

## ИДЕНТИФИКАЦИЯ СТРУКТУР АРМИРОВАНИЯ ТОНКОСТЕННЫХ КОМПОЗИТНЫХ КОНСТРУКЦИЙ НА ОСНОВЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ О СТАЦИОНАРНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ТЕМПЕРАТУРЫ

*Сформулирована задача идентификации структур армирования тонкостенных композитных конструкций на основе результатов экспериментов о стационарном распределении температуры в них при специальных условиях теплового нагружения. Исследован частный случай оболочек вращения с осесимметричными структурами армирования. В условиях псевдореального эксперимента проведена реконструкция структуры армирования цилиндрической оболочки.*

В настоящее время в инженерной практике все более активно используются армированные материалы, позволяющие создавать изделия с уникальными физико-механическими характеристиками, которых нельзя добиться, используя традиционные конструкционные материалы. Так как композитный материал, как правило, создается в процессе изготовления изделия, то окончательные эффективные характеристики конструкции существенно зависят от структуры армирования. На практике при реализации конкретных структур (в силу нарушений заданных технологических режимов) может произойти отклонение параметров армирования от заданных расчетных значений (например, в силу усадки связующего в процессе его затвердевания и т. п.). Такое изменение значений параметров армирования приводит к отклонению физико-механических свойств изделия от расчетных значений (задаваемых проектировщиком). Поэтому актуальной является проблема идентификации реально полученных структур армирования композитных конструкций.

Настоящее исследование посвящено разработке теории такой идентификации на основе проведения серии специально организованных экспериментов при стационарном распределении температуры в диагностируемой тонкостенной композитной конструкции.

Рассматривается тонкостенный элемент конструкции (пластинчатый или оболочечный) постоянной толщины  $H = 2h$ , армированный  $N$  семействами волокон по поверхностям, эквидистантным срединной поверхности этого элемента. Введем ортогональную систему координат  $Ox_1x_2z$  так, чтобы поверхность  $z = 0$  совпадала со срединной поверхностью рассматриваемой конструкции, координата  $z$  определяет расстояние (со своим знаком) от произвольной точки до срединной поверхности.

Предполагается, что волокна имеют постоянные поперечные сечения (что естественно с технологической точки зрения) и армирование является квазиоднородным по толщине, поэтому плотность  $\omega_k$  и угол  $\psi_k$  (отсчитываемый от направления  $x_1$ ) армирования волокнами  $k$ -го семейства связаны соотношением [4]

$$(A_2\omega_k \cos \psi_k)_{,1} + (A_1\omega_k \sin \psi_k)_{,2} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N, \\ (x_1, x_2) \in G, \quad |z| \leq h, \quad (1)$$

где  $A_1, A_2$  – параметры Ламе срединной поверхности;  $G$  – область, занимаемая срединной поверхностью элемента в пространстве переменных  $x_1, x_2$ ; нижний индекс после запятой означает частное дифференцирование по соответствующей переменной  $x_i, z$ .

Если траектории армирования (углы  $\psi_k$ ) заданы, то для однозначного интегрирования уравнения (1) относительно  $\omega_k$  на части (обозначим ее  $\Gamma_k$ ) контура  $\Gamma$ , ограничивающего область  $G$ , на которой волокна  $k$ -го семейства входят в конструкцию, необходимо задать краевые условия [4]

$$\omega_k(n_1 \cos \psi_k + n_2 \sin \psi_k) = \Omega_k(\Gamma_k), \quad (x_1, x_2) \in \Gamma_k, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (2)$$

где  $n_1, n_2, n_z = 0$  – компоненты вектора единичной нормали к торцевой поверхности конструкции;  $\Omega_k$  – известная функция, пропорциональная количеству арматуры  $k$ -го семейства заданного поперечного сечения, входящей в конструкцию через единичную площадку торцевой поверхности [4].

Для решения задачи идентификации необходимо проведение серии специально организованных экспериментов. В настоящей работе будем предполагать, что на лицевых поверхностях  $z = \pm h$  тонкостенной конструкции обеспечивается конвективный теплообмен с одинаковыми характеристиками (с одной и той же температурой окружающей среды  $T_\infty$  и с одним и тем же коэффициентом теплоотдачи  $\mu$ ). На одной части торцевой поверхности ( $S_T$ ) поддерживается температура  $T(S_T) = T_0 = T_\infty = \text{const}$ , на другой части торцевой поверхности ( $S_q$ ) задан тепловой поток  $q_n$ , постоянный по толщине ( $q_{n,z} = 0$ ).

