

## ДВОСТОРОННІЙ АНАЛОГ МЕТОДУ НЬЮТОНА ЗНАХОДЖЕННЯ ВЛАСНИХ ЗНАЧЕНЬ НЕЛІНІЙНИХ СПЕКТРАЛЬНИХ ЗАДАЧ

*Запропоновано ітераційний алгоритм знаходження двосторонніх (альтернуючих) наближень до власних значень нелінійних спектральних задач, у якому використано двосторонній аналог методу Ньютона та нову ефективну чисельну процедуру обчислення ньютонівської поправки та її похідної.*

Нелінійні спектральні задачі  $T(\lambda)x = 0$  з операторнозначною функцією  $T: \mathbb{C} \rightarrow L(H)$  ( $L(H)$  – множина лінійних операторів, що діють у гільбертовому просторі  $H$ ), яка нелінійно залежить від спектрального параметра  $\lambda$ , мають своїм джерелом класичний аналіз. Зокрема, такі задачі відіграють важливу роль при дослідженні стійкості механічних та електродинамічних систем, а також при дослідженні галузження та біфуркації розв'язків нелінійних інтегральних рівнянь типу Гаммерштейна з ядрами, які нелінійно залежать від спектрального параметра. Цим значною мірою пояснюється інтерес як до різних аспектів спектральної теорії нелінійних задач на власні значення, так і до чисельних методів їх розв'язування.

Методам чисельного розв'язування нелінійних спектральних задач присвячено низку публікацій (див., наприклад, [2–4, 6, 8, 9, 12–16, 18–21]).

Один із підходів до розв'язування алгебраїчної задачі на власні значення в  $\mathbb{C}^n$  [21] полягає у зведенні лінійної спектральної задачі  $Ay = \lambda y$  до нелінійної системи  $n + 1$  рівнянь з  $n + 1$  невідомими

$$Q(\lambda, y) = \left\| \begin{array}{c} Ay - \lambda y \\ y^\top y - 1 \end{array} \right\| = 0$$

за допомогою умови нормування  $y^\top y = 1$  власного вектора, яку розв'язують за допомогою, зокрема, операторного методу Ньютона [14]. Такий підхід ще називають методом доповненого вектора [2], оскільки у цьому випадку метод Ньютона застосовують до «розширеного» вектора невідомих  $(y, \lambda)$  в  $\mathbb{C}^n$ .

Цю ідею використано у [15] для побудови та дослідження інтервального методу розв'язування спектральних задач. Такий підхід використовувався й іншими авторами (див. [13, 16, 18, 20]) для побудови та дослідження методів двосторонніх наближень (інтервальні методи) власних значень і власних векторів як лінійних, так і нелінійних спектральних задач.

Інтерес до двосторонніх методів, зокрема, інтервальних обумовлюється перш за все тим, що вони порівняно з іншими ітераційними методами дозволяють на кожному кроці ітераційного процесу оцінювати шукані розв'язки з двох сторін, тобто на кожному кроці отримувати зручну апостеріорну оцінку похибки обчислень.

У цій роботі для нелінійної матричної спектральної задачі запропоновано алгоритм знаходження її власних значень як коренів відповідного скалярного (детермінантного) рівняння, не розкриваючи самого детермінанта. В основі алгоритму – двосторонній аналог методу Ньютона [7], який отримано у рамках підходу до побудови двосторонніх наближень, що не використовує інтервальну арифметику, основні положення якого стосовно розв'язування нелінійних рівнянь сформульовано та обґрунтовано у роботах [5, 7, 17].

**1. Нелінійна алгебраїчна спектральна задача.** Нехай  $H = \mathbb{R}^n$  – скінченновимірний гільбертів простір і нехай  $D(\lambda)$  – квадратна матриця  $n$ -го порядку, усі елементи якої є достатньо гладкими (принаймні двічі неперервно диференційовними) функціями параметра  $\lambda$ . Задача полягає у зна-

ходженні таких чисел  $\lambda \in \mathbb{R}$ , які називаються власними значеннями, і таких векторів  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in H$ , які називаються відповідно лівим і правим власними векторами і які задовольняють рівняння

$$\mathbf{x}^\top \mathbf{D}(\lambda) = 0, \quad \mathbf{D}(\lambda)\mathbf{y} = 0. \quad (1)$$

