

## ОЦІНКА КОНЦЕНТРАЦІЇ НАПРУЖЕНЬ У ПРУЖНІЙ МАТРИЦІ БІЛЯ ДОВІЛЬНО ОРІЄНТОВАНИХ ВКЛЮЧЕНЬ МЕНШОЇ ЖОРСТКОСТІ

*За допомогою розрахункової моделі встановлено характер розподілу напружень у пружній матриці в околі довільно орієнтованих включень з жорсткістю нижчою, ніж у матриці. Показано, що максимальні напруження в околі порожнини є більшими від відповідних напружень в околі включення тієї ж форми. Це свідчить про те, що некоректно вважати порожнинами включення, жорсткість яких є суттєво меншою, ніж у матриці. Отримані числовим методом дані добре узгоджуються з результатами аналітичних розрахунків.*

**Стан проблеми та актуальність досліджень.** У сучасному машинобудуванні, транспорті, будівництві та інших галузях техніки широко використовують різноманітні металеві сплави, які мають значну кількість включень різного походження. Останні сприяють зародженню і розвитку ранніх стадій руйнування у таких конструкційних матеріалах при навантаженнях, набагато нижчих від експлуатаційних. Це, у свою чергу, призводить до макроруйнування виготовлених із них деталей чи елементів конструкцій часто набагато швидше, ніж визначено розрахунковим ресурсом їх експлуатування. Тому важливо вміти діагностувати руйнування включень у згаданих конструкційних матеріалах з метою запобігання їх передчасного руйнування. Для цього використовують методи неруйнівного контролю [9].

Міцність і характер руйнування тіл з включеннями залежить від багатьох чинників, зокрема від фізико-механічних характеристик включення і матриці, від форми і розміру включення, а також від міцності зчеплення між компонентами матеріалу. На підставі експериментальних досліджень, присвячених вивченню цієї проблеми, показано, що у процесі деформування тіл з включеннями, здебільшого, початком руйнування (зародження тріщин) є руйнування самого включення [14]. Тому значну зацікавленість представляє вивчення напружено-деформованого стану тіл з включеннями, що призводить до зародження тріщиноутворення.

Суттєвий внесок у розв'язання окреслених науково-технічних задач зробили відомі українські вчені: Ю. Н. Подільчук (розв'язання просторових задач про напружений стан трансверсально-ізотропних тіл з включеннями); О. Є. Андрейків (розв'язання динамічних задач теорії тріщин про руйнування крихких включень); Г. Т. Сулим (оцінка впливу форми включень на концентрацію напружень у твердому тілі); В. П. Силованюк і М. М. Стадник (розв'язання задач про руйнування попередньо напружених і трансверсально-ізотропних тіл з дефектами типу включень різної форми); В. В. Божидарник (оцінка концентрації напружень навколо включень), а також такі вчені як О. М. Гузь, В. Б. Рудницький, М. В. Делявський, М. Г. Стащук, М. М. Кундрат та багато інших [див. 1–4, 6, 10, 12, 15–16].

Однак і до нині проблема оцінки розподілу напружень в околі довільно орієнтованих включень меншої жорсткості не є вирішеною повністю. На її часткове розв'язання направлені дослідження даної праці.

Як показано у працях [7, 13, 17], на початкових стадіях руйнування пошкоджені області розвиваються всередині матеріалу і локально поширюються у стиснутій зоні зразка, тому виявити їх оптично, як того вимагають методики нормативних документів, неможливо. Після цього, унаслідок злиття мікротріщин у макротріщини, відбувається вихід останніх на бокову поверхню зразка вже після суттєвого розвитку руйнування [13]. Тому для ефективного виявлення його скритих початкових стадій застосовують метод акустичної емісії (АЕ) [13, 17]. Аналіз одержаних результатів АЕ-контролю, фрактографії і даних літературних джерел дав можливість описати меха-

нізми та динаміку процесів руйнування чавунів і сформулювати моделі докритичного розповсюдження у них макротріщин, що супроводжується випромінюванням АЕ. Показано високу ефективність цього методу для оцінки стадій і механізмів руйнування чавунів різноманітної модифікації.

