УДК 517.956.4

В. М. Лучко

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ВИЩОГО ПОРЯДКУ З ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ

Доведено існування і встановлено оцінки розв'язку задачі Коші для параболічного рівняння вищого порядку за t *з імпульсною дією.*

При описі деякого реального процесу системою диференціальних рівнянь, що піддається імпульсній дії у різні моменти часу, виникають математичні моделі з імпульсною дією. Задачі для систем звичайних диференціальних рівнянь з імпульсною дією глибоко вивчені у праці А. М. Самойленка, М. О. Перестюка [7] та в інших роботах. Задачу Коші для рівнянь з частинними похідними параболічного типу розглянуто в [1–4, 8]. Для лінійних параболічних систем з імпульсною дією коректність задачі Коші в нормованих просторах Діні встановлено у праці [6].

У пропонованій роботі встановлено коректність задачі Коші для $\overrightarrow{2b}$-параболічних рівнянь вищого порядку за t з імпульсною дією.

1. Випадок коефіцієнтів, залежних від часової змінної. Розглянемо рівняння

$$\frac{\partial^m u}{\partial t^m} = \sum_{|k|+2bk_0 \le 2bm} A_{k_0 k}(t) D_x^k D_t^{k_0} u\,, \quad t \in (\tau_0, T], \ x \in \mathbb{R}^n, \ k_0 \le m-1\,, \tag{1}$$

розв'язок якого будемо шукати при $t \ne \tau_i$ такий, що задовольняє умови

$$D_t^{j-1} u(t,x)\Big|_{t=\tau_0} = \varphi_j(x), \qquad j = 1,\ldots,m\,, \tag{2}$$

$$D_t^{j-1} u(\tau_i + 0, x) - D_t^{j-1} u(\tau_i - 0, x) = B_i^{(j-1)} D_t^{j-1} u(\tau_i - 0, x)\,,$$
$$j = 1,\ldots,m, \qquad i = 1,\ldots,p\,. \tag{3}$$

Тут $A_{k_0 k}(t)$ – відомі неперервні функції на $(\tau_0, T]$; $B_i^{(j)}$ – сталі; $\tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_i < \ldots < \tau_p < T$, $i = 1,\ldots,p$; під $D_t^{j-1} u(\tau_i \pm 0, x)$ розуміємо

$$D_t^{j-1} u(\tau_i \pm 0, x) = \lim_{t \to \tau_i \pm 0} D_t^{j-1} u(t,x), \qquad j = 1,\ldots,m\,.$$

В образах Фур'є

$$V(t,\sigma) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i_0 \sigma x} u(t,x)\, dx$$

задачі (1)–(3) відповідає задача з імпульсною дією для звичайного диференціального рівняння з параметром $\sigma \in \mathbb{R}^n$:

$$\frac{d^m V}{dt^m} = \sum_{|k|+2bk_0 \le 2bm} A_{k_0 k}(t) (i_0 \sigma)^k \frac{d^{k_0} V}{dt^{k_0}}, \qquad t \ne \tau_i, \quad i_0^2 = -1\,, \tag{4}$$

а умовам (2), (3) відповідають такі умови:

$$\frac{d^{j-1}}{dt^{j-1}} V(t,\sigma)\Big|_{t=\tau_0} = \tilde{\varphi}_j(\sigma), \qquad j = 1,\ldots,m\,, \tag{5}$$

$$\frac{d^{j-1}V}{dt^{j-1}}\Big|_{t=\tau_i+0} - \frac{d^{j-1}V}{dt^{j-1}}\Big|_{t=\tau_i-0} = B_i^{(j-1)} \frac{d^{j-1}V}{dt^{j-1}}\Big|_{t=\tau_i-0}\,,$$
$$j = 1,\ldots,m, \qquad i = 1,\ldots,p\,. \tag{6}$$

Нехай $K(t,\tau_i,\sigma) = \{K_1(t,\tau_i,\sigma),\ldots,K_m(t,\tau_i,\sigma)\}$, $\tau_i < t < \tau_{i+1}$, – нормальна фундаментальна система розв'язків задачі Коші

$$\frac{d^m K_\ell}{dt^m} = \sum_{|k|+2bk_0 \le 2bm} A_{k_0 k}(t)(i_0\sigma)^k \frac{d^{k_0} K_\ell}{dt^{k_0}},$$

$$D_t^j K_\ell \Big|_{t=\tau_i+0} = \delta_{\ell-1,j}, \qquad \ell = 1,\dots,m, \qquad j = 0,\dots,m-1,$$

$\delta_{i,j}$ – символ Кронекера.