Зазначимо, що шукані значення  $\lambda$  є одні й ті ж для обох задач (1) і є розв'язками рівняння

$$f(\lambda) \equiv \det \mathbf{D}(\lambda) = 0. \quad (2)$$

У цій роботі описано процес, який дозволяє для визначення ізолюваного власного значення матриці  $\mathbf{D}(\lambda)$  застосувати двосторонній аналог методу Ньютона [7], не розкриваючи визначника  $\mathbf{D}(\lambda)$ . Це означає, що ліва частина рівняння (1) у явному вигляді не задається, але пропонується алгоритм знаходження функцій  $f(\lambda)$ ,  $f'(\lambda)$  та  $f''(\lambda)$  при фіксованому значенні параметра  $\lambda$  з використанням для цього  $LU$ -розкладу матриці  $\mathbf{D}(\lambda)$ .

**2. Двосторонній аналог методу Ньютона та обчислення похідних детермінанта.** Нехай нам відомо наближення  $\lambda_k$  до власного значення, достатнє для застосування двостороннього аналогу методу Ньютона [7]:

$$\begin{aligned} \lambda_{2m+1} &= \lambda_{2m} - \frac{f(\lambda_{2m})f'(\lambda_{2m})}{f'(\lambda_{2m})^2 - f(\lambda_{2m})f''(\lambda_{2m})}, \\ \lambda_{2m+2} &= \lambda_{2m+1} - \frac{f(\lambda_{2m+1})}{f'(\lambda_{2m+1})}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (3)$$

для побудови почергових (альтернуючих) наближень до власного значення  $\lambda_*$  у вигляді

$$\lambda_0 < \lambda_2 < \dots < \lambda_{2m} < \dots < \lambda_* < \dots < \lambda_{2m-1} < \dots < \lambda_3 < \lambda_1 \quad (4)$$

або у вигляді

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_{2m-1} < \dots < \lambda_* < \dots < \lambda_{2m} < \dots < \lambda_4 < \lambda_2,$$

якщо початкове наближення знаходиться зліва від власного значення. Якщо ж початкове наближення знаходиться справа від власного значення, то за допомогою цього ж ітераційного процесу (3) отримуємо почергові наближення до власного значення у вигляді

$$\lambda_1 < \lambda_3 < \dots < \lambda_{2m-1} < \dots < \lambda_* < \dots < \lambda_{2m} < \dots < \lambda_2 < \lambda_0$$

або у вигляді

$$\lambda_2 < \lambda_4 < \dots < \lambda_{2m} < \dots < \lambda_* < \dots < \lambda_{2m-1} < \dots < \lambda_1 < \lambda_0. \quad (5)$$

Для цього потрібно вміти обчислювати значення функції  $f(\lambda)$  і її похідних лише при фіксованих значеннях параметра  $\lambda$ . Це можна зробити за допомогою  $LU$ -розкладу матриці  $\mathbf{D}(\lambda)$ , тобто розкладу

$$\mathbf{D}(\lambda) = \mathbf{L}(\lambda)\mathbf{U}(\lambda), \quad (6)$$

де  $\mathbf{L}(\lambda)$  – нижня трикутна матриця з одиничними діагональними елементами, а  $\mathbf{U}(\lambda)$  – верхня трикутна матриця. Тоді

$$f(\lambda) = \det \mathbf{L}(\lambda) \det \mathbf{U}(\lambda) = \prod_{i=1}^n u_{ii}(\lambda).$$

Оскільки елементи квадратної матриці  $\mathbf{D}(\lambda)$  (а отже, й  $\mathbf{U}(\lambda)$ ) є диференційовними функціями за  $\lambda$ , то для будь-яких  $\lambda$  отримуємо, що

$$f'(\lambda) = \sum_{k=1}^n v_{kk}(\lambda) \prod_{i=1, i \neq k}^n u_{ii}(\lambda),$$

$$f''(\lambda) = \sum_{k=1}^n w_{kk}(\lambda) \prod_{i=1, i \neq k}^n u_{ii}(\lambda) + \sum_{k=1}^n v_{kk}(\lambda) \left( \sum_{j=1, j \neq k}^n v_{jj}(\lambda) \prod_{i=1, i \neq k, i \neq j}^n u_{ii}(\lambda) \right),$$

