,1,\frac{r^2}{a^2}\right), \qquad r < a\,, \quad (19)$$

де $\quad F(a,b,c,z) = \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(a)_m(b)_m}{(c)_m\,m!}z^m$ − гіпергеометрична функція;

$(a)_k = a(a+1)\ldots(a+k-1)$ − символ Похгамера.

Після врахування інтеграла (19) і виразів (17) рівняння (16) матиме вигляд

$$\frac{\pi}{4}\sum_{k=0}^{n} c_k k!\,a^{2k}\sum_{i=0}^{k}\frac{(-1)^i(3/2)_i}{(i!)^2(k-i)!}F\left(i+\frac{3}{2},-k,1,\frac{r^2}{a^2}\right) -$$

$$-\frac{a\lambda_0}{2c\lambda}\sum_{k=0}^{n} c_k r^{2k} = \sum_{k=0}^{n} q_k r^{2k}\,. \quad (20)$$

Якщо у виразі (20) прирівняти коефіцієнти при однакових степенях r^{2k}, то одержимо систему алгебричних рівнянь для визначення c_k. Зокрема, для теплоізольованого включення при $\lambda_0 = 0$ та $k = 2$ з рівняння (20) одержимо

$$\frac{\pi}{4}\left[c_0 - \frac{c_1}{4}(2a^2 - 9r^2) - \frac{c_2}{8}\left(a^4 + 9a^2r^2 - \frac{225}{8}r^4\right)\right] = q_0 + q_1r^2 + q_2r^4, \quad (21)$$

звідки визначаємо коефіцієнти c_0, c_1, c_2 через q_0, q_1, q_2:

$$c_0 = \frac{4}{\pi}\left(q_0 + \frac{2}{9}a^2q_1 + \frac{24}{225}a^4q_2\right),$$

$$c_1 = \frac{16}{9\pi}\left(q_1 + \frac{8}{25}a_2^2q_2\right), \qquad c_2 = \frac{256}{225\pi}q_2. \quad (22)$$

Враховуючи (18), запишемо вираз для температури (14) на включенні

$$t(r) = \frac{\operatorname{sgn} x_3}{2\lambda}\sqrt{\frac{a^3\pi}{2}}\sum_{k=0}^{n} c_k k!\sum_{i=0}^{k}\frac{(-1)^i 2^{k-i}k!\,a^{i+k}}{(i!)^2(k-i)!}\times$$

$$\times\int_0^\infty \eta^{i-k-\frac{1}{2}} J_{i+k+\frac{3}{2}}(\eta a)J_0(\eta r)\,d\eta =$$

$$= \frac{\operatorname{sgn} x_3}{2\lambda}a\sum_{k=0}^{n} c_k\frac{(k!)^2a^{2k}}{(3/2)_k}\sum_{i=0}^{k}\frac{(-1)^i}{i!(k-i)!}F\left(i+1, -k-\frac{1}{2}, 1, \frac{r^2}{a^2}\right).$$

Визначення дотичних напружень. Зумовлені тепловими диполями дотичні напруження на включенні визначаються формулами

$$\sigma_{i3}(x) = D\frac{\partial}{\partial x_i}\iint_S \frac{\gamma(\xi)}{R(x,\xi)}d_\xi S = D\iint_S \frac{\gamma(\xi)(x_i - \xi_i)}{R^3(x,\xi)}d_\xi S, \qquad i = 1, 2, \quad (23)$$

де $D = \dfrac{G\alpha_t(1+\nu)}{4\pi\lambda(1-\nu)}$; G – модуль зсуву; α_t і ν – коефіцієнти лінійного теплового розширення та Пуассона.

Обчисливши за формулами (12) інтеграли (23), коли

$$\gamma(\xi) = \sqrt{L(\xi)}\sum_{i,j=0}^{2} c_{ij}\xi_1^i\xi_2^j, \qquad i + j < 2,$$