На проміжку $t \in (\tau_0, \tau_1)$ розв'язок рівняння (4) визначається формулою

$$V(t,\sigma) = K(t,\tau_0,\sigma)\cdot c,$$

де c – вектор-стовпчик, і за умов (5) розв'язок подається у вигляді

$$V(t,\sigma) = K(t,\tau_0,\sigma)\tilde{\varphi}(\sigma), \qquad \tilde{\varphi}(\sigma) = \left\| \begin{matrix} \tilde{\varphi}_1(\sigma) \\ \dots \\ \tilde{\varphi}_m(\sigma) \end{matrix} \right\|.$$

На проміжку $t \in (\tau_1, \tau_2)$ розв'язок запишемо у вигляді

$$V(t,\sigma) = K(t,\tau_1,\sigma)\cdot c.$$

Задовольняючи умови (6), отримаємо

$$\begin{aligned} c_1 &= (1+B_1^{(0)})K_1(\tau_1,\tau_0,\sigma)\tilde{\varphi}_1(\sigma) + \dots + (1+B_1^{(0)})K_m(\tau_1,\tau_0,\sigma)\tilde{\varphi}_m(\sigma), \\ c_2 &= (1+B_1^{(1)})K_1'(\tau_1,\tau_0,\sigma)\tilde{\varphi}_1(\sigma) + \dots + (1+B_1^{(1)})K_m'(\tau_1,\tau_0,\sigma)\tilde{\varphi}_m(\sigma), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ c_m &= (1+B_1^{(m-1)})K_1^{(m-1)}(\tau_1,\tau_0,\sigma)\tilde{\varphi}_1(\sigma) + \dots + \\ &\qquad + (1+B_1^{(m-1)})K_m^{(m-1)}(\tau_1,\tau_0,\sigma)\tilde{\varphi}_m(\sigma), \end{aligned}$$

де $K_\ell^{(j)}(\tau_1,\tau_0,\sigma) = \lim\limits_{t\to\tau_1-0} D_t^j K_\ell(t,\tau_0,\sigma)$, або в матричному вигляді (це позначення розкриємо пізніше)

$$c = \big((1+B_1)K(\tau_1,\tau_0,\sigma)\big)_t' \tilde{\varphi}(\sigma),$$

тобто

$$V(t,\sigma) = K(t,\tau_1,\sigma)\cdot\big((1+B_1)K(\tau_1,\tau_0,\sigma)\big)_t' \tilde{\varphi}(\sigma).$$

Продовжуючи подібні міркування, розв'язок задачі (4), (6) з початковою умовою $D_t^j V\Big|_{t=\tau_k} = V_0^j$, $j = 0,\dots,m-1$, $i \le k$, однозначно визначимо формулою

$$V(t,\sigma) = \mathcal{M}(t,\tau_0,\sigma)V_0, \qquad V_0 = \left\| \begin{matrix} V_0^0 \\ V_0^1 \\ \dots \\ V_0^{m-1} \end{matrix} \right\|. \tag{7}$$

Матрицант задачі (4), (6) запишемо як

$$\mathcal{M}(t,\tau_0,\sigma) = K(t,\tau_k,\sigma)\prod_{\nu=1}^{k}\big((1+B_\nu)K(\tau_\nu,\tau_{\nu-1},\sigma)\big)_t', \tag{8}$$

де введено такі позначення:

$$\big((1+B_\nu)K(\tau_\nu,\tau_{\nu-1},\sigma)\big)_t' =$$

$$= \left\| \begin{matrix} (1+B_\nu^{(0)})K_1(\tau_\nu,\tau_{\nu-1},\sigma) & \dots & (1+B_\nu^{(0)})K_m(\tau_\nu,\tau_{\nu-1},\sigma) \\ (1+B_\nu^{(1)})K_1'(\tau_\nu,\tau_{\nu-1},\sigma) & \dots & (1+B_\nu^{(1)})K_m'(\tau_\nu,\tau_{\nu-1},\sigma) \\ \dots & \dots & \dots \\ (1+B_\nu^{(m-1)})K_1^{(m-1)}(\tau_\nu,\tau_{\nu-1},\sigma) & \dots & (1+B_\nu^{(m-1)})K_m^{(m-1)}(\tau_\nu,\tau_{\nu-1},\sigma) \end{matrix} \right\|,$$

$$K_\ell^{(j)}(\tau_k,\tau_{k-1},\sigma)=\lim_{t\to\tau_k-0} D_t^j K_\ell(t,\tau_{k-1},\sigma),$$

$$\tau_0<\ldots<\tau_k<t<\tau_{k+1}<\ldots<T.$$

У випадку $\nu=0$ отримаємо, що $\mathcal{M}(t,\tau_0,\sigma)=K(t,\tau_0,\sigma)$.