де  $v_{ii}(\lambda) = u'_{ii}(\lambda)$ , а  $w_{ii}(\lambda) = v'_{ii}(\lambda)$ . Для знаходження значень  $v_{ii}(\lambda)$ , проди-  
ференціювавши (6) за  $\lambda$ , отримаємо

$$\mathbf{B}(\lambda) = \mathbf{M}(\lambda)\mathbf{U}(\lambda) + \mathbf{L}(\lambda)\mathbf{V}(\lambda), \quad (7)$$

де  $\mathbf{B}(\lambda) = \mathbf{D}'(\lambda)$ ,  $\mathbf{M}(\lambda) = \mathbf{L}'(\lambda)$ ,  $\mathbf{V}(\lambda) = \mathbf{U}'(\lambda)$ , а  $v_{ii}(\lambda)$  є елементами матриці  
 $\mathbf{V}(\lambda)$ . Тепер, диференціюючи (7) ще раз за  $\lambda$ , отримуємо

$$\mathbf{C}(\lambda) = \mathbf{N}(\lambda)\mathbf{U}(\lambda) + 2\mathbf{M}(\lambda)\mathbf{V}(\lambda) + \mathbf{L}(\lambda)\mathbf{W}(\lambda), \quad (8)$$

де  $\mathbf{C}(\lambda) = \mathbf{B}'(\lambda)$ ,  $\mathbf{N}(\lambda) = \mathbf{M}'(\lambda)$ ,  $\mathbf{W}(\lambda) = \mathbf{V}'(\lambda)$ , а  $w_{ii}(\lambda)$  – елементи матриці  $\mathbf{W}(\lambda)$ .

Отже, для обчислення  $f(\lambda_k)$ ,  $f'(\lambda_k)$  та  $f''(\lambda_k)$  необхідно при фіксова-  
ному  $\lambda = \lambda_m$  обчислити

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \mathbf{L}\mathbf{U}, \\ \mathbf{B} &= \mathbf{M}\mathbf{U} + \mathbf{L}\mathbf{V}, \\ \mathbf{C} &= \mathbf{N}\mathbf{U} + 2\mathbf{M}\mathbf{V} + \mathbf{L}\mathbf{W}, \end{aligned} \quad (9)$$

звідки

$$\begin{aligned} f(\lambda_m) &= \prod_{i=1}^n u_{ii}, & f'(\lambda_m) &= \sum_{k=1}^n v_{kk} \prod_{i=1, i \neq k}^n u_{ii}, \\ f''(\lambda_m) &= \sum_{k=1}^n w_{kk} \prod_{i=1, i \neq k}^n u_{ii} + \sum_{k=1}^n v_{kk} \left( \sum_{j=1, j \neq k}^n v_{jj} \prod_{i=1, i \neq k, i \neq j}^n u_{ii} \right), \end{aligned} \quad (10)$$

а елементи матриць у розкладах (9) можуть бути обчислені за допомогою  
рекурентних співвідношень для  $r = 1, 2, \dots, n$ :

$$\begin{aligned} u_{rk} &= d_{rk} - \sum_{j=1}^{r-1} \ell_{rj} u_{jk}, & k &= r, \dots, n, \\ \ell_{ir} &= \frac{1}{u_{rr}} \left( d_{ir} - \sum_{j=1}^{r-1} \ell_{ij} u_{jr} \right), & i &= r+1, \dots, n, \\ v_{rk} &= b_{rk} - \sum_{j=1}^{r-1} (m_{rj} u_{jk} + \ell_{rj} v_{jk}), & k &= r, \dots, n, \\ m_{ir} &= \frac{1}{u_{rr}} \left[ b_{ir} - \sum_{j=1}^{r-1} (m_{ij} u_{jr} + \ell_{ij} v_{jr}) - \ell_{ir} v_{rr} \right], & i &= r+1, \dots, n, \\ w_{rk} &= c_{rk} - \sum_{j=1}^{r-1} (n_{rj} u_{jk} + 2m_{rj} v_{jk} + \ell_{rj} w_{jk}), & k &= r, \dots, n, \\ n_{ir} &= \frac{1}{u_{rr}} \left[ c_{ir} - \sum_{j=1}^{r-1} (n_{ij} u_{jr} + 2m_{ij} v_{jr} + \ell_{ij} w_{jr}) - 2m_{ir} v_{rr} - \ell_{ir} w_{rr} \right], \\ & & i &= r+1, \dots, n. \end{aligned}$$