одержимо

$$\sigma_{13}(x) = \frac{D\pi^2}{32}\left[-8a^2c_{10} + (16c_{00} - 10a^2c_{20} + 2a^2c_{02})x_1 -\right.$$

$$- 6a^2c_{11}x_2 + 12c_{01}x_1x_2 + 18c_{10}x_1^2 + 6c_{10}x_2^2 + 15c_{11}x_1^2x_2 +$$

$$\left. + 9(c_{20} + c_{02})x_1x_2^2 + (19c_{20} - c_{02})x_1^3 + 5c_{11}x_2^3\right],$$

$$\sigma_{23}(x) = \frac{D\pi^2}{32}\left[-8a^2c_{01} - 6a^2c_{11}x_1 + (16c_{00} + 2a^2c_{20} - 10a^2c_{02})x_2 +\right.$$

$$+ 12c_{10}x_1x_2 + 6c_{01}x_1^2 + 18c_{01}x_2^2 + 9(c_{20} + c_{02})x_1^2x_2 +$$

$$\left. + 15c_{11}x_1x_2^2 + 5c_{11}x_1^3 + (19c_{02} - c_{20})x_2^3\right]. \quad (24)$$

Для теплоізольованого включення з урахуванням рівняння (10) при $H = 0$ формулу (23) можна записати ще у вигляді

$$\sigma_{i3}(x) = Dx_iq(x) - D\iint_S \frac{\xi_i\gamma(\xi)}{R^3(x,\xi)}d_\xi S, \qquad i = 1, 2.$$

Тоді

$$\sigma_{13}(x) = Dx_1 q(x) - \frac{D\pi^2}{32}\big[8a^2c_{10} + (-48c_{00} + 18a^2c_{20} + 6a^2c_{02})x_1 +$$

$$+ 6a^2c_{11}x_2 - 60c_{01}x_1x_2 - 66c_{10}x_1^2 - 6c_{10}x_2^2 - 75c_{11}x_1^2x_2 -$$

$$- 15(c_{20} + 5c_{02})x_1x_2^2 - 5(17c_{20} + c_{02})x_1^3 - 5c_{11}x_2^3\big],$$

$$\sigma_{23}(x) = Dx_2 q(x) - \frac{D\pi^2}{32}\big[8a^2c_{01} + 6a^2c_{11}x_1 + (-48c_{00} + 6a^2c_{20} +$$

$$+ 18a^2c_{02})x_2 - 60c_{10}x_1x_2 - 6c_{01}x_1^2 - 66c_{01}x_2^2 - 15(5c_{20} +$$

$$+ c_{02})x_1^2x_2 - 75c_{11}x_1x_2^2 - 5c_{11}x_1^3 - 5\left(17c_{02} + c_{20}\right)x_2^3\big]. \qquad (25)$$

В осесиметричному випадку, врахувавши вираз (13), маємо

$$\sigma_{r3}(x) = D\frac{\partial}{\partial r}\iint_S \frac{\gamma(\rho)}{R(x,\xi)}\, d_\xi S = -2\pi D\int_0^\infty \eta\Gamma(\eta)J_1(\eta r)\,d\eta\,. \qquad (26)$$

Підставимо у формулу (26) вираз (18) для $\Gamma(\eta)$ та обчислимо інтеграл. Тоді

$$\sigma_{r3}(x) = -\frac{\pi^2}{2}D\sum_{k=0}^{n} c_k k!\,a^{2k}\sum_{i=0}^{k}\frac{(-1)^i(2i+1)!!\,r}{2^i(i!)^2(k-i)!}F\left(i+\frac{3}{2}, -k, 2, \frac{r^2}{a^2}\right),$$

$$r < a\,, \qquad (27)$$

де $(2i+1)!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2i+1)$.

Визначення коефіцієнтів інтенсивності напружень. Якщо на місці включення міститься теплопроникна кругова тріщина, заповнена певним матеріалом, то стрибки переміщень поверхонь тріщини $\alpha_i(\xi) = \left[u_i^+(\xi) - u_i^-(\xi)\right]/4\pi$ у напрямі осей Ox_i, $i = 1, 2$, через які визначаються коефіцієнти інтенсивності напружень, знаходимо з інтегральних рівнянь [6]

$$\iint_S \frac{\alpha_k(\xi)}{R^3(x,\xi)}\, d_\xi S + (-1)^k \nu\frac{\partial}{\partial x_{3-k}}\iint_S \left[\alpha_1(\xi)\frac{\partial}{\partial x_2} - \alpha_2(\xi)\frac{\partial}{\partial x_1}\right]\frac{d_\xi S}{R(x,\xi)} =$$

$$= \frac{1-\nu}{G}\sigma_{k3}(x), \qquad k = 1, 2\,, \qquad (28)$$

де $\sigma_{k3}(x)$ визначаються виразами (24) або (25).