Вже у перших працях, де вивчали АЕ із кристалів, зауважили, що на її генерацію суттєво впливають границі зерен [18]. Для підтвердження цієї гіпотези низка дослідників, вивчаючи проблему руйнування алюмінієвих сплавів, зіставляла експериментальні АЕ-дані для монокристалів алюмінію різної чистоти [19]. Отримані результати часто носили суперечливий характер і не підтверджувалися дослідженнями структури матеріалу. Не дивлячись на те, що силова дія на алюміній та його сплави порівняно з іншими металами та конструкційними сплавами приводить до генерування сигналів АЕ високого рівня, перші теоретичні концепції про зв'язок між дислокаційними явищами і параметрами сигналів, розроблені ще недостатньо повно.

Добрим модельним матеріалом щодо вивчення напруженого стану твердих тіл із включеннями є чавун. Включення графіту у структурі чавуну у літературі прийнято розглядати як внутрішні дефекти відповідних розмірів, форми і розташування, які є концентраторами напружень і місцями зародження і розвитку руйнування. У діагностичному аспекті важливими є задачі визначення геометричних параметрів таких включень. Вирішення їх полягає у розробці нових методів досліджень прямих контактних задач динамічної теорії пружності. Їх теоретична сторона передбачає математичне моделювання динамічної взаємодії складових композиту, яким фактично є чавун, а також розробку числових аналітичних алгоритмів дослідження механічних явищ, які при цьому виникають. Щодо алгоритму розв'язання відповідних обернених задач, то виникають певні труднощі теоретичного та обчислювального характеру, зумовлені нелінійністю і некогерентністю обернених, а також недостатнім вивченням прямих задач. Для їх розв'язання найчастіше використовують числові методи.

Метод скінчених елементів достатньо широко застосовують для розв'язання задач механіки руйнування: розрахунку параметрів руйнування для областей різної форми; моделювання процесів руйнування чи поведінки тіл з нерухомою чи ростучою тріщиною в умовах, для яких ще не побудовані адекватні математичні моделі; аналізу міцності реальних конструкцій з точки зору опору крихкому руйнуванню [8].

На сучасному етапі розвитку комп'ютерних технологій існують ефективні програмні комплекси реалізації задач МСЕ, наприклад, ANSYS, FEMLAB, ABAQUSE, NASTRAN тощо.

**Результати числового розрахунку розподілу напружень у матриці та на включенні.** Розглянемо задачу про руйнування еліпсоїдального включення у суцільному середовищі, описану у праці [10], та спробуємо змодельовати і розрахувати напруження у включенні та його околі і порівняти їх з даними, отриманими з аналітичних залежностей. Напруження у включенні, що діють по нормалі до площини перерізу по великій осі еліпсоїда, визначають за формулою [10]

$$\sigma_{zz} = \frac{\sigma^{\infty} q [E(k) + 2\beta(1 - v^2)]}{2\beta q(1 - v^2) + E(k)}. \quad (1)$$

Тут  $q = E_{In}/E_M$  – відношення модулів Юнга графітового включення і матриці чавуну;  $\beta = b/c$  – відношення довжин півосей еліпсоїда ( $b$  – велика

вісь);  $k^2 = (a^2 - b^2)/a^2$ ;  $E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha} d\alpha$  – повний еліптичний ін-

теграл другого роду;  $v$  – коефіцієнт Пуассона;  $\sigma^{\infty}$  – напруження розтягу, прикладені на нескінченності.

Напруження в околі включення обчислимо за формулою

$$\sigma_{zz} = \frac{[2\beta(1 - qv^2) + E(k)]\sigma^\infty}{2\beta q(1 - v^2) + E(k)}. \quad (2)$$

Відмітимо, що узгодження результатів розрахунків, отриманих за формулами (1) і (2), з відомими даними для еліптичного [11] і сферичного [10] включень свідчить про їх високу точність.