Таким чином, ітераційний процес (3), який забезпечує двосторонні на-  
ближення до власного значення, з урахуванням співвідношення (10) набуде  
вигляду

$$\lambda_{2m+1} = \lambda_{2m} - \sum_{k=1}^n \frac{v_{kk}}{u_{kk}} \cdot \frac{1}{\sum_{k=1}^n \left( \left( \frac{v_{kk}}{u_{kk}} \right)^2 - \frac{w_{kk}}{u_{kk}} \right)},$$

$$\lambda_{2m+2} = \lambda_{2m+1} - \frac{1}{\sum_{k=1}^n \frac{\bar{v}_{kk}}{\bar{u}_{kk}}}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (11)$$

де  $u_{kk}, v_{kk}, w_{kk}$  – елементи матриць  $\mathbf{U}, \mathbf{V}$  та  $\mathbf{W}$  у розкладах (9) при фіксованому  $\lambda = \lambda_{2m}$ , а  $\bar{u}_{kk}, \bar{v}_{kk}$  – елементи матриць  $\mathbf{U}, \mathbf{V}$  у розкладах (9) при фіксованому  $\lambda = \lambda_{2m+1}$ .

Отже, алгоритм можна записати у такому вигляді:

---

**Алгоритм 1.** Ітераційний процес почергових наближень

---

1. Задасмо початкове наближення  $\lambda_0$  до  $s$ -го власного значення задачі (1)
  2. **for**  $m = 0, 1, 2, \dots$  до досягнення точності **do**
  3. **if**  $m$  – парне
  4.     **than** обчислити величини  $u_{kk}, v_{kk}, w_{kk}$  з розкладу (9) при  $\lambda = \lambda_{2m}$
  5.     обчислити наближення до власного значення  $\lambda_{2m+1}$  за (11)
  6.     **else** обчислити величини  $\bar{u}_{kk}, \bar{v}_{kk}$  з розкладу (9) при  $\lambda = \lambda_{2m+1}$
  7.     обчислити наближення до власного значення  $\lambda_{2m+2}$  за (11)
  8. **end for**  $m$ .
- 

З алгоритму видно, що для отримання почергових наближень на кожному кроці алгоритму потрібно звертатися до алгоритму обчислення розкладу (9).

У деяких випадках більш оптимальним з огляду на кількість звертань до обчислення розкладу (9) є алгоритм, побудований на ітераційному процесі включаючих наближень [5]:

$$\begin{aligned} \mu_{m+1} &= \mu_m - \frac{f(\mu_m)}{f'(\mu_m)}, \\ v_{m+1} &= \mu_m - \frac{f(\mu_m)f'(\mu_m)}{f'(\mu_m)^2 - f(\mu_m)f''(\mu_m)}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (12)$$

за допомогою якого отримуємо включаючі наближення до власного значення у вигляді

$$\lambda_0 = \mu_0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_m < \dots < \lambda_* < \dots < v_m < \dots < v_2 < v_1 \quad (13)$$

або у вигляді

$$\lambda_0 = \mu_0 < \{v_1\} < v_2 < \dots < v_m < \dots < \lambda_* < \dots < \mu_m < \dots < \mu_2 < \mu_1,$$

використовуючи при цьому одне початкове наближення  $\lambda_0 = \mu_0$  у даному випадку зліва від  $\lambda_*$ , або монотонні включаючі наближення у вигляді

$$\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_m < \dots < \lambda_* < \dots < v_m < \dots < v_2 < \{v_1\} < \mu_0 = \lambda_0 \quad (14)$$

або

$$v_1 < v_2 < \dots < v_m < \dots < \lambda_* < \dots < \mu_m < \dots < \mu_2 < \mu_1 < \mu_0 = \lambda_0,$$

якщо початкове наближення  $\lambda_0 = \mu_0$  знаходиться справа від  $\lambda_*$ . Тут фігурні дужки означають, що нерівність  $v_1 < v_2$  (відповідно  $v_2 < v_1$ ) може не виконуватися, хоча усі наступні нерівності  $v_m < v_{m+1}$  (відповідно  $v_{m+1} < v_m$ ) для  $m = 2, 3, \dots$  виконуються завжди.