Розв'язки рівнянь (28) дорівнюють нулеві на контурі тріщини і записуються у вигляді

$$\alpha_k(\xi) = \sqrt{L(\xi)}\,\psi_k(\xi)\,.$$

Нехай права частина рівнянь (28) є поліномом другого степеня:

$$\sigma_{13}(x) = \sum_{i,j=0}^{2} p_{ij}x_1^i x_2^j, \qquad \sigma_{23}(x) = \sum_{i,j=0}^{2} \omega_{ij}x_1^i x_2^j\,. \qquad (29)$$

Тоді функції $\psi_k(\xi)$ шукаємо також у вигляді полінома другого степеня з невідомими коефіцієнтами:

$$\psi_1(\xi) = \sum_{i,j=0}^{2} a_{ij}\xi_1^i\xi_2^j, \qquad \psi_2(\xi) = \sum_{i,j=0}^{2} b_{ij}\xi_1^i\xi_2^j\,. \qquad (30)$$

Підставимо подання (29), (30) у рівняння (28), знайдемо відповідні інтеграли і, прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях x_1 та x_2, одержимо систему алгебричних рівнянь для визначення коефіцієнтів a_{ij} та

b_{ij} функцій $\psi_k(\xi)$, розв'язавши яку маємо

$$\pi^2 a_{00} = -\frac{2}{2-\nu} p_{00} - \frac{2\nu a^2}{45(1-\nu)} \omega_{11} -$$

$$- \frac{2a^2(5+2\nu)}{45(2-\nu)} p_{20} - \frac{2a^2(5-7\nu)}{45(1-\nu)(2-\nu)} p_{02},$$

$$\pi^2 a_{10} = \frac{1}{3(2-\nu)} \left[\nu\omega_{01} - (4-\nu) p_{10}\right],$$

$$\pi^2 a_{01} = \frac{1}{3(1-\nu)(2-\nu)} \left[\nu\omega_{10} - (4-3\nu) p_{01}\right],$$

$$\pi^2 a_{20} = \frac{4(1-2\nu)}{45(1-\nu)(2-\nu)} p_{02} - \frac{4(11-4\nu)}{45(2-\nu)} p_{20} + \frac{2\nu(5-4\nu)}{45(1-\nu)(2-\nu)} \omega_{11},$$

$$\pi^2 a_{02} = \frac{4(1+\nu)}{45(2-\nu)} p_{20} - \frac{4(11-7\nu)}{45(1-\nu)(2-\nu)} p_{02} + \frac{2(5-\nu)\nu}{45(1-\nu)(2-\nu)} \omega_{11},$$

$$\pi^2 a_{11} = \frac{4\nu}{15(1-\nu)(2-\nu)} \omega_{20} + \frac{4\nu}{15(2-\nu)} \omega_{02} - \frac{2(\nu^2-8\nu+8)}{15(1-\nu)(2-\nu)} p_{11},$$

$$\pi^2 b_{00} = -\frac{2}{2-\nu} \omega_{00} - \frac{2\nu a^2}{45(1-\nu)} p_{11} -$$

$$- \frac{2a^2(5+2\nu)}{45(2-\nu)} \omega_{02} - \frac{2a^2(5-7\nu)}{45(1-\nu)(2-\nu)} \omega_{20},$$

$$\pi^2 b_{10} = \frac{1}{3(1-\nu)(2-\nu)} \left[\nu p_{01} - (4-3\nu)\omega_{10}\right],$$

$$\pi^2 b_{01} = \frac{1}{3(2-\nu)} \left[\nu p_{10} - (4-\nu)\omega_{01}\right],$$

$$\pi^2 b_{20} = \frac{4(1+\nu)}{45(2-\nu)} \omega_{02} - \frac{4(11-7\nu)}{45(1-\nu)(2-\nu)} \omega_{20} + \frac{2(5-\nu)\nu}{45(1-\nu)(2-\nu)} p_{11},$$

$$\pi^2 b_{02} = \frac{4(1-2\nu)}{45(1-\nu)(2-\nu)} \omega_{20} - \frac{4(11-4\nu)}{45(2-\nu)} \omega_{02} + \frac{2\nu(5-4\nu)}{45(1-\nu)(2-\nu)} p_{11},$$

$$\pi^2 b_{11} = \frac{4\nu}{15(1-\nu)(2-\nu)} p_{02} + \frac{4\nu}{15(2-\nu)} p_{20} - \frac{2(\nu^2-8\nu+8)}{15(1-\nu)(2-\nu)} \omega_{11}. \qquad (31)$$