Согласно [6] в тонкостенной конструкции с квазиоднородной по толщине структурой армирования с точностью до  $\varepsilon^3$  (где  $\varepsilon$  – относительная толщина рассматриваемой конструкции) температуру  $T(x_1, x_2, z)$  в поперечном направлении  $z$  можно задать по параболическому закону. С учетом обусловленных особенностей теплообмена на лицевых поверхностях функцию  $T$  можно представить в виде

$$T(x_1, x_2, z) = T_*(x_1, x_2)(h^2 - z^2) + T_h(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in G, \quad |z| \leq h, \quad (3)$$

где  $T_*, T_h$  – функции, подлежащие определению.

Из граничных условий на лицевых поверхностях

$$[\mp \Lambda_{33} T_{,z} - \mu(T - T_\infty)]|_{z=\pm h} = 0,$$

с учетом (3) следует связь между  $T_*, T_h$ :

$$H\Lambda_{33}(x_1, x_2)T_*(x_1, x_2) = \mu(T_h(x_1, x_2) - T_\infty). \quad (4)$$

Далее для удобства изложения (хотя это и не принципиально) под  $T$  будем понимать отклонение температуры конструкции от значения  $T_0 = T_\infty$ . При этом уравнения теплового баланса (в стационарном случае) для элемента тонкостенной конструкции объемом  $HA_1A_2dx_1dx_2$  с учетом (3), (4) для двух ( $m = 1, 2$ ) теплофизических состояний запишутся так [3]:

$$-A_1^{-1}A_2^{-1} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (A_1A_2A_i^{-1}\Lambda_{ij}^{(m)}A_j^{-1}\theta_{,j}^{(m)})_{,i} + \beta^{(m)}\theta^{(m)} = 0, \quad (x_1, x_2) \in G, \quad m = 1, 2, \quad (5)$$

где

$$\beta^{(m)} = \frac{12\mu\Lambda_{33}^{(m)}}{H(6\Lambda_{33}^{(m)} + \mu H)}, \quad \theta^{(m)} = \frac{1}{H} \int_{-h}^h T^{(m)} dz = \frac{2}{3} h^2 T_*^{(m)} + T_h^{(m)},$$

$$T_h^{(m)} = \frac{6\theta^{(m)}\Lambda_{33}^{(m)}}{6\Lambda_{33}^{(m)} + \mu H}, \quad T_*^{(m)} = \frac{\mu T_h^{(m)}}{H\Lambda_{33}^{(m)}}, \quad (6)$$

$\Lambda_{ij}^{(m)}$ ,  $\Lambda_{33}^{(m)}$  – эффективные коэффициенты теплопроводности волокнистой композиции. Уравнениям (5) соответствуют граничные условия

$$\sum_{i=1}^2 q_i^{(m)} n_i = - \sum_{i=1}^2 n_i \sum_{j=1}^2 (\Lambda_{ij}^{(m)} A_j^{-1} \theta_j^{(m)}) \Big|_{(x_1, x_2) \in \Gamma_q^{[\ell]}} = q_n^{[\ell]}(\Gamma_q^{[\ell]}),$$

$$\theta^{(m)}(\Gamma_T^{[\ell]}) = 0, \quad m = 1, 2, \quad \ell = 1, 2, \dots, L, \quad \Gamma = \Gamma_q^{[\ell]} \cup \Gamma_T^{[\ell]}. \quad (7)$$

Здесь  $\Gamma_q^{[\ell]}$ ,  $\Gamma_T^{[\ell]}$  – части контура  $\Gamma$ , являющиеся проекциями точек торцевых поверхностей  $S_q^{[\ell]}$ ,  $S_T^{[\ell]}$  на срединную поверхность конструкции;  $\ell$  – номер варианта теплового «нагружения» конструкции;  $L$  – количество этих вариантов. (При разных вариантах нагружения части торцевых поверхностей  $S_q^{[\ell]}$ ,  $S_T^{[\ell]}$  и соответствующие им части контуров  $\Gamma_q^{[\ell]}$ ,  $\Gamma_T^{[\ell]}$  могут быть разными.)

