

ВАРІАЦІЙНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ БІГАРМОНІЧНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПРЯМОКУТНОЇ ОБЛАСТІ

Розвинено варіаційний метод розв'язування бігармонічних задач для прямокутної області, на одній парі протилежних сторін якої функція і її нормальна похідна набувають нульових значень, а на іншій діють неоднорідні умови. Розглядаються випадки півбезмежної та скінченної області. Метод базується на мінімізації квадратичного функціонала, який за нормою L_2 визначає відхилення розв'язку від заданих неоднорідних умов. Для розв'язування цієї варіаційної задачі застосовано дещо відмінне від запропонованого раніше [8] розв'язання розв'язку за системами комплексних бігармонічних функцій – так званих однорідних розв'язків П. Ф. Папковича, які тотожно задовольняють задані однорідні умови на парі протилежних сторін прямокутника. Розглянуто декілька варіантів неоднорідних крайових умов, які виникають у задачах двовимірної теорії пружності. Наведено приклад застосування запропонованого методу для визначення розподілів напружень у прямокутній області, одна із сторін якої жорстко закріплена, а до протилежної сторони прикладено нормальні сили.

До бігармонічних задач приходять у різних наукових дисциплінах, зокрема, у двовимірній теорії пружності [6, с. 70–76] і теорії пластин [5, с. 378–382], гідромеханіці [3]. Однак незважаючи на її значну історію, бігармонічна проблема продовжує й сьогодні привертати увагу дослідників, тому аналіз її актуального стану вимагає спеціального розгляду. Обмежимося посилаваннями на останні відомі нам історичні екскурси в цю область [2, 10].

У статті розглядається модифікація запропонованого раніше [8] варіаційного методу розв'язування одного класу бігармонічних задач для півбезмежної прямокутної області (півсмуги), а також його поширення на випадок скінченної прямокутної області. Запропоноване тут подання розв'язку у вигляді розв'язання за системами комплексних бігармонічних функцій дозволило отримати доволі прості аналітичні вирази для комплексних коефіцієнтів нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), яка при цьому виникає. Завдяки цьому було істотно підвищено швидкодію алгоритмів числової реалізації методу.

1. Системи однорідних розв'язків та їх застосування. Нехай дійсна функція $\Phi(x, y)$ задовольняє в прямокутній області $D(x, y)$ бігармонічне рівняння

$$\frac{\partial^4 \Phi(x, y)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi(x, y)}{\partial y^4} = 0, \quad (1)$$

а на двох протилежних сторонах $y = \pm 1$ цієї області – однорідні умови

$$\Phi(x, y)|_{y=\pm 1} = \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=\pm 1} = 0. \quad (2)$$

Тут x, y – безрозмірні (віднесені до половинної висоти b прямокутника) декартові координати.

Граничні умови на функцію $\Phi(x, y)$, що діють на іншій парі протилежних сторін прямокутника, конкретизуємо пізніше.

Умови вигляду (2) дозволяють розкласти задачу визначення функції $\Phi(x, y)$ у прямокутнику на дві: симетричну стосовно функції $\frac{1}{2}(\Phi(x, y) + \Phi(x, -y))$ та антисиметричну стосовно функції $\frac{1}{2}(\Phi(x, y) - \Phi(x, -y))$. Кожна з цих функцій, очевидно, задовольняє рівняння (1) та умови (2).

Відома система комплекснозначних бігармонічних функцій Φ_k , які то-
тожно задовольняють умови (2):

$$\Phi_k = \exp(-\gamma_k x) F_k(y), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3)$$

де γ_k – комплексні корені трансцендентного рівняння

$$\begin{aligned} - \text{для випадку симетрії:} & \quad \sin(2\gamma) + 2\gamma = 0, \\ - \text{для випадку антисиметрії:} & \quad \sin(2\gamma) - 2\gamma = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

$F_k(y)$ – комплекснозначні функції дійсного аргументу

$$\begin{aligned} - \text{для випадку симетрії:} & \quad F_k(y) = \alpha_k \cos(\gamma_k y) + \gamma_k y \sin(\gamma_k y), \quad \alpha_k = -\gamma_k \operatorname{tg} \gamma_k, \\ - \text{для випадку антисиметрії:} & \quad F_k(y) = \alpha_k \sin(\gamma_k y) + \gamma_k y \cos(\gamma_k y), \quad \alpha_k = -\gamma_k \operatorname{ctg} \gamma_k. \end{aligned} \quad (5)$$