За відомими функціями $\psi_k(\xi)$ визначаємо коефіцієнти інтенсивності дотичних напружень [6]:

$$K_2(\theta, a) = -\frac{2G\pi\sqrt{a\pi}}{1-\nu} \left[\psi_1(\theta, a)\cos\theta + \psi_2(\theta, a)\sin\theta\right],$$

$$K_3(\theta, a) = -2G\pi\sqrt{a\pi} \left[\psi_1(\theta, a)\sin\theta - \psi_2(\theta, a)\cos\theta\right].$$

В осесиметричному випадку, коли на поверхнях тріщини задано радіальне дотичне навантаження, коефіцієнт інтенсивності напружень $K_2(a)$ задається виразом [18]

$$K_2(a) = -\frac{2}{a\sqrt{a\pi}} \int_0^a \frac{r^2 \sigma_{r3}(r)\, dr}{\sqrt{a^2 - r^2}}. \qquad (32)$$

Приклад. Розглянемо випадок теплоізольованого дискового включення при заданому однорідному тепловому потоці $q = q_0$, спрямованому перпендикулярно до диска. Тоді з (22) $c_0 = \frac{4}{\pi} q_0$ і за формулою (27) знайдемо

$$\sigma_{r3}(x) = -2\pi D q_0 r, \qquad r < a. \tag{33}$$

Підставляючи вираз (33) у формулу (32), отримуємо

$$K_2(a) = -\frac{2}{a\sqrt{a\pi}} \int_0^a \frac{r^2 \sigma_{r3}(r)\, dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} = \frac{2}{3} a q_0 \sqrt{a\pi} D = \frac{E\alpha_t q_0 a \sqrt{a}}{3\sqrt{\pi}(1-\nu)\lambda}, \tag{34}$$

де E – модуль пружності. Вираз (34) для $K_2(a)$ співпадає з наведеним у монографії [6].

З використанням поданої вище методики визначено коефіцієнти інтенсивності напружень при згині балок прямокутного та еліптичного перерізу з круговою тріщиною за різних умов навантаження [10].

Висновки. Записано гіперсингулярне інтегральне рівняння II-го роду (10) для визначення стрибка температури на поверхнях тонкого дискового теплопроникного (зокрема теплоізольованого) включення при його неідеальному тепловому контакті з основним матеріалом. Поза включенням відомий тепловий потік. Це рівняння годиться також для визначення стрибка нормальних переміщень поверхонь тонкого пружного включення малої жорсткості (зокрема, тріщини) при розтязі тіла зусиллями, що описуються поліномом. За відомим стрибком переміщень можна знайти коефіцієнти інтенсивності напружень.

Наведеним у роботі виразом (4) для температури описується також температурне поле у півбезмежному тілі, коли в області S його межі задано температуру або тепловий потік, а решта частини межі перебуває при нульовій температурі.

Описаний вище метод годиться також при розв'язуванні задач теплопровідності та термопружності для тіла з тонким еліпсоїдним включенням.

1. *Ботт М.* Внутреннее строение Земли. – Москва: Мир, 1974. – 373 с.
2. *Кит Г. С., Побережный О. В.* О напряженном состоянии нагреваемого материала, имеющего внутренние дефекты типа круговых трещин // Физ.-хим. мех. материалов. – 1969. – **5**, № 3. – С. 345–350.
   Те саме: *Kit G. S., Poberezhnyi O. V.* The stressed state of a heated material with internal circular-crack type defects // Mater. Sci. – 1969. – **5**, No. 3. – P. 262–265.
3. *Кит Г. С., Побережный О. В.* О предельном равновесии хрупкого тела с дискообразной трещиной при действии силовых и температурных факторов // Физ.-хим. мех. материалов. – 1972. – **8**, № 2. – С. 63–69.
   Те саме: *Kit G. S., Poberezhnyi O. V.* Limiting equilibrium of a brittle body with a disk-shaped crack, affected by force and temperature factors // Mater. Sci. – 1972. – **8**, No. 2. – P. 187–192.
4. *Кит Г. С., Побережный О. В.* Термоупругое состояние бесконечного тела с теплопроводящей круговой трещиной // Тепловые напряжения в элементах конструкций. – 1970. – Вып. 9. – С. 78–88.
5. *Кит Г. С., Хай М. В.* Интегральные уравнения осесимметричных задач термоупругости для тела с трещинами // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1977. – Вып. 6. – С. 3–7.
6. *Кит Г. С., Хай М. В.* Метод потенциалов в трехмерных задачах термоупругости тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1989. – 284 с.
7. *Кит Г. С., Хай М. В.* Осесимметричная задача термоупругости для бесконечного тела, ослабленного двумя параллельными круглыми щелями // Тепловые напряжения в элементах конструкций. – 1972. – Вып. 12. – С. 101–108.
8. *Кіт Г. С.* Задачі стаціонарної теплопровідності та термопружності для тіла з тепловиділенням на круговій області (тріщині) // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – **51,** № 4. – С. 120–128.