Якщо рівняння (1) рівномірно параболічне, то компоненти нормальної фундаментальної системи задовольняють нерівність [8, с. 55]

$$\left|D_t^{k_0}K_\ell(t,\tau_j,\sigma)\right|\le c_{k_0}(t-\tau_j)^{m-k_0-1}\cdot e^{-\delta|\sigma|^{2b}(t-\tau_j)},\qquad \ell=1,\ldots,m,$$

$$\tau_j<t<\tau_{j+1},\qquad k_0\le m-1,\qquad \delta>0. \tag{9}$$

Тому для похідних матриціанта $\mathcal{M}(t,\tau_0,\sigma)$ із (8) дістанемо оцінку

$$\left\|D_t^{k_0}\mathcal{M}(t,\tau_0,\sigma)\right\|\le c(t-\tau_0)^{m-k_0-1}\cdot e^{-\delta|\sigma|^{2b}(t-\tau_k)}\prod_{\nu=1}^{k} e^{-\delta|\sigma|^{2b}(\tau_\nu-\tau_{\nu-1})}M(B_\nu),$$

де $M(B_\nu)=\max_i(1+B_\nu^{(i)})$. Звідси випливає нерівність

$$\left\|D_t^{k_0}\mathcal{M}(t,\tau_0,\sigma)\right\|\le c(t-\tau_0)^{m-k_0-1}\cdot e^{-\delta|\sigma|^{2b}(t-\tau_0)}\prod_{\nu=1}^{k} M(B_\nu),$$

$$\tau_0<\tau_k,\quad t>\tau_k,\quad \sigma\in\mathbb{R}^n,\quad k_0\le m-1. \tag{10}$$

При отриманні оцінки (10) враховано, що у формулі (9) степені виразів $t-\tau_j$ додатні, а $t-\tau_j<t-\tau_0$.

Застосуємо до обох частин формули (7) обернене перетворення Фур'є і скористаємося теоремою про перетворення Фур'є згортки. У результаті розв'язок задачі (1)−(3) запишемо як

$$u(t,x)=\int_{\mathbb{R}^n} G(t,\tau_0,x-\xi)\varphi(\xi)\,d\xi, \tag{11}$$

де $G(t,\tau_0,x)$ − функція Ґріна задачі (1)−(3), яка визначається як обернене перетворення Фур'є матриціанта

$$G(t,\tau_0,x)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i_0\sigma x}\mathcal{M}(t,\tau_0,\sigma)\,d\sigma \tag{12}$$

і задовольняє умови

$$\left.\frac{\partial^\ell}{\partial t^\ell}G(t,\tau_0,x)\right|_{t=\tau_k+0}-\left.\frac{\partial^\ell}{\partial t^\ell}G(t,\tau_0,x)\right|_{t=\tau_k-0}=B_k^{(\ell)}\left.\frac{\partial^\ell}{\partial t^\ell}G(t,\tau_0,x)\right|_{t=\tau_k-0},$$

$$\ell=0,\ldots,m-1.$$

Згідно з оцінками (10) до матриціанта $\mathcal{M}(t,\tau_0,\sigma)$ можна застосувати лему 1.1 про перетворення Фур'є цілих функцій [8, с. 36], отже, для похідних функції Ґріна $G(t,\tau_0,x)$ справджуються оцінки

$$\left|D_t^{k_0}D_x^kG(t,\tau_0,x-\xi)\right|\le$$

$$\le c\prod_{\nu=1}^{p}M(B_\nu)(t-\tau_0)^{m-k_0-1-\frac{|k|+n}{2b}}\exp\left\{-c|x-\xi|^{\frac{2b}{2b-1}}(t-\tau_0)^{-\frac{1}{2b-1}}\right\}. \tag{13}$$

Теорема 1. *Нехай*:

(***i***) *коефіцієнти* $A_{k_0k}(t)$ *рівняння* (1) *є неперервними, а рівняння* (1) *є рівномірно параболічним, тобто корені* $\lambda_i(t,\sigma)$ *рівняння*

$$\lambda^m-\sum_{|k|+2bk_0=2bm}A_{k_0k}(t)(i_0\sigma)^k\lambda^{k_0}=0$$

задовольняють нерівність

$$\operatorname{Re}\lambda_i(t,\sigma) \le -\delta|\sigma|^{2b}, \quad \delta = \text{const} > 0, \quad \sigma \in \mathbb{R}^n, \quad t \in (\tau_0, T],$$

(***ii***) *вирази* $1 + B_i^{(j-1)} \neq 0$, $j = 1,\dots,m$, i *− скінченне число.*

Тоді функція Ґріна $G(t,\tau_0,x)$ *задачі* (1)−(3) *визначається як обернене перетворення матриціанта* $\mathcal{M}(t,\tau_0,\sigma)$, *а похідні її задовольняють нерівності* (13). *Розв'язок задачі* (1)−(3) *визначається формулою* (11) *для будь-яких функцій* $\varphi_j \in H^{(1,0)} \equiv C(\mathbb{R}^n) \bigcap L_1(\mathbb{R}^n)$ *з нормою, означеною в* [5, с. 147], *і справджуються оцінки*

$$\left|D_t^{k_0} D_x^k u(t,x)\right| \le c\prod_{\nu=1}^{p} M(B_\nu)(t-\tau_0)^{m-k_0-1-|k|/2b} \cdot |\varphi|_{H^{(1,0)}},$$
$$|k| + 2bk_0 \le 2bm.$$

2. Випадок коефіцієнтів, залежних від часової і просторової змінних. Розглянемо задачу Коші з імпульсними умовами

$$\frac{\partial^m u}{\partial t^m} = \sum_{|k|+2bk_0 \le 2bm} A_{k_0 k}(t,x) D_x^k D_t^{k_0} u, \quad t \neq \tau_i, \quad t \in (\tau_0, T], \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{14}$$

$$D_t^{j-1} u(t,x)\Big|_{t=\tau_0} = \varphi_j(x), \qquad j = 1,\dots,m, \tag{15}$$

$$D_t^{j-1}u(\tau_i+0,x) - D_t^{j-1}u(\tau_i-0,x) = B_i^{(j-1)} D_t^{j-1} u(\tau_i - 0, x),$$
$$j = 1,\dots,m, \qquad i = 1,\dots,p. \tag{16}$$

Будемо припускати, що коефіцієнти $A_{k_0 k}(t,x)$ неперервні в $\Pi = \{\tau_0 \le \le t \le T,\ x \in \mathbb{R}^n\}$, обмежені та задовольняють умову Гельдера за x з показником α, $0 < \alpha \le 1$.

За умов теореми 1 для задачі з параметром $y \in \mathbb{R}^n$

$$\frac{\partial^m u}{\partial t^m} = \sum_{|k|+2bk_0 \le 2bm} A_{k_0 k}(t,y) D_x^k D_t^{k_0} u,$$

$$D_t^{j-1} u\Big|_{t=\tau_0} = \varphi_j(x), \qquad j = 1,\dots,m,$$

$$D_t^{j-1}u(\tau_i+0,x) - D_t^{j-1}u(\tau_i-0,x) = B_i^{(j-1)} D_t^{j-1} u(\tau_i - 0, x),$$
$$j = 1,\dots,m, \qquad i = 1,\dots,p, \tag{17}$$

за допомогою перетворення Фур'є можна знайти функцію Ґріна

$$G(t,\tau_0,x;y) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i_0 \sigma x} \mathcal{M}(t,\tau_0,\sigma;y)\, d\sigma, \tag{18}$$

де $\mathcal{M}(t,\tau_0,\sigma;y)$ визначається формулою (8), у якій $K(t,\tau_k,\sigma)$ замінено на нормальну фундаментальну систему $K(t,\tau_k,\sigma,y)$ рівняння з параметром

$$\frac{d^m V}{dt^m} = \sum_{|k|+2bk_0 \le 2bm} A_{k_0 k}(t,y)(i_0\sigma)^k \frac{d^{k_0} V}{dt^{k_0}}.$$

Рівняння в задачі (17) рівномірно параболічне, коефіцієнти $A_{k_0 k}(t,y)$ неперервні за t рівномірно щодо y і гельдерові за y, тому $K(t,\tau_k,\sigma,y)$ задовольняє нерівність [8, с. 75]

$$\left|\frac{d^{k_0}}{dt^{k_0}} K_\ell(t,\tau_k,\sigma + i_0\gamma; y)\right| \le$$
$$\le c(t-\tau_k)^{m-k_0-1} \cdot \exp\{(-c_1|\sigma|^{2b} + c_2|\gamma|^{2b})(t-\tau_k)\},$$

тому матрицант $\mathcal{M}(t,\tau_0,\sigma;y)$ також задовольняє оцінку (10).