У літературі доволі поширеним є твердження про те, що у чавунах графітові включення можуть розглядатися як порожнини, оскільки їх модуль пружності на порядок менший від модуля пружності металічної матриці. Формула (2) дозволяє оцінити справедливість такого припущення. Зокрема, поклавши  $q=0$ , знайдемо наближене значення концентрації напружень в околі еліпсоїдальної порожнини за формулою

$$\sigma_{zz} = \frac{[2\beta + E(k)]\sigma^\infty}{E(k)}. \quad (3)$$

У розрахунковій моделі матриці зі сферичним включенням розміри тіла та включення підбирали так, щоб вони були максимально наближені до розмірів реальних включень, а грані тіла суттєво не впливали на розподіл напружень під час навантаження, оскільки воно є безмежним. Щоб максимально відобразити властивості реального матеріалу і наблизити результати досліджень до конкретних прикладних задач, фізико-механічні характеристики матеріалів матриці і включення поклали такими [1]:

*пружне тіло (матриця):*  $20 \cdot 10^{10}$  Па – модуль Юнга; 0.3 – коефіцієнт Пуассона;  $7850 \text{ кг/м}^3$  – густина;  
*включення:*  $1.4 \cdot 10^{10}$  Па – модуль Юнга; 0.25 – коефіцієнт Пуассона;  $2300 \text{ кг/м}^3$  – густина.

Модель тіла та схему навантаження наведено на рис. 1. Розміри тіла вибрали  $120 \times 50 \times 50$  мкм, а в його центрі розмістили пружне еліпсоїдальне включення. Щоб дослідити зміну розподілу напружень у тілі та включенні при переході від кулеподібної форми до пластинчастої, у процесі експерименту змінювали співвідношення осей включення. Величина півосей початкового включення дорівнює 5 мкм (форму включення міняли на еліпсоїдальну шляхом збільшення однієї з осей еліпсоїда у напрямку, перпендикулярному до напрямку прикладених зусиль навантаження).

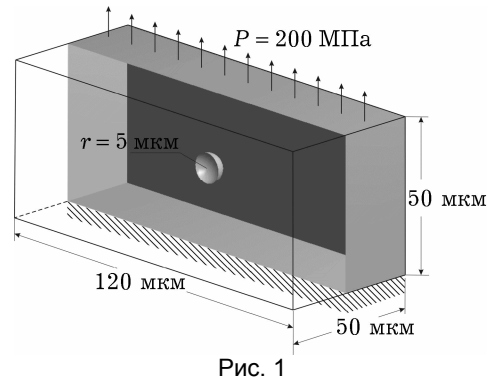


Рис. 1

Розбиття тіла проводили з використанням тривимірних скінченних елементів у вигляді тетраедра з 10-ма вузлами. Аналогічне розбиття на скінченні елементи застосовували для включення. Кількість елементів у тілі з наявним включенням та без нього становила відповідно 11651 і 11414. Обчислення проводили за допомогою програми ANSYS. Розміри елементів розбиття, що становить 3 мкм, оптимізували так, щоб процес розрахунку не потребував багато часу, а результат був стабільним, тобто не був чутливим до зменшення розмірів елементів.

При розрахунках навантаженого тіла, зображеного на рис. 1, приймаємо, що нижня грань защемлена, тобто її переміщення  $u_z = 0$  вздовж осі  $z$ , а до верхньої прикладене розподілене навантаження (тут і надалі приймаємо, що напруження на нескінченності  $\sigma^\infty = 200$  МПа). Результати обчислень розподілу напружень для випадку, коли включенням є порожнина, наве-

дено на рис. 2а, а для графітового включення такого ж розміру – на рис. 2б. Розподіл напружень на рис. 2а свідчить про те, що навантаження призводить до концентрації напружень в околі порожнини. У табл. 1 наведено порівняння для цих випадків максимальних напружень, обчислених методом скінчених елементів і за аналітичними формулами (1)–(3).