Якщо тепер знову замінити значення функції і її похідних у потрібних точках співвідношеннями (10), то ітераційний процес (12) набуде вигляду

$$\mu_{m+1} = \mu_m - \frac{1}{\sum_{k=1}^n \frac{v_{kk}}{u_{kk}}},$$

$$v_{m+1} = \mu_m - \left( \sum_{k=1}^n \frac{v_{kk}}{u_{kk}} \right) \cdot \frac{1}{\sum_{k=1}^n \left( \left( \frac{v_{kk}}{u_{kk}} \right)^2 - \frac{w_{kk}}{u_{kk}} \right)}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (15)$$

де  $u_{kk}, v_{kk}, w_{kk}$  – елементи матриць  $\mathbf{U}, \mathbf{V}$  та  $\mathbf{W}$  у розкладах (9) при фіксованому  $\lambda = \mu_m$ .

Отже, пропонуємо такий алгоритм знаходження власних значень нелінійної спектральної задачі:

---

**Алгоритм 2.** Ітераційний процес включаючих наближень

---

1. Задаємо початкове наближення  $\lambda_0 = \mu_0$  до  $s$ -го власного значення задачі (1)
  2. **for**  $m = 0, 1, 2, \dots$  до досягнення точності **do**
  3. обчислити величини  $u_{kk}, v_{kk}, w_{kk}$  з розкладу (9) при  $\lambda = \mu_m$
  4. обчислити наближення до власного значення  $\mu_{m+1}$  та  $v_{m+1}$  за (15)
  5. **end for**  $m$ .
- 

Отже, бачимо, що за **алгоритмом 2**, на відміну від **алгоритму 1**, за одне звертання до обчислення розкладу (9) обчислюються два наближення (зліва та справа).

**Зауваження.** Для уникнення небажаного випадку  $u_{rr} = 0$  застосовують низку перестановок рядків (і/або стовпців) матриці  $\mathbf{D}$  з вибором головного елемента (див., наприклад, [10, с. 44]). У цьому випадку розклади (9) записуються як

$$\mathbf{PD} = \mathbf{LU},$$

$$\mathbf{PB} = \mathbf{MU} + \mathbf{LV},$$

$$\mathbf{PC} = \mathbf{NU} + 2\mathbf{MV} + \mathbf{LW},$$

де  $\mathbf{P}$  – матриця перестановок, причому  $\det \mathbf{P} = (-1)^q$ , де  $q$  – число перестановок (наприклад, рядків). У такому випадку співвідношення (10) набудуть вигляду

$$f(\lambda_m) = (-1)^q \prod_{i=1}^n u_{ii},$$

$$f'(\lambda_m) = (-1)^q \sum_{k=1}^n v_{kk} \prod_{i=1, i \neq k}^n u_{ii},$$

$$f''(\lambda_m) = (-1)^q \sum_{k=1}^n w_{kk} \prod_{i=1, i \neq k}^n u_{ii} + (-1)^q \sum_{k=1}^n v_{kk} \left( \sum_{j=1, j \neq k}^n v_{jj} \prod_{i=1, i \neq k, i \neq j}^n u_{ii} \right).$$

Цей алгоритм можна застосовувати і для інших методів, які використовують похідні, зокрема, для методу Геллі [17] або для алгоритму знаходження початкових наближень [6], які потім можна використати, наприклад, для того ж таки методу Ньютона або Геллі.

**3. Числовий приклад.** Розглянемо застосування запропонованого алгоритму до знаходження узагальнених власних значень лінійного однорідного інтегрального рівняння, ядро якого аналітично (нелінійно) залежить від спектрального параметра  $\lambda = c$ :

$$v(\xi, c) = T(c)v(\xi, c) \equiv \int_{-1}^1 \frac{F(\xi')}{f_0(\xi', c)} K(\xi, \xi', c) v(\xi', c) d\xi', \quad (16)$$

де  $F(\xi)$  – неперервна на відрізку  $[-1, +1]$  дійсна невід’ємна функція,

$$K(\xi, \xi', c) = \frac{\sin c(\xi - \xi')}{\pi(\xi - \xi')}, \quad (17)$$

$$f_0(\xi, c) = \int_{-1}^1 F(\xi') K(\xi, \xi', c) d\xi'. \quad (18)$$

Рівняння (16) виникає при знаходженні точок можливого галуження розв’язків нелінійного інтегрального рівняння [11]

$$f(\xi, c) = \int_{-1}^1 F(\xi') K(\xi, \xi', c) \cdot \exp\{i \arg f(\xi', c)\} d\xi', \quad (19)$$

яке отримується внаслідок варіаційних постановок задач синтезу, зокрема, лінійних антен за заданою амплітудною діаграмою напрямленості. Отже, у формулі (19)  $f(\xi, c)$  – діаграма напрямленості антени,  $F(\xi)$  – задана діаграма напрямленості,  $c$  – параметр, який характеризує електричні розміри антени.