Так как задача идентификации структур армирования является, по сути, специфической обратной коэффициентной задачей, то для получения разрешающих уравнений выведем на основании (5), (7) соотношения взаимности [1]. С этой целью умножим (5) при  $m = 1$  на  $\theta^{(2)}$  и вычтем равенство (5) при  $m = 2$ , умноженное на  $\theta^{(1)}$ , а результат проинтегрируем по области  $G$ . Тогда после элементарных преобразований (на основании теоремы Гаусса) с учетом граничных условий (7) получим

$$\iint_G \left[ \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (\Lambda_{ij}^{(2)} - \Lambda_{ij}^{(1)}) A_i^{-1} A_j^{-1} \theta_i^{(1)} \theta_j^{(2)} + (\beta^{(2)} - \beta^{(1)}) \theta^{(1)} \theta^{(2)} \right] dx_1 dx_2 =$$

$$= \int_{\Gamma_q^{[\ell]}} q_n^{[\ell]} (\theta^{(2)} - \theta^{(1)}) d\Gamma, \quad \ell = 1, 2, \dots, L. \quad (8)$$

Для решения задачи идентификации структуры армирования тонкостенной конструкции к уравнениям (1), (8) необходимо добавить структурные теплофизические соотношения для полиармированного слоя [5]

$$\Lambda_{ij}^{(m)} = \sum_{k=1}^N \frac{\omega_k^{(m)}}{a^{(m)}} \left\{ \ell_{ki}^{(m)} \ell_{kj}^{(m)} [(\lambda_k - \lambda_0) a^{(m)} + \lambda_0] + (-1)^{i+j} \ell_{kp}^{(m)} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{\ell_{kr}^{(m)}}{a^{(m)} \lambda_k^{-1} + (1 - a^{(m)}) \lambda_0^{-1}} \right\}, \quad p = 3 - i, \quad r = 3 - j, \quad i, j = 1, 2,$$

$$\frac{1}{\Lambda_{33}^{(m)}} = \sum_{k=1}^N \frac{\omega_k^{(m)}}{\lambda_k} + \frac{1 - a^{(m)}}{\lambda_0}, \quad a^{(m)} = \sum_{k=1}^N \omega_k^{(m)},$$

$$\ell_{k1}^{(m)} = \cos \psi_k^{(m)}, \quad \ell_{k2}^{(m)} = \sin \psi_k^{(m)}, \quad (9)$$

и использовать дополнительную информацию о температурном поле. (Здесь  $\lambda_0$ ,  $\lambda_k$  – коэффициенты теплопроводности изотропных материалов связующего и арматуры  $k$ -го семейства соответственно.)

В настоящем исследовании в качестве дополнительной информации будем использовать значения средней по толщине температуры  $\theta$ , измеренной на торцевой поверхности  $S_q^{[\ell]}$  (кромке  $\Gamma_q^{[\ell]}$ ), на которой задано первое

граничное условие (7):

$$\theta(\Gamma_q^{[\ell]}) = f^{[\ell]}(\Gamma_q^{[\ell]}, \mu), \quad \mu \in [\mu_1, \mu_2], \quad \ell = 1, 2, \dots, L, \quad (10)$$

где  $f^{[\ell]}$  – известные из эксперимента значения температуры, зависящие не только от координат точек контура  $\Gamma_q^{[\ell]}$ , но и от значения коэффициента теплоотдачи  $\mu$ , при котором проводился эксперимент. При этом серия экспериментов должна быть проведена так, чтобы имелась возможность варьировать значения коэффициента теплоотдачи в определенных пределах:  $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$ ,  $\mu_i \geq 0$ ,  $i = 1, 2$ , чего можно добиться, например, применяя термоизоляцию лицевых поверхностей ( $\mu = 0$ ), естественную ( $\mu \approx 0$ ) и принудительную конвекцию с разной скоростью обтекания лицевых поверхностей внешней средой.