До інтеграла (18), яким визначається функція Ґріна задачі (17), можна застосувати теорему про перетворення Фур'є цілих функцій [8, с. 36]. У результаті отримаємо оцінки

$$\left|D_t^{k_0} D_x^k G(t,\tau_0,x;y)\right| \le$$
$$\le c\prod_{\nu=1}^{p} M(B_\nu)(t-\tau_0)^{m-k_0-1-\frac{|k|+n}{2b}} \exp\left\{-c|x|^{\frac{2b}{2b-1}}(t-\tau_0)^{-\frac{1}{2b-1}}\right\}. \quad (19)$$

Подамо рівняння (14) у вигляді

$$\frac{\partial^m u}{\partial t^m} = \sum_{|k|+2bk_0\le 2bm} A_{k_0k}(t,x) D_x^k D_t^{k_0} u \equiv P\left(t,x;D,\frac{\partial}{\partial t}\right)u.$$

Означення. Фундаментальною системою розв'язків задачі (14)–(16) назвемо матрицю-стовпчик $Z(t,\tau_0,x,\xi) = \{Z_1(t,\tau_0,x,\xi),\ldots,Z_m(t,\tau_0,x,\xi)\}$, компоненти якої задовольняють рівняння

$$\frac{\partial^m Z_j}{\partial t^m} = \sum_{|k|+2bk_0\le 2bm} A_{k_0k}(t,x) D_x^k D_t^{k_0} Z_j, \qquad \tau_0 < t \ne \tau_i,$$

та умови

$$D_t^j Z_\ell(t,\tau_0,x,\xi)\Big|_{t=\tau_0} = \delta(x-\xi)\,\delta_{\ell-1,j},$$

де $\delta(x-\xi)$ – функція Дірака,

$$D_t^{(j-1)} Z_\ell(\tau_i+0,\tau_0,x,\xi) - D_t^{(j-1)} Z_\ell(\tau_i-0,\tau_0,x,\xi) =$$
$$= B_\ell^{(j-1)} D_t^{(j-1)} Z_\ell(\tau_i-0,\tau_0,x,\xi),$$
$$\tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_i < \ldots < T, \qquad \ell,\ j = 1,\ldots,m.$$

Використовуючи метод Е. Е. Леві [8], будемо шукати $Z(t,\tau_0,x,\xi)$ у вигляді

$$Z(t,\tau_0,x,\xi) = G(t,\tau_0,x-\xi,\xi) +$$
$$+\int_{\tau_0}^{t} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} G(t,\beta,x-y,y)\,\psi(\beta,\tau_0,y,\xi)\,dy, \quad (20)$$

де $G(t,\tau_0,x-\xi,y)$ – функція Ґріна задачі (17). Будемо припускати, що вектор-функція $\psi(t,\tau_0,x,\xi)$ задовольняє умову Гельдера за змінною x.

Застосувавши оператор $\frac{\partial^m}{\partial t^m} - P\left(t,x;D,\frac{\partial}{\partial t}\right)$ до $Z(t,\tau_0,x,\xi)$, визначеної формулою (20), отримаємо відносно $\psi(t,\tau_0,x,\xi)$ інтегральне рівняння

$$\psi(t,\tau_0,x,\xi) = K(t,\tau_0,x,\xi) + \int_{\tau_0}^{t} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} K(t,\beta,x,y)\psi(\beta,\tau_0,y,\xi)\,dy, \quad (21)$$

де

$$K(t,\tau_0,x,\xi) \equiv \left\{P\left(t,x;D,\frac{\partial}{\partial t}\right) - \frac{\partial^m}{\partial t^m}\right\} G(t,\tau_0,x-\xi,\xi) =$$
$$= \left\{P\left(t,x;D,\frac{\partial}{\partial t}\right) - P\left(t,\xi;D,\frac{\partial}{\partial t}\right)\right\} G(t,\tau_0,x-\xi,\xi).$$