Одним із можливих розв’язків рівняння (19) (назвемо його тривіальним) є (18), який відповідає діаграмам з фазовим центром ( $\arg f(\xi, c) = 0$ ) і справджується для довільних  $c$ . Звичайно, практичний інтерес у більшості випадків мають саме нетривіальні розв’язки, які відгалужуються від  $f_0(\xi, c)$  з ростом параметра  $c$ .

Отже, задача знаходження точок  $c$ , у яких відгалужуються розв’язки, відмінні від тривіального розв’язку  $f_0(\xi, c)$ , зводиться до обчислення власних значень інтегрального оператора (16), у якому параметр  $c$  відіграє роль спектрального, а  $v(\xi, c) = \text{Im } f(\xi, c)$ .

Зробивши у рівнянні (16) заміну

$$\varphi(\xi, c) = \sqrt{w(\xi, c)} v(\xi, c), \quad \text{де} \quad w(\xi, c) = \frac{F(\xi)}{f_0(\xi, c)}, \quad (20)$$

отримаємо рівняння

$$\varphi(\xi, c) = \int_{-1}^1 \Phi(\xi, \xi', c) \varphi(\xi', c) d\xi' \quad (21)$$

з симетричним ядром

$$\Phi(\xi, \xi', c) = K(\xi, \xi', c) \sqrt{w(\xi, c)w(\xi', c)}.$$

Оскільки при довільних значеннях  $c < +\infty$  функція  $f_0(\xi, c)$  є власною функцією рівняння (16), яка відповідає неперервному спектру оператора (16), то з урахуванням (20) власною функцією рівняння (21) при довільних  $c < +\infty$  буде функція

$$\varphi_0(\xi, c) = \sqrt{F(\xi)f_0(\xi, c)},$$

яка відповідає неперервному спектру оператора (21). Виділимо цю функцію з ядра  $\Phi(\xi, \xi', c)$ , тоді рівняння (21) зведеться до інтегрального рівняння

$$\varphi(\xi, c) = \tilde{T}(c)\varphi(\xi, c) \equiv \int_{-1}^1 E(\xi, \xi', c) \varphi(\xi', c) d\xi' \quad (22)$$

з симетричним ядром

$$E(\xi, \xi', c) = \sqrt{w(\xi, c)w(\xi', c)} \cdot \left[ K(\xi, \xi', c) - \frac{f_0(\xi, c)f_0(\xi', c)}{\|\varphi_0(\xi, c)\|^2} \right].$$

Згідно з лемою Шмідта [1] функція  $\varphi_0(\xi, c)$  уже не буде власною функцією рівняння (21), а оператор  $\tilde{T}(c)$  має лише точковий спектр. Крім того, оператор (22) є цілком неперервним, а також неперервно диференційовним за параметром  $c$ .

Замінивши у рівнянні (22) інтеграл квадратурною формулою Гаусса

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{j=1}^n a_{jn} f(x_{jn}),$$

де  $a_{jn} \in \mathbb{R}$  – коефіцієнти, а  $x_{jn} \in [-1, +1]$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , – вузли формули Гаусса, отримуємо однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно  $\varphi_{1n}, \dots, \varphi_{nn}$ :

$$\varphi_{in} = \sum_{j=1}^n a_{jn} E(\xi_{in}, \xi_{jn}, c) \varphi_{jn}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

де  $\varphi_{in} = \varphi(\xi_{in}, c)$ . Тобто отримали спектральну задачу (1) з матрицею  $\mathbf{D}(\lambda) = \mathbf{I} - \mathbf{A}(\lambda)$ , де  $\mathbf{A}(\lambda) = \{a_{jn} E(\xi_{in}, \xi_{jn}, \lambda)\}_{i,j=1}^n$ ,  $\lambda = c$ , а  $\mathbf{I}$  – одинична матриця. Тепер до матричної спектральної задачі застосовуємо запропоновані алгоритми.