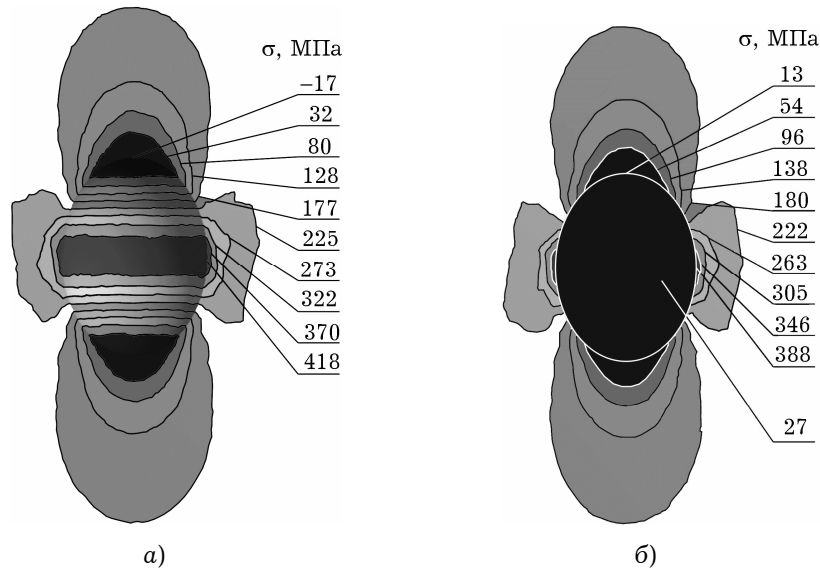


Рис. 2

Таблиця 1

Максимальні напруження	Числовий розрахунок, МПа	Розрахунок за формулами (1)–(3), МПа
В околі порожнини	418	455
В околі включення	388	394
У включенні	27	48

Отже, розрахунки показують, що максимальні напруження в околі порожнини є більшими від відповідних напружень в околі графітового включення. Це свідчить про те, що некоректно вважати порожнини включення, жорсткість яких є суттєво меншою від жорсткості матриці.

У табл. 2 наведено значення максимальних напружень у матриці і графітовому включенні при зовнішньому навантаженні  $\sigma^\infty = 200$  МПа для різних співвідношень осей еліпсоїдального включення ( $\beta = 1, 2, \dots, 10$ ), розраховані чисельним методом і за формулами (1)–(3).

Таблиця 2

Співвідношення півосей еліпсоїда $\beta = b/c$	Напруження у включенні, МПа		Напруження в околі включення, МПа	
	Числовий розрахунок	Аналітичний розрахунок	Числовий розрахунок	Аналітичний розрахунок
1	27	48	388	394
2	33	53	459	442
3	35	56	486	460
4	35	56	513	468
5	37	57	542	472
6	38	57	547	475
7	38	58	548	477
8	41	58	551	478
9	42	58	552	479
10	42	58	554	480

Досліджували також зміну напружень у графітовому включенні та його околі при різній орієнтації великої осі до напрямку прикладання сил. На рис. 3 зображено розподіл напружень у тілі за орієнтації включення під кутом  $\theta = 45^\circ$  до напрямку прикладання зусиль розтягу при  $\beta = 3$ .

Залежності максимальних напружень в околі еліпсоїдального включення від орієнтації включення  $\theta$  для різних  $\beta$  зображено на рис. 4 (криві 1–5 відповідають значенням  $\beta = 2, 3, 4, 5, 6$ ). Як бачимо, напруження збільшуються зі зміною форми включення від кулеподібної до пластинчастої і зменшуються при орієнтації включення з наближенням великої осі до положення, паралельного до напрямку розтягу. Чим менші значення  $\beta$ , тим менше змінюються значення максимального напруження під час зміни положення великої осі відносно напрямку прикладання сил.