На основі оцінок (19) і зроблених припущень отримаємо

$$|K(t,\tau_0,x,\xi)| = \left|\left\{P\left(t,x;D,\frac{\partial}{\partial t}\right) - P\left(t,\xi;D,\frac{\partial}{\partial t}\right)\right\} G(t,\tau_0,x-\xi,\xi)\right| \le$$

$$\le c \sum_{|k|+2bk_0 \le 2bm} \left|A_{k_0k}(t,x) - A_{k_0k}(t,\xi)\right| \times$$

$$\times \prod_{\nu=1}^{p} M(B_\nu)(t-\tau_0)^{m-k_0-1-\frac{|k|+n}{2b}} \exp\left\{-c_1|x-\xi|^{\frac{2b}{2b-1}}(t-\tau_0)^{-\frac{1}{2b-1}}\right\} \le$$

$$\le c|x-\xi|^{\alpha}(t-\tau_0)^{-\frac{n}{2b}-1} \prod_{\nu=1}^{p} M(B_\nu) \exp\left\{-c_1|x-\xi|^{\frac{2b}{2b-1}}(t-\tau_0)^{-\frac{1}{2b-1}}\right\} \le$$

$$\le c \prod_{\nu=1}^{p} M(B_\nu)(t-\tau_0)^{-\frac{n+2b-\alpha}{2b}} \exp\left\{-c_1|x-\xi|^{\frac{2b}{2b-1}}(t-\tau_0)^{-\frac{1}{2b-1}}\right\}.$$

Таким чином, ядро інтегрального рівняння (21) має слабку особливість і може бути досліджене за допомогою методики, застосованої при доведенні теореми 2.1 у роботі [8, с. 73], а для фундаментальної системи розв'язків $Z(t,\tau_0,x,\xi)$ будуть виконуватись оцінки

$$\left|D_t^{k_0} D_x^k Z(t,\tau_0,x,\xi)\right| \le$$

$$\le c \prod_{\nu=1}^{p} M(B_\nu)(t-\tau_0)^{m-k_0-1-\frac{|k|+n}{2b}} \exp\left\{-c_1|x-\xi|^{\frac{2b}{2b-1}}(t-\tau_0)^{-\frac{1}{2b-1}}\right\}.$$

Теорема 2. *Нехай коефіцієнти* $A_{k_0k}(t,x)$ *рівняння* (14) *неперервні в* $\Pi = \{\tau_0 \le t \le T,\, x \in \mathbb{R}^n\}$, *обмежені та задовольняють умову Гельдера за* x *з показником* α, $0 < \alpha \le 1$. *Тоді фундаментальна система розв'язків визначаєтьcя формулою* (20), *а розв'язком задачі* (14)–(16) *є функція*

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} Z(t,\tau_0,x,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi.$$

3. Неоднорідна задача. Розглянемо неоднорідне рівняння

$$\frac{\partial^m u}{\partial t^m} = \sum_{|k|+2bk_0 \le 2bm} A_{k_0k}(t) D_x^k D_t^{k_0} u + f(t,x), \qquad t \in (\tau_0, T],$$

$$x \in \mathbb{R}^n, \qquad k_0 \le m-1, \tag{22}$$

з початковими

$$D_t^{j-1} u(t,x)\Big|_{t=\tau_0} = \varphi_j(x), \qquad j = 1,\dots,m, \tag{23}$$

та імпульсними умовами

$$D_t^{j-1}u(\tau_i+0,x) - D_t^{j-1}u(\tau_i-0,x) = B_i^{(j-1)} D_t^{j-1} u(\tau_i-0,x) + a_j(x),$$

$$j = 1,\dots,m, \qquad i = 1,\dots,p. \tag{24}$$

Задачі (22)–(24) в образах Фур'є відповідає задача

$$\frac{d^m V}{dt^m} = \sum_{|k|+2bk_0 \le 2bm} A_{k_0k}(t)(i_0\sigma)^k \frac{d^{k_0}V}{dt^{k_0}} + \tilde{f}(t,\sigma), \tag{25}$$

$$\left.\frac{d^{j-1}V}{dt^{j-1}}\right|_{t=\tau_0} = \tilde{\varphi}_j(\sigma), \qquad j = 1,\dots,m, \tag{26}$$

$$\left.\frac{d^{j-1}V}{dt^{j-1}}\right|_{t=\tau_i+0} - \left.\frac{d^{j-1}V}{dt^{j-1}}\right|_{t=\tau_i-0} = B_i^{(j-1)} \left.\frac{d^{j-1}V}{dt^{j-1}}\right|_{t=\tau_i-0} + \tilde{a}_j(\sigma), \quad j = 1,\dots,m. \tag{27}$$