Числові експерименти щодо обчислення перших власних значень (першої точки галуження) для різних типів заданої діаграми напрямленості проводились для матриць різної розмірності. Відомо [11], що для заданих діаграм напрямленості  $F(\xi) = 1$  та  $F(\xi) = \cos \frac{\pi\xi}{2}$  точними розв'язками рівняння (19) є числа  $\pi$  та  $\frac{3\pi}{2}$  відповідно. Порівняння результатів чисельного розв'язування задач (19) з існуючими точними розв'язками показує, що для матриць розмірності  $n \geq 16$  можна досягнути точності  $10^{-7}$  обчислення власних значень за невелику кількість кроків ітераційними процесами (11) або (15). Деякі результати експериментів для матриць розмірності  $n = 16$  розміщено у табл. 1, де наведено різні початкові наближення (число над рискою) й отримані на їхній підставі наближені розв'язки за двома алгоритмами для трьох типів діаграм напрямленості:  $F(\xi) = 1$ ,  $F(\xi) = \cos \frac{\pi\xi}{2}$ ,  $F(\xi) = \frac{1}{\xi + 2}$ . Усі обчислення проводилися до досягнення точності  $10^{-7}$ .

Таблиця 1

$F(\xi)$	$m$	Алгоритм 1	Алгоритм 2	
		$\lambda_m$	$\mu_m$	$\nu_m$
const = 1	5	3.0 3.141592679	3.0 3.141592672	3.141592672
	6	2.0 3.141592662	2.0 3.141592709	3.141592710
$\cos \frac{\pi\xi}{2}$	11	2.0 4.712389138	2.0 4.712389143	4.712389146
	7	4.0 4.712389109	4.0 4.712389175	4.712389186
$\frac{1}{\xi + 2}$	5	2.0 2.973394164	2.0 2.973394171	2.973394171
	4	3.0 2.973394162	3.0 2.973394165	2.973394165

Для ілюстрації роботи алгоритмів двосторонніх наближень у табл. 2 для двох типів заданої діаграми:  $F(\xi) = 1$  та  $F(\xi) = \frac{1}{\xi + 2}$ , наведено значення послідовних двосторонніх наближень параметра  $\lambda$ . Обчислення проводилися при початковому наближенні  $\lambda_0 = 3.0$ .

Таблиця 2

$F(\xi)$	$m$	<b>Алгоритм 1</b>			<b>Алгоритм 2</b>		
		$\lambda_m$	$\mu_m$	$\nu_m$	$\mu_m$	$\nu_m$	
const = 1	1	3.164505375	3.118521081	3.164505375	3.118521081	3.164505375	
	2	3.140705652	3.140793046	3.142402732	3.140793046	3.142402732	
	3	3.141593939	3.141591660	3.141593691	3.141591660	3.141593691	
	4	3.141592678	3.141592672	3.141592672	3.141592672	3.141592672	
	5	3.141592679					
$\frac{1}{\xi + 2}$	1	2.974501775	2.972324121	2.974501775	2.972324121	2.974501775	
	2	2.973392437	2.973392576	2.973395866	2.973392576	2.973395866	
	3	2.973394168	2.973394151	2.973394251	2.973394151	2.973394251	
	4	2.973394162	2.973394165	2.973394165	2.973394165	2.973394165	

З табл. 2 видно, що за **алгоритмом 1** отримуємо для заданої діаграми  $F(\xi) = 1$  двосторонні наближення у вигляді (4), для  $F(\xi) = \frac{1}{(\xi + 2)}$  – двосторонні наближення у вигляді (5), а за **алгоритмом 2** – у вигляді (13) і (14) для  $F(\xi) = 1$  та  $F(\xi) = \frac{1}{(\xi + 2)}$  відповідно.

Отже, застосування запропонованого у роботі алгоритму обчислення похідних від детермінанта матриці дозволяє побудувати надійні та ефективні (у розумінні двосторонніх оцінок і швидкості збіжності) алгоритми знаходження власних значень нелінійних спектральних задач.

1. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. – Москва: Наука, 1969. – 527 с.
2. Калиткин Н. Н. Решения задач на собственные значения методом дополненного вектора // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1965. – 5, № 6. – С. 1107–1115.
3. Кармышов С. В. Численный метод решения задачи на собственные значения с нелинейным вхождением спектрального параметра для разреженных матриц // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1989. – 29, № 12. – С. 1898–1903.
4. Конькова Т. Я., Кублановская В. Н., Савинова Л. П. К решению нелинейной спектральной задачи для матрицы // Зап. науч. семинара ЛОМИ АН СССР. – 1976. – 58. – С. 54–66.
5. Подлевський Б. М. Методи двосторонніх наближень розв'язування нелінійних рівнянь. – Львів, 2001. – 48 с. – (Препринт / НАН України. Ін-т прикл. проблем механіки і математики; 2-01.)
6. Подлевський Б. М. Про застосування методу Ньютона до знаходження власних значень нелінійних спектральних задач // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – 50, № 4. – С. 55–60.
7. Подлевський Б. М. Про один підхід до побудови двосторонніх ітераційних методів розв'язування нелінійних рівнянь // Доп. НАН України. – 1998. – № 5. – С. 37–41.
8. Подлевський Б. М. Про один підхід до побудови методів двосторонніх наближень розв'язування нелінійних спектральних задач // Доп. НАН України. – 2005. – № 3. – С. 16–21.
9. Подлевський Б. М. Чисельний метод розв'язування одного класу нелінійних спектральних задач // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – 44, № 2. – С. 34–38.
10. Райс Дж. Матричные вычисления и математическое обеспечение. – Москва: Мир, 1984. – 264 с.



11. Савенко П. О. Нелінійні задачі синтезу випромінюючих систем (теорія і методи розв'язування). – Львів: ІППММ НАН України, 2002. – 320 с.
12. Савенко П. О. Чисельний алгоритм розв'язування узагальненої задачі на власні значення для цілком неперервних самоспряжених операторів з нелінійним спектральним параметром // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 1997. – **40**, № 1. – С. 146–150.
13. Alefeld G. Bounding the slope of polynomial operators and some applications // *Computing.* – 1981. – **26**, No 2. – P. 227–237.
14. Anselone P. M., Rall L. B. The solution of the characteristic value-vector problems by Newton's method // *Numer. Math.* – 1968. – **11**, No. 1. – P. 38–45.
15. Krawczyk R. Fehlerabschätzung reeller Eigenwerte und Eigenvektoren von Matrizen // *Computing.* – 1969. – **4**. – P. 281–293.
16. Mayer G. A Unified approach to enclosure methods for eigenpairs // *Z. angew. Math. Mech.* – 1994. – **74**. – P. 115–128.
17. Podlevskyi B.M. On the bilateral convergence of Halley's method // *Z. angew. Math. Mech.* – 2003. – **83**, No 4. – P. 282–286.
18. Rokne J. Including iterations for the lambda-matrix eigenproblem // *Computing.* – 1985. – **35**, No 2. – P. 207–218.
19. Ruhe A. Algorithms for the nonlinear eigenvalue problem // *SIAM. J. Numer. Anal.* – 1973. – **10**, No. 4. – P. 674–689.
20. Rump S. M. Guaranteed inclusions for the complex generalized eigenproblem // *Computing.* – 1989. – **42**. – P. 225–238.
21. Unger H. Nichtlineare Behandlung von Eigenwertaufgaben // *Z. angew. Math. Mech.* – 1950. – **30**. – P. 281–282.

#### **ДВУСТОРОННИЙ АНАЛОГ МЕТОДА НЬЮТОНА НАХОЖДЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧ**

*Предлагается итерационный алгоритм нахождения двусторонних (альтернирующих) приближений к собственным значениям нелинейных спектральных задач, использующий двусторонний аналог метода Ньютона и новую эффективную численную процедуру определения ньютоновской поправки и ее производной.*

#### **BILATERAL ANALOG OF NEWTON'S METHOD FOR DETERMINATION OF EIGENVALUES OF ONE CLASS OF NONLINEAR SPECTRAL PROBLEMS**

*An iterative algorithm for determination of bilateral (alternating) approximations to the eigenvalues of nonlinear spectral problems is proposed which uses the bilateral analog of Newton's method and a new efficient numerical procedure for calculation Newton's correction and its derivative.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано  
05.08.05