Те саме: *Kit H. S.* Problems of stationary heat conduction and thermoelasticity for a body with heat release on a circular domain (crack) // J. Math. Sci. – 2010. – **167**, No. 2. – P. 141–153.
9. *Кіт Г. С., Сушко О. П.* Розподіл стаціонарної температури та напружень у тілі з теплопроникним дисковим включенням // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла. – 2009. – Вип. 10. – С. 145–153.
10. *Кіт Г. С., Сушко О. П., Лозовий Б. Л.* Згин балок з круговими тріщинами // Машинознавство. – 2007. – № 2. – С. 9–13.
11. *Любимова Е. А.* О температурном градиенте в верхних слоях Земли и возможности объяснения слоя пониженных скоростей // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. – 1959. – № 12. – С. 1861–1863.
12. *Панасюк В. В., Стадник М. М., Силованюк В. П.* Концентрация напряжений в трехмерных телах с тонким включением. – Киев: Наук. думка, 1986. – 216 с.
13. *Підстригач Я. С.* Умови теплового контакту твердих тіл // Доп. АН УРСР. – 1963. – № 7. – С. 872–874.
14. *Побережный О. В.* Термоупругое состояние среды с теплоизолированной круговой трещиной // Прикл. механика. – 1970. – **6**, № 11. – С. 59–66.
Те саме: *Poberezhnyi O. V.* The thermoelastic state of a medium with a heat-insulated circular crack // Int. Appl. Mech. – 1970. – **6**, No. 11. – P. 1206–1211.
15. *Подстригач Я. С.* Температурное поле в системе твердых тел, сопряженных с помощью тонкого промежуточного слоя // Инж.-физ. журн. – 1963. – **6**, № 10. – С. 129–136.
16. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Специальные функции. – Москва: Наука, 1983. – 752 с.
17. *Саврук М. П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1981. – 324 с.
18. *Саврук М. П.* Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1988. – 620 с. – (Механика разрушения и прочность материалов: Справ. пособие в 4 т. / Под общ. ред. В. В. Панасюка – Т. 2.)
19. *Florence A. I., Goodier I. N.* The linear thermoelastic problem of uniform heat flow disturbed by a penny-shaped insulated crack // Int. J. Eng. Sci. – 1963. – **1**, No. 6. – P. 533–540.
20. *Fu W. S.* Thermal stresses in an elastic solid weakened by two complanar circular cracks // Int. J Eng. Sci. – 1973. – **11**, No. 3. – P. 317–330.
21. *Srivastava K. N., Palaiya R. M.* The distribution of thermal stress in a semi-infinite elastic solid containing a penny-shaped crack // Int. J. Eng. Sci. – 1969. – **7**, No. 7. – P. 641–666.

ЗАДАЧИ СТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ТЕЛА С ТЕПЛОПРОНИЦАЕМЫМ ДИСКОВЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ (ТРЕЩИНОЙ)

Задача стационарной теплопроводности для тела с теплопроницаемым дисковым включением, между поверхностями которого осуществляется неидеальный тепловой контакт, сведена к гиперсингулярному интегральному уравнению II рода. Приведено точное решение этого уравнения, когда его правая часть является полиномом третьей, а в осесимметричном случае – n*-й степени. В этих случаях определены обусловленные тепловыми диполями сдвиговые напряжения на включении и коэффициенты интенсивности касательных напряжений для теплопроницаемой круговой трещины.*

STATIONARY HEAT CONDUCTION AND THERMOELASTICITY PROBLEMS FOR A BODY WITH HEAT-PERMEABLE DISC INCLUSION (CRACK)

The stationary heat conduction problem for a body with heat-permeable disc inclusion with non-ideal thermal contact between its surfaces is reduced to the second kind hypersingular integral equation. If the right-hand side of equation is a third degree polynomial and in an axially symmetric case it is of the n*-th degree, the exact solution of the singular integral equation is presented. In these cases the shearing force on the inclusion caused by thermal dipoles are found and the intensity factors of tangential*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
25.11.09