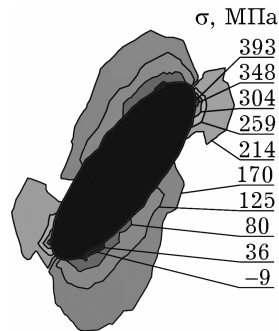


Рис. 3

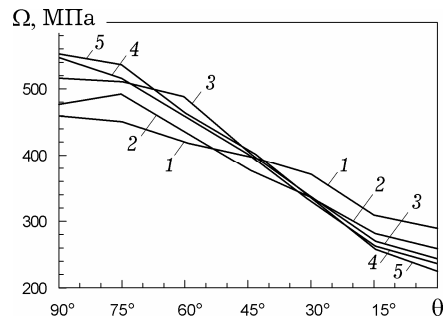


Рис. 4

Включення у матеріалі бувають не тільки пластинчасті чи кулеподібні, а можуть мати форми, наближені до призматичних. Зокрема, такі включення містять у своїй структурі алюмінієві сплави [5]. Змоделюємо тіло з призматичним включенням та обчислимо розподіл у ньому напружень. Для початку виберемо включення кубічної форми зі сторонами  $a = b = c = 10$  мкм і помістимо його у центр тіла, розміри та схема навантаження якого аналогічні описаній вище задачі. Фізико-механічні характеристики матеріалів матриці (алюмінієвий сплав) і включення покладали такими:

*пружне тіло (матриця):*  $7.1 \cdot 10^{10}$  Па – модуль Юнга; 0.33 – коефіцієнт Пуассона;  $2770 \text{ кг/м}^3$  – густина;  
*включення:*  $3 \cdot 10^{10}$  Па – модуль Юнга; 0.27 – коефіцієнт Пуассона;  $2700 \text{ кг/м}^3$  – густина.

Грані включення максимально заокруглені ( $r = 1$  мкм) для зменшення концентрації напружень біля них. На рис. 5 проілюстровано розподіл напружень у матриці (рис. 5а) і в кубічному включенні (рис. 5б) при орієнтації двох граней до напрямку прикладання зусиль розтягу під кутом  $\theta = 90^\circ$ .

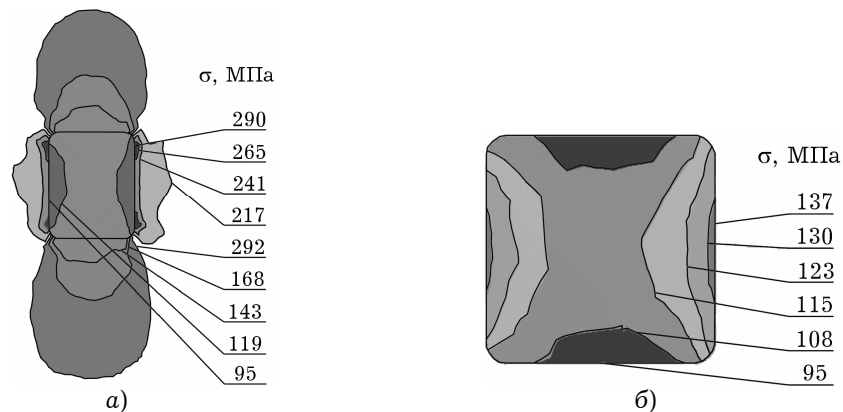


Рис. 5

У процесі дослідження змінювали форму включення через співвідношення сторін  $b/c$  і його орієнтацію у тілі. На рис. 6 наведено графік зміни максимальних напружень, що виникають в околі призматичного включення зі зміною орієнтації його великих граней стосовно напрямку розтягу, для різних співвідношень  $b/c$  (криві 1–4 відповідають значенням  $b/c = 1, 2, 3, 4$ ). Як видно, найбільші напруження виникають в околі включення при орієнтації великих граней під кутом  $\theta = 45^\circ$  до напрямку дії сил.