Как видно из (1), (2), (5)–(9), задача определения параметров армирования  $\omega_k$ ,  $\psi_k$  является нелинейной и может быть решена на основе некоторого итерационного процесса, на каждом этапе которого осуществляется решение линейной задачи. Полагая

$$\begin{aligned} \omega_k^{(2)} &= \omega_k^{(1)} + \Delta\omega_k, & \psi_k^{(2)} &= \psi_k^{(1)} + \Delta\psi_k, \\ \theta^{(2)} &= \theta^{(1)} + \Delta\theta, & \theta^{(2)}(\Gamma_q^{[\ell]}) &= f^{[\ell]}(\Gamma_q^{[\ell]}, \mu) \end{aligned}$$

и сохраняя в (1), (2), (5)–(9) линейные по  $\Delta\omega_k$ ,  $\Delta\psi_k$  слагаемые, с учетом дополнительного условия (10) получим

$$\begin{aligned} \iint_G \sum_{k=1}^N [K_\omega^{(k)}(x_1, x_2, \mu)\Delta\omega_k + K_\psi^{(k)}(x_1, x_2, \mu)\Delta\psi_k] dx_1 dx_2 &= \\ = \int_{\Gamma_q^{[\ell]}} q_n^{[\ell]} [f^{[\ell]}(\Gamma_q^{[\ell]}, \mu) - \theta^{(1)}(\Gamma_q^{[\ell]}, \mu)] d\Gamma, & \mu \in [\mu_1, \mu_2], \\ & \ell = 1, 2, \dots, L, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} (A_2\Delta\omega_k \cos \psi_k^{(1)})_{,1} + (A_1\Delta\omega_k \sin \psi_k^{(1)})_{,2} - (A_2\Delta\psi_k \omega_k^{(1)} \sin \psi_k^{(1)})_{,1} + \\ + (A_1\Delta\psi_k \omega_k^{(1)} \cos \psi_k^{(1)})_{,2} = 0, \quad (x_1, x_2) \in G, \\ k = 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} K_\omega^{(k)} &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 A_i^{-1} A_j^{-1} \theta_{,i}^{(1)} \theta_{,j}^{(1)} \left\{ (a^{(1)} - \omega_k^{(1)})(a^{(1)})^{-2} \left[ \ell_{ki}^{(1)} \ell_{kj}^{(1)} ((\lambda_k - \lambda_0)a^{(1)} + \lambda_0) + \right. \right. \\ &+ (-1)^{i+j} \ell_{kp}^{(1)} \ell_{kr}^{(1)} \frac{1}{a^{(1)} \lambda_k^{-1} + (1 - a^{(1)}) \lambda_0^{-1}} \left. \right] + \\ &+ \omega_k^{(1)} (a^{(1)})^{-1} \left[ \ell_{ki}^{(1)} \ell_{kj}^{(1)} (\lambda_k - \lambda_0) - (-1)^{i+j} \ell_{kp}^{(1)} \ell_{kr}^{(1)} [a^{(1)} \lambda_k^{-1} + \right. \\ &+ (1 - a^{(1)}) \lambda_0^{-1}]^{-2} \left. \right] \left. \right\} + 12(\mu\theta^{(1)})^2 (6\Lambda_{33}^{(1)} + \mu H)^{-2} (\lambda_k^{-1} - \lambda_0^{-1}), \\ K_\psi^{(k)} &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 A_i^{-1} A_j^{-1} \theta_{,i}^{(1)} \theta_{,j}^{(1)} \omega_k^{(1)} (a^{(1)})^{-1} \left\{ [(\lambda_k - \lambda_0)a^{(1)} + \lambda_0] [(-1)^i \ell_{kp}^{(1)} \ell_{kj}^{(1)} + \right. \\ &+ (-1)^j \ell_{ki}^{(1)} \ell_{kr}^{(1)}] + (-1)^{i+j} [(-1)^p \ell_{ki}^{(1)} \ell_{kr}^{(1)} + (-1)^r \ell_{kp}^{(1)} \ell_{kj}^{(1)}] \times \\ &\times \frac{1}{a^{(1)} \lambda_k^{-1} + (1 - a^{(1)}) \lambda_0^{-1}} \left. \right\}, \quad p = 3 - i, \quad r = 3 - j. \end{aligned} \quad (13)$$

К уравнениям (12) необходимо присоединить линеаризованные краевые условия (2):

$$(n_1 \cos \psi_k^{(1)} + n_2 \sin \psi_k^{(1)}) \Delta \omega_k + \omega_k^{(1)} (-n_1 \sin \psi_k^{(1)} + n_2 \cos \psi_k^{(1)}) \Delta \psi_k = 0, \\ (x_1, x_2) \in \Gamma_k, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (14)$$

Так как система (11), (12) состоит из  $N + L$  уравнений и содержит  $2N$  неизвестных функций  $\Delta \omega_k$ ,  $\Delta \psi_k$ ,  $1 \leq k \leq N$ , то для ее замыкания необходимо потребовать, чтобы  $L = N$ . Следовательно, для решения задачи идентификации структуры армирования тонкостенной конструкции, армированной  $N$  семействами волокон постоянного поперечного сечения, необходимо проведение серии экспериментов при  $N$  независимых вариантах ее теплового нагружения.