Функції $F_k(y)$, які дістали назву однорідних розв'язків бігармонічного рівняння або функцій П. Ф. Папковича, виникають при побудові розв'язків задач вигляду (1), (2), що згасають на безмежності, для області $\mathcal{D}(x, y) = (0 < x < \infty) \cup (-1 < y < 1)$.

Система функцій $F_k(y)$ є двоюко повною [1], тобто їх дійсні $F_k^1 = \operatorname{Re} F_k(y)$ та уявні $F_k^2 = \operatorname{Im} F_k(y)$ частини утворюють дві лінійно незалежні системи дійсних функцій [4]. Тому, вводячи функції $\Phi_k^1 = \operatorname{Re} \Phi_k$, $\Phi_k^2 = \operatorname{Im} \Phi_k$ та подаючи шукану функцію $\Phi(x, y)$ у вигляді розвинення

$$\Phi(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \Phi_k^1 + B_k \Phi_k^2), \quad (6)$$

можна підпорядкувати її двом умовам на торці півбезмежної прямокутної області, наприклад, таким:

$$\Phi(x, y) \Big|_{x=0} = m(y), \quad - \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} \Big|_{x=0} = t(y). \quad (7)$$

Тут $m(y)$, $t(y)$ – задані функції.

Коректне формулювання крайової задачі для бігармонічного рівняння (1) вимагає неперервності заданих на межі двовимірної області шуканої функції та її нормальної похідної [7, с. 398–400]. Тому функції $m(y)$, $t(y)$ повинні бути неперервними на відріжку $(-1, 1)$, а на його кінцях, як випливає з (2), задовольняти умови

$$m(-1) = m(1) = t(-1) = t(1) = 0. \quad (8)$$

Підставляючи подання (6) в умови (7), отримуємо нескінченну систему рівнянь для визначення двох послідовностей дійсних чисел A_1, A_2, \dots та B_1, B_2, \dots :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} (A_k F_k^1 + B_k F_k^2) &= m(y), \\ \sum_{k=1}^{\infty} (A_k (\alpha_k F_k^1 - \beta_k F_k^2) + B_k (\alpha_k F_k^2 + \beta_k F_k^1)) &= t(y), \end{aligned}$$

де α_k , β_k – дійсні та уявні частини коренів $\gamma_k = \alpha_k + i \beta_k$.

Оскільки системи функцій F_k^1 , F_k^2 не ортонормовані, отримати розв'язок цієї задачі в замкненому вигляді не вдається. У публікаціях [1, 5] були встановлені формули для визначення коефіцієнтів розвинення комплексної бігармонічної функції у півбезмежній прямокутній області за системою

функцій $F_k(y)$ для двох спеціальних граничних умов на її торці $x = 0$, які виникають у теорії товстих плит і двовимірній теорії пружності.

У статті [8] розроблено варіаційний метод розв'язування бігармонічних задач для півбезмежної прямокутної області, за яким підпорядкування розв'язку заданим на торці $x = 0$ крайовим умовам здійснюється за квадратичною нормою L_2 . Метод було застосовано для різних типів граничних умов на відрізку $x = 0$, які виникають у двовимірній теорії пружності та теорії пластин. Використовуючи цей метод, отримуємо нескінченну СЛАР стосовно дійсних коефіцієнтів $A_1, A_2, \dots, B_1, B_2, \dots$ розвинення (6):

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} M_{mk}^{11} A_k + \sum_{k=1}^{\infty} M_{mk}^{12} B_k &= K_m^1, \\ \sum_{k=1}^{\infty} M_{mk}^{21} A_k + \sum_{k=1}^{\infty} M_{mk}^{22} B_k &= K_m^2, \quad m = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (9)$$

Наприклад, для умов вигляду (7) коефіцієнти $M_{mk}^{\lambda\mu}$ (дійсні числа) та вільні члени K_m^λ системи (9) визначаються як

$$\begin{aligned} M_{mk}^{\lambda\mu} &= \int_{-1}^1 [F_m^\lambda F_k^\mu + T_m^\lambda T_k^\mu] dy, \\ K_m^\lambda &= \int_{-1}^1 [m(y) F_m^\lambda + t(y) T_m^\lambda] dy, \end{aligned} \quad (10)$$

де $T_k^1 = \operatorname{Re}(\gamma_k F_k(y))$, $T_k^2 = \operatorname{Im}(\gamma_k F_k(y))$, $\lambda, \mu = 1, 2$.