Згідно з міркуваннями, наведеними в **п. 1**, розв'язок задачі (25)–(27) визначається формулою

$$V(t,\sigma) = \boldsymbol{\mathcal{M}}(t,\tau_0,\sigma)\tilde{\varphi}(\sigma) + \sum_{\nu=1}^{k-1} \int_{\tau_{\nu-1}}^{\tau_\nu} \boldsymbol{\mathcal{M}}_1(t,\tau_\nu,\tau,\sigma)\tilde{f}(\tau,\sigma)\,d\tau +$$

$$+ \int_{\tau_{k-1}}^{t} \mathcal{K}(t,\tau,\sigma)\tilde{f}(\tau,\sigma)\,d\tau + \boldsymbol{\mathcal{M}}_2(t,\tau_0,\sigma)\tilde{a}(\sigma), \tag{28}$$

де введено такі позначення:

$$\boldsymbol{\mathcal{M}}_1(t,\tau_\nu,\tau,\sigma) = K(t,\tau_\nu,\sigma)\left\| \begin{matrix} (1+B_\nu^{(0)})\mathcal{K}(\tau_\nu,\tau,\sigma) \\ (1+B_\nu^{(1)})\mathcal{K}'(\tau_\nu,\tau,\sigma) \\ \dots \\ (1+B_\nu^{(m-1)})\mathcal{K}^{(m-1)}(\tau_\nu,\tau,\sigma) \end{matrix} \right\|,$$

$\mathcal{K}(t,\tau,\sigma)$ – функція Ґріна задачі Коші,

$$\boldsymbol{\mathcal{M}}_2(t,\tau_0,\sigma) = K(t,\tau_\nu,\sigma)\times$$

$$\times\left\| \begin{matrix} \sum\limits_{i=1}^{\nu}(1+B_i^{(0)})K_1(\tau_i,\tau_{i-1},\sigma) & \dots & \sum\limits_{i=1}^{\nu}(1+B_i^{(0)})K_m(\tau_i,\tau_{i-1},\sigma) \\ \sum\limits_{i=1}^{\nu}(1+B_i^{(1)})K_1'(\tau_i,\tau_{i-1},\sigma) & \dots & \sum\limits_{i=1}^{\nu}(1+B_i^{(1)})K_m'(\tau_i,\tau_{i-1},\sigma) \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum\limits_{i=1}^{\nu}(1+B_i^{(m-1)})K_1^{(m-1)}(\tau_i,\tau_{i-1},\sigma) & \dots & \sum\limits_{i=1}^{\nu}(1+B_i^{(m-1)})K_m^{(m-1)}(\tau_i,\tau_{i-1},\sigma) \end{matrix} \right\|,$$

при $\nu \ge 1$, а для $\nu = 0$

$$\boldsymbol{\mathcal{M}}_2(t,\tau_0,\sigma) = K(t,\tau_0,\sigma),$$

матрицант $\boldsymbol{\mathcal{M}}(t,\tau,\sigma)$ визначається формулою (8).

За умови рівномірної параболічності рівняння (22) для функції $\mathcal{K}(t,\tau,\sigma)$ і її похідних справджуються оцінки при комплексних аргументах $s = \sigma + i_0\gamma$

$$\left|D_t^{k_0}\mathcal{K}(t,\tau,s)\right| \le c\,(t-\tau)^{m-k_0-1}\cdot\exp\left\{\left(-\delta|\sigma|^{2b} + F|\gamma|^{2b}\right)(t-\tau)\right\}. \tag{29}$$