Соотношения (11), (12) можно трактовать как систему интегро-дифференциальных уравнений (с краевыми условиями (14)) относительно функций  $\Delta \omega_k(x_1, x_2)$ ,  $\Delta \psi_k(x_1, x_2)$ ,  $1 \leq k \leq N$ , если предварительно решены прямые задачи о распределении поля температур  $\theta^{(1)}(x_1, x_2)$  (см. (5), (7)) при  $N$  независимых вариантах теплового нагружения конструкции ( $1 \leq \ell \leq L = N$ ) и при известных параметрах армирования  $\omega_k^{(1)}$ ,  $\psi_k^{(1)}$ , что может быть осуществлено эффективно на основании, например, метода конечных элементов. (В качестве начального приближения для  $\omega_k^{(1)}$ ,  $\psi_k^{(1)}$  могут быть выбраны их проектные значения.)

В частном случае тонкостенных конструкций типа оболочек вращения и кольцевых пластин с осесимметричными структурами армирования (не зависящими от окружной координаты  $x_2$ ) система (11), (12) может быть дополнительно упрощена. Действительно, из (1), (2) (при  $n_1 = \pm 1$ ,  $n_2 = 0$ ) имеем [4]

$$\omega_k(x_1) = \Omega_{*k} \frac{1}{R(x_1) \cos \psi_k(x_1)}, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (15)$$

где  $R(x_1)$  – расстояние от точек срединной поверхности до оси вращения (в случае кольцевых пластин  $R(x_1) \equiv x_1$  – полярный радиус);  $\Omega_{*k}$  – постоянные, имеющие тот же смысл, что и функции  $\Omega_k(\Gamma_k)$  в (2). (Предполагается, что  $\Omega_{*k}$  и  $\Omega_k(\Gamma_k)$  известны из конкретной реализации технологического процесса намотки или выкладки композитной конструкции армирующими волокнами.)

Из равенств (15) получаем

$$\Delta \omega_k(x_1) = \Omega_{*k} \frac{1}{R(x_1) \cos^2 \psi_k^{(1)}(x_1)} \sin \psi_k^{(1)}(x_1) \Delta \psi_k(x_1), \\ k = 1, 2, \dots, N. \quad (16)$$

Подставим (16) в уравнения (11):

$$\iint_G \sum_{k=1}^N K^{(k)}(x_1, x_2, \mu) \Delta \psi_k dx_1 dx_2 = \\ = \int_{\Gamma_q^{[\ell]}} q_n^{[\ell]} [f^{[\ell]}(\Gamma_q^{[\ell]}, \mu) - \theta^{(1)}(\Gamma_q^{[\ell]}, \mu)] d\Gamma, \quad \mu \in [\mu_1, \mu_2], \\ \ell = 1, 2, \dots, N. \quad (17)$$

Здесь

$$K^{(k)} = K_{\omega}^{(k)}(x_1, x_2, \mu) \Omega_{*k} \frac{1}{R(x_1) \cos^2 \psi_k^{(1)}(x_1)} \sin \psi_k^{(1)}(x_1) + K_{\psi}^{(k)}(x_1, x_2, \mu), \quad (18)$$

$K_{\omega}^{(k)}$  и  $K_{\psi}^{(k)}$  определяются выражениями (13), в которых нужно учесть соотношения (15).

Равенства (17) представляют собой замкнутую систему  $N$  уравнений Фредгольма 1-го рода с гладкими ядрами  $K^{(k)}$ , т. е. интегральные операторы, стоящие в левых частях равенств (17), являются непрерывными [1], поэтому после дискретизации системы (17) получаем плохо обусловленную систему линейных алгебраических уравнений относительно узловых значений функций  $\Delta \psi_k(x_1)$ , решение которой требует применения регуляризующих алгоритмов [1, 8]. (Подобные рассуждения справедливы и для интегральных операторов в левых частях равенств (11).)