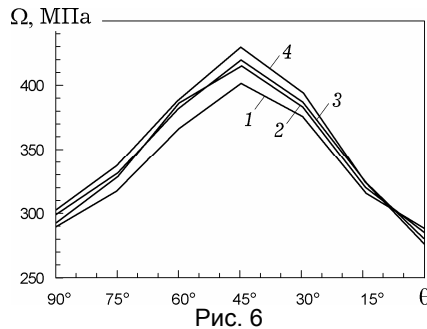


Рис. 6

**Висновки.** За результатами числових розрахунків розподілу максимальних напружень розтягу у матриці і в крихкому включенні встановлено, що некоректно моделювати таке включення порожниною. Кількісний розподіл напружень у матриці і у включенні показав, що суттєвий вплив на цей розподіл мають форма та розміри включень, їх орієнтація відносно напрямку прикладання сил. Для включень еліпсоїдальної форми найсприятливішою для руйнування є орієнтація його великої осі під кутом  $\theta = 90^\circ$  до напрямку дії сил. Чим більше витягнутим є включення, тим більше схильне воно до руйнування і сильніше змінює розподіл напружень залежно від кута прикладання сил. Призматичні включення найчутливіші до зовнішніх напружень розтягу при орієнтації їх великих граней під кутом  $\theta = 45^\circ$  до напрямку дії навантаження.

1. Андрейкив А. Е., Лысак Н. В. Метод акустической эмиссии в исследовании процессов разрушения. – Киев: Наук. думка, 1989. – 176 с.
2. Божидарник В. В., Сулим Г. Т. Концентрация напряжений біля тонкого теплопаивного включення // Вісн. Львів. політехн. ін-ту. – 1992. – Вип. 262. – С. 10–14.
3. Гузь А. Н., Рудницький В. Б. Основы теории контактного взаимодействия упругих тел с начальными (остаточными) напряжениями. – Хмельницький: Издание Ин-та механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, 2006. – 709 с.
4. Делявський М. В., Мазурак Л. П., Березницький Л. Т., Громяк Р. С. Распределение напряжений вблизи остроугольных дефектов // Физ.-хим. механика материалов. – 1979. – 15, № 6. – С. 71–76.  
Te same: Delyavskii M. V., Mazurak L. P., Berezhnitskii L. T., Gromyak R. S. The stress distribution near sharp-angled defects // Mater. Sci. – 1979. – 15, No. 6. – P. 615–619.
5. Дриц М. Е., Корольков А. М., Гук Ю. П. и др. Разрушение алюминиевых сплавов при растягивающих напряжениях. – Москва: Наука, 1973. – 215 с.
6. Кундрат Н. М. Об отслоении включения в ортотропной композиции // Прикл. механика. – 2000. – 36, № 9. – С. 123–128.  
Te same: Kundrat M. M. Separation of an inclusion in an orthotropic composition // Int. Appl. Mech. – 2000. – 36, No. 9. – P. 1235–1241.
7. Лысак Н. В., Скальський В. Р., Сергиенко О. Н. Использование метода акустической эмиссии для исследования разрушения чугунов // Техн. диагностика и неразрушающий контроль. – 1989. – № 3. – С. 37–45.
8. Морозов Е. М., Никишков Г. П. Метод конечных элементов в механике разрушения. – Москва: Наука, 1980. – 354 с.
9. Неруйнівний контроль і технічна діагностика / Під ред. З. Т. Назарчука. – Львів: Фіз.-мех. ін-т ім. Г. В. Карпенка НАН України, 2001. – 1134 с. – (Механіка руйнування і міцність матеріалів: Довідн. посібник / Під заг. ред. В. В. Панасюка. – Т. 5.)
10. Остап О. П., Волчок І. П., Колотилкін О. Б. та ін. Структура та опір руйнуванню залізобетонних сплавів. – Львів: Фіз.-мех. ін-т ім. Г. В. Карпенка НАН України, 2001. – 272 с.
11. Петерсон Р. Коэффициенты концентрации напряжений. – Москва: Мир, 1977. – 302 с.