Отже, згідно з оцінками (9) та (29) отримуємо оцінки для $\boldsymbol{\mathcal{M}}_1$ та $\boldsymbol{\mathcal{M}}_2$:

$$\left\|D_t^{k_0}\boldsymbol{\mathcal{M}}_1(t,\tau_\nu,\tau,\sigma)\right\| \le c(t-\tau)^{m-k_0-1}\cdot e^{-\delta|\sigma|^{2b}(t-\tau)}\prod_{\nu=1}^{k} M(B_\nu),$$

$$\left\|D_t^{k_0}\boldsymbol{\mathcal{M}}_2(t,\tau_0,\sigma)\right\| \le c(t-\tau_0)^{m-k_0-1}\cdot e^{-\delta|\sigma|^{2b}(t-\tau_0)}\prod_{\nu=1}^{k} M(B_\nu),$$

$$\tau_0 < \tau_k, \quad t > \tau_k, \quad \sigma \in \mathbb{R}^n.$$

Застосовуючи до обох частин формули (28) обернене перетворення Фур'є і використовуючи теорему про перетворення Фур'є згортки, отримаємо розв'язок задачі (22)–(24)

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} G(t,\tau_0,x-\xi)\varphi(\xi)\,d\xi +$$

$$+\sum_{\nu=1}^{k-1}\int_{\tau_{\nu-1}}^{\tau_\nu} d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G_1(t,\tau_\nu,\tau,x-\xi)f(\tau,\xi)\,d\xi +$$

$$+\int_{\tau_{k-1}}^{t} d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G_0(t,\tau,x-\xi)f(\tau,\xi)\,d\xi + \int_{\mathbb{R}^n} G_2(t,\tau_0,x-\xi)a(\xi)\,d\xi, \tag{30}$$

де

$$G_1(t,\tau_\nu,\tau,x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i_0\sigma x}\boldsymbol{\mathcal{M}}_1(t,\tau_\nu,\tau,\sigma)\,d\sigma\,,$$

$$G_0(t,\tau,x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i_0\sigma x}\mathcal{K}(t,\tau,\sigma)\,d\sigma\,,$$

$$G_2(t,\tau_0,x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i_0\sigma x}\boldsymbol{\mathcal{M}}_2(t,\tau_0,\sigma)\,d\sigma\,,$$

а $G(t,\tau_0,x)$ визначається формулою (12).

Теорема 3. *Нехай*:

(***i***) *коефіцієнти* $A_{k_0k}(t)$ *рівняння* (22) *є неперервними, а рівняння* (22) *є рівномірно параболічним*;

(***ii***) *вирази* $1 + B_i^{(j-1)} \neq 0$, $j = 1,\ldots,m$, i *– скінченне.*

Тоді розв'язок задачі (22)–(24) *визначається формулою* (30) *для будь-яких функцій* a_j, $\varphi_j \in H^{(1,0)}$, $f \in H^{(1,\alpha)} \equiv C_x^{(\alpha)}(\Pi) \bigcap L_1(\mathbb{R}^n)$ *і справджуються оцінки*

$$\left|D_t^{k_0}D_x^k u(t,x)\right| \le$$

$$\le c\prod_{\nu=1}^{p} M(B_\nu)(t-\tau_0)^{m-k_0-1-\frac{|k|}{2b}}\left(|\varphi|_{H^{(1,0)}} + |a|_{H^{(1,0)}} + |f|_{H^{(1,0)}}\right) + c|f|_\alpha\,.$$

1. *Ивасишен С. Д.* Матрицы Грина параболических задач. – Киев: Вища шк., 1990. – 199 с.
2. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – Москва: Наука, 1967. – 736 с.
3. *Матийчук М. И., Эйдельман С. Д.* Задача Коши для параболических систем, коэффициенты которых имеют малую гладкость // Укр. мат. журн. – 1970. – **22**, №1. – С. 22–36.
4. *Матийчук М. И., Эйдельман С. Д.* О параболических системах с непрерывными по Дини коэффициентами // Тр. мат. факультета Воронеж. гос. ун-та (Тр. семинара по функц. анализу). – Воронеж, 1967. – Вып. 9. – С. 51–83.
5. *Матійчук М. І.* Параболічні сингулярні крайові задачі. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1999. – 176 с.
6. *Матійчук М. І., Лучко В. М.* Задача Коші для параболічних систем з імпульсною дією // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 11. – С. 1525–1535.
7. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Вища шк., 1987. – 258 с.
8. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы. – Москва: Наука, 1964. – 444 с.

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

Доказано существование и установлена оценка решения задачи Коши для параболического уравнения высшего порядка по t *с импульсным воздействием.*

CAUCHY PROBLEM FOR HIGH-ORDER PARABOLIC EQUATION WITH IMPULSE ACTION

In the present work the theory of Cauchy problem correctness for parabolic equations of higher order with impulse action is formed.

Чернів. нац. ун-т
ім. Ю. Федьковича, Чернівці

Одержано
25.12.06