В качестве примера рассмотрим задачу идентификации структуры армирования цилиндрической оболочки толщиной  $H = 1$  см, радиуса  $R = \text{const}$  и длиной  $X = 1$  м ( $A_1 = A_2 = 1$ ), изготовленной из меди с  $\lambda_0 = 400$  Вт/м · К [9] и меридионально-симметрично армированной двумя семействами стальной проволоки,  $\psi_1(x_1) = -\psi_2(x_1)$ ,  $\omega_1(x_1) = \omega_2(x_1)$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2 = 45$  Вт/м · К [9],  $N = 2$ . Проектные значения параметров армирования:

$$\omega_k(x_1) = \omega_k^0 = 0.2, \quad \psi_k(x_1) = \psi_k^0 = -(-1)^k \frac{\pi}{4}, \quad 0 \leq x_1 \leq X, \quad k = 1, 2. \quad (19)$$

На основании (19) в соотношениях (15), (16) имеем известные значения

$$\Omega_{*k} = R \omega_k^0 \cos \psi_k^0 = \text{const}, \quad k = 1, 2, \quad \Omega_{*1} = \Omega_{*2}. \quad (20)$$

Для тестирования разработанного алгоритма идентификации структуры армирования в условиях псевдореального эксперимента [1] зададим псевдореальные значения углов армирования (якобы полученные в реальности) в виде

$$\psi_1(x_1) = -\psi_2(x_1) = \pi(X + 0.2x_1) \frac{1}{4X}, \quad 0 \leq x_1 \leq X. \quad (21)$$

При этом псевдореальные плотности армирования  $\omega_k$  вычисляются по формуле (15) с учетом (21).

Решая прямую задачу (5), (7) (при  $m = 1$  и разных  $\mu$ ) с учетом (6), (9), (15), (21), получим на основании (10) псевдореальные значения функции  $f^{[\ell]}(\Gamma_q^{[\ell]}, \mu)$ , используемые в качестве дополнительной информации в задаче идентификации.

Будем рассматривать лишь такие варианты теплового нагружения цилиндрической оболочки, при которых возникают осесимметричные поля температур ( $\theta = \theta(x_1)$ ). Тогда в исследуемом случае система (17) редуцируется в одно уравнение Фредгольма 1-го рода

$$\int_0^X K(x_1, \mu) \Delta \psi_1 dx_1 = q_n^{[\ell]} [f^{[\ell]}(\Gamma_q^{[\ell]}, \mu) - \theta^{(1)}(\Gamma_q^{[\ell]}, \mu)], \quad \mu \in [\mu_1, \mu_2], \quad 1 \leq \ell \leq L, \quad (22)$$

с гладким ядром  $K(x_1, \mu)$ , имеющим вид

$$\begin{aligned}
K(x_1, \mu) = & (\theta_{,1}^{(1)})^2 \left\{ 2\omega_{*1} \sin \psi_1^{(1)} \frac{1}{\cos^2 \psi_1^{(1)}} \left[ (\lambda_1 - \lambda_0) \cos^2 \psi_1^{(1)} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \sin^2 \psi_1^{(1)} (\lambda_1^{-1} - \lambda_0^{-1}) \frac{1}{[a^{(1)} \lambda_1^{-1} + (1 - a^{(1)}) \lambda_0^{-1}]^2} \right] + \right. \\
& \left. + \sin 2\psi_1^{(1)} \left[ \frac{1}{a^{(1)} \lambda_1^{-1} + (1 - a^{(1)}) \lambda_0^{-1}} - (\lambda_1 - \lambda_0) a^{(1)} - \lambda_0 \right] \right\} - \\
& - 24\omega_{*1} (\mu \theta^{(1)})^2 \sin \psi_1^{(1)} \frac{1}{\cos^2 \psi_1^{(1)} (6\Lambda_{33}^{(1)} + \mu H)^2} \times \\
& \times (\lambda_1^{-1} - \lambda_0^{-1}) \frac{1}{[a^{(1)} \lambda_1^{-1} + (1 - a^{(1)}) \lambda_0^{-1}]^2}, \\
\omega_{*1} = & \frac{\Omega_{*1}}{R} = \omega_1^0 \cos \psi_1^0 = \text{const}, \tag{23}
\end{aligned}$$

где приближение температуры  $\theta^{(1)}(x_1, \mu)$  известно из решения прямой задачи (5), (7) при известных параметрах армирования  $\omega_k^{(1)}$ ,  $\psi_k^{(1)}$ . (На первой итерации в качестве  $\omega_k^{(1)}$ ,  $\psi_k^{(1)}$  задаем проектные значения (19).) В расчетах примем  $q_n^{[\ell]} = 10^{-3}$  Вт/м<sup>2</sup>,  $1 \leq \ell \leq L$ , а коэффициент теплоотдачи будем варьировать в пределах  $0 \leq \mu \leq 600$  Вт/м<sup>2</sup> · К, т. е.  $\mu_1 = 0$ ,  $\mu_2 = 600$  Вт/м<sup>2</sup> · К.