12. Подильчук Ю. Н., Добривечер В. В. О термонапряженном состоянии трансверсально-изотропного тела с жестким эллиптическим включением, подверженном действию равномерного теплового потока в плоскости включения // Прикл. механика. – 1996. – **32**, № 8. – С. 31–40.  
Te same: Podil'chuk Yu. N., Dobrivecher V. V. Thermally stressed state of a transversally isotropic solid (containing a rigid elliptic inclusion) subjected to a uniform heat flow in the plane of the inclusion // Int. Appl. Mech. – 1996. – **32**, No. 8. – P. 602–610.
13. Скальський В. Р., Коваль П. М. Акустична емісія під час руйнування матеріалів, виробів і конструкцій. Методологічні аспекти відбору та обробки інформації. – Львів: Сполом, 2005. – 396 с.
14. Скальський В. Р., Сергієнко О. М., Окренкий Ю. С. Підходи до оцінки руйнування включень у твердому тілі (Огляд) // Техн. діагностика и неразрушающий контроль. – 2007. – № 3. – С. 18–25.
15. Стащук Н. Г. Продольный сдвиг изотропного тела с прямолинейным жестким включением // Физ.-хим. механика материалов. – 1981. – **16**, № 3. – С. 78–82.  
Te same: Stashchuk N. G. Longitudinal slip of an isotropic body with straight rigid inclusion // Mater. Sci. – 1981. – **16**, No. 3. – P. 262–265.
16. Сулим Г. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: Досл.-вид. центр НТШ, 2007. – 716 с.
17. Ткач А. Н., Лысак Н. В., Юськив Т. Я., Скальський В. Р., Шарков В. А. Методические особенности определения статической трещиностойкости чугунов // Физ.-хим. механика материалов. – 1988. – **24**, № 1. – С. 68–73.  
Te same: Tkach A. N., Lysak N. V., Yus'kiv T. Ya., Ovchinnikov V. I., Skal'skii V. R., Sharkov V. A. Special features of the method of determining static cracking resistance of cast irons // Mater. Sci. – 1988. – **24**, No. 1. – P. 65–70.
18. Kitagawa K., Ueda M., Hirose Y., Ishi H. Acoustic emission during plastic deformation of Al single crystals and bicrystals // Met. Fac. Technol. (Kanazawa Univ.). – 1980. – **13**, No. 2. – P. 175–185.
19. Rouby D., Fleischmann P. Spectral analysis of acoustic emission from aluminium crystals undergoing plastic deformation // Phys. Status Solidi (a). – 1978. – **48**, No. 2. – P. 439–445.

#### ОЦЕНКА КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ В УПРУГОЙ МАТРИЦЕ ОКОЛО ПРОИЗВОЛЬНО ОРИЕНТИРОВАННЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ МЕНЬШЕЙ ЖЕСТКОСТИ

С помощью расчетной модели установлен характер распределения напряжений в упругой матрице около произвольно ориентированных включений с жесткостью, более низкой, чем в матрице. Показано, что максимальные напряжения около полости больше соответствующих напряжений возле включения той же формы. Это свидетельствует о том, что некорректно считать полостями включения, жесткость которых является существенно меньшей, чем в матрице. Полученные числовым методом данные хорошо согласовываются с результатами аналитических расчетов.

#### EVALUATION OF STRESS CONCENTRATION IN ELASTIC MATRIX NEAR ARBITRARY ORIENTED INCLUSIONS WITH LESS RIGIDITY

Use of a calculation model has revealed the distribution character of stresses in an elastic matrix in the vicinity of arbitrary oriented inclusions with rigidity less than rigidity in the matrix. The maximum values of stresses near a cavity are larger than the corresponding stresses in the case of inclusions of the same shape. Therefore, even inclusions with rigidity substantially lower than that of matrix could not be considered as cavity. The results of numerical modeling agree well with analytical calculations.

Фіз.-мех. ін-т ім. Г. В. Карпенка  
НАН України, Львів

Одержано  
20.07.09