Виділяючи дійсні та уявні частини функцій $F_k(y)$, $\gamma_k F_k(y)$, можна обчислити інтеграл у формулі (10) і, таким чином, встановити аналітичні подання для коефіцієнтів нескінченної системи (9), виразивши їх через α_k , β_k . Проте це приводить до громіздких формул. Тому в статті [8], коли проводили кількісне дослідження таких задач, використовували числове інтегрування для обчислення коефіцієнтів $M_{mk}^{\lambda\mu}$ за формулою (10).

Розглянемо модифікацію запропонованого у [8] варіаційного підходу, яка базується на поданні дійсної функції $\Phi(x, y)$, відмінному від (6), що дозволяє встановити формули, які у замкненому вигляді виражають коефіцієнти нескінченної системи рівнянь через корені рівнянь (4).

2. Півбезмежна область. Розглянемо спочатку клас бігармонічних задач для півбезмежної прямокутної області $\mathcal{D}(x, y)$, на бічних сторонах $y = \pm 1$ якої діють умови (2), на торці $x = 0$ – одна із пар умов вигляду:

$$\sigma_{xx}|_{x=0} = \sigma(y), \quad \sigma_{xy}|_{x=0} = \tau(y), \quad (11)$$

$$u_x|_{x=0} = u(y), \quad u_y|_{x=0} = v(y), \quad (12)$$

$$\sigma_{xx}|_{x=0} = \sigma(y), \quad u_y|_{x=0} = v(y), \quad (13)$$

$$\sigma_{xy}|_{x=0} = \tau(y), \quad u_x|_{x=0} = u(y), \quad (14)$$

а в безмежно віддалених точках справджується умова

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \Phi(x, y) = 0. \quad (15)$$

Функції $\sigma_{xx} = \sigma_{xx}(x, y)$, $\sigma_{xy} = \sigma_{xy}(x, y)$, $u_x = u_x(x, y)$, $u_y = u_y(x, y)$ виражаються через розв'язок $\Phi(x, y)$ за такими формулами:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial y^2}, & \sigma_{xy} &= -\frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x \partial y}, \\ u_x &= (1 - \nu^2) \int \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial y^2} dx - \nu(1 + \nu) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} + u_0(y), \\ u_y &= (1 - \nu^2) \int \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x^2} dy - \nu(1 + \nu) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} + v_0(x).\end{aligned}\quad (16)$$

У формулах (11)–(16) використано такі позначення для безрозмірних величин: σ_{xx}, σ_{xy} – віднесені до E компоненти напружень (E – модуль Юнга матеріалу); Φ – віднесена до E/b^2 функція напружень; u_x, u_y – віднесені до b компоненти вектора переміщень; $u_0(y), v_0(x)$ – невідомі безрозмірні лінійні функції; $\sigma(y), \tau(y), u(y), v(y)$ – задані на проміжку безрозмірні дійсні функції такі, що $\int_{-1}^1 \sigma(y) dy = \int_{-1}^1 y \sigma(y) dy = \int_{-1}^1 \tau(y) dy = 0$; ν – коефіцієнт Пуассона матеріалу.

Умови вигляду (11)–(14) виникають у задачах двовимірної теорії пружності та мають цілком прозорий фізичний зміст. Так, умови (11) вимагають підпорядкування на торці $x = 0$ півсмуги нормальної σ_{xx} і дотичної σ_{xy} компонент напружень заданим функціям $\sigma(y)$ і $\tau(y)$ відповідно, умови (12) – підпорядкування заданим функціям $u(y)$ і $v(y