На рис. 1–3 приведены результаты модельного численного эксперимента по восстановлению функций  $\psi_1$ ,  $\omega_1$ ,  $\Lambda_{11}$  соответственно. На рисунках горизонтальные прямые 1 соответствуют проектным значениям (19) указанных функций, линии 2 – псевдореальным значениям (см. (9), (15), (19)), кривые 3, 4 – результаты восстановления этих характеристик при двух вариантах теплового нагружения. Первый вариант (кривые 3) соответствует случаю, когда на кромке  $x_1 = X$  задано первое граничное условие (7), а на кромке  $x_1 = 0$  – второе; при втором варианте (линии 4), наоборот, на кромке  $x_1 = 0$  задавалось первое условие (7), а на кромке  $x_1 = X$  – второе.

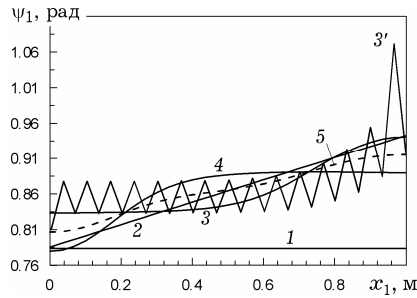


Рис. 1

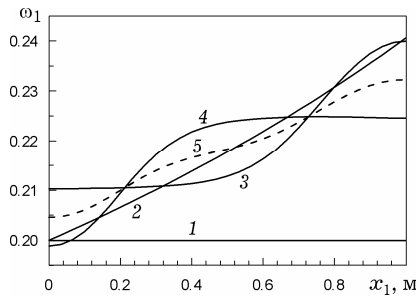


Рис. 2

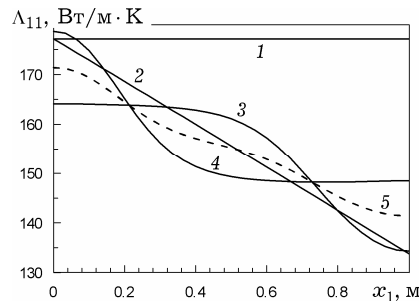


Рис. 3

Так как рассматриваемая задача идентификации является некорректной [1, 8], то для ее численного решения использовался алгоритм регуляризации по методу Тихонова [1, 7, 8]. (Конечномерная аппроксимация интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода с гладким ядром типа (22), (23) в предположении, что из априорных соображений известно:  $\Delta\psi_1(x_1)$  – кусочно-гладкая функция, приведена в [1].) Параметр регуляризации  $\alpha$  выбирался из условия его квазиоптимального значения [7]; на каждой итерации получалось свое значение  $\alpha$ , имеющее порядок  $10^{-13}$ .

Кривые 3, 4 получены на основе итерационного процесса (22) при использовании трех итераций. (Дальнейшее увеличение числа итераций не приводит к принципиальному уточнению решения задачи идентификации.) Сравнение кривых 3, 4 с линиями 2 свидетельствует об удовлетворительной реконструкции рассматриваемых функций  $\psi_1$ ,  $\omega_1$ ,  $\Lambda_{11}$ . Так как имеются результаты идентификации одной и той же структуры армирования по двум независимо проведенным псевдореальным экспериментам, то было бы естественно эти результаты усреднить. Пунктирные кривые 5 на рис. 1–3 соответствуют такому усреднению. Видно, что кривые 5 хорошо согласуются с линиями 2. (При этом точность реконструкции эффективного коэффициента теплопроводности  $\Lambda_{11}$  имеет порядок точности используемой структурной модели теплопроводности армированной среды [2].) Следовательно, чем больше имеется результатов экспериментов, проведенных при независимых вариантах теплового нагружения конструкции, тем точнее можно реконструировать ее структуру армирования.

На рис. 1 ломаная 3' приведена для сравнения с кривой 3 и соответствует решению задачи идентификации после однократного применения итерационного процесса (22) при первом варианте теплового нагружения без использования метода регуляризации Тихонова. Поведение ломаной 3' наглядно свидетельствует о некорректности рассматриваемой задачи идентификации структуры армирования.

**Замечание.** В настоящем исследовании предполагалось, что в проводимых экспериментах можно всегда обеспечить одинаковые условия конвективного теплообмена на обеих лицевых поверхностях конструкции, что приводит к представлению температуры в виде (3). Однако эти условия не являются принципиальными для решения задачи идентификации структуры армирования и были использованы лишь для сокращения записей соотношений (3)–(6). Если при проведении необходимых теплофизических экспериментов нельзя обеспечить одинаковые условия конвективного теплообмена на обеих лицевых поверхностях, то на одной из этих поверхностей можно задать и другое граничное условие (например, условие термоизоляции или конвективный теплообмен с фиксированным значением  $\mu_0$  коэффициента теплоотдачи). При этом согласно [3] в уравнении (5) лишь несколько изменится выражение для коэффициента  $\beta^{(m)}$ , а также выражения для  $T$  и  $\theta$  в (3), (6). Все остальные рассуждения остаются без изменения (при соответствующей корректировке некоторых формул).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08-01-90403-Укр\_а) и Президиума СО РАН (Постановление № 10 от 15.01.09, номер проекта 72).

1. Ватульян А. О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. – Москва: Физматлит, 2007. – 224 с.
2. Немировский Ю. В., Янковский А. П. Моделирование процессов теплопроводности в ортогонально армированных гибридных композитах с дисперсным упрочнением связующего // Прикл. физика. – 2008. – № 5. – С. 10–17.



3. Немировский Ю. В., Янковский А. П. О влиянии структуры армирования на теплопроводность волокнистых оболочек вращения // Инж.-физ. журн. – 2006. – **79**, № 2. – С. 145–155.
4. Немировский Ю. В., Янковский А. П. О некоторых особенностях уравнений оболочек, армированных волокнами постоянного поперечного сечения // Механика композ. материалов и конструкций. – 1997. – **3**, № 2. – С. 20–40.
5. Немировский Ю. В., Янковский А. П. Теплопроводность оболочек, армированных волокнами постоянного и переменного по площади поперечного сечения // Мат. методы та физ.-мех. поля. – 1998. – **41**, № 2. – С. 132–150.
6. Немировский Ю. В., Янковский А. П. Уточнение асимптотических разложений решений задачи теплопроводности анизотропных пластин // Мат. методы та физ.-мех. поля. – 2005. – **48**, № 2. – С. 157–171.
7. Самарский А. А., Вабищевич П. Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. – Москва: Изд-во ЛКИ, 2007. – 480 с.
8. Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. – Москва: Наука, 1983. – 200 с.
9. Физические свойства сталей и сплавов, применяемых в энергетике: Справочник / Под ред. Б. Е. Неймарк. – Москва–Ленинград: Энергия, 1967. – 240 с.

**ІДЕНТИФІКАЦІЯ СТРУКТУР АРМУВАННЯ ТОНКОСТІННИХ КОМПЗИТНИХ КОНСТРУКЦІЙ НА ОСНОВІ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ ПРО СТАЦІОНАРНИЙ РОЗПОДІЛ ТЕМПЕРАТУРИ**

*Сформульовано задачу ідентифікації структур армування тонкостінних композитних конструкцій на основі результатів експериментів про стаціонарний розподіл температури в них при спеціальних умовах теплового навантаження. Досліджено частковий випадок оболонок обертання з осесиметричними структурами армування. В умовах псевдореального експерименту проведено реконструкцію структури армування циліндричної оболонки.*

**IDENTIFICATION OF STRUCTURES OF REINFORCEMENT OF THIN-SLAB COMPOSITE STRUCTURES ON THE BASIS OF EXPERIMENTAL DATA ABOUT STATIONARY DISTRIBUTION OF TEMPERATURE**

*The problem on identification of structures of reinforcement of thin-slab composite structures on the basis of the results of experiments about stationary distribution of temperature in them is formulated under special conditions of thermal loading. A special case of shells of revolution with axisymmetric structures of reinforcement is studied. In conditions of pseudo-real experiment the rehabilitation of structure of reinforcement of cylindrical shell is carried out.*

Ин-т теорет. и прикл. механики  
им. С. А. Христиановича СО РАН, Новосибирск, Россия

Получено  
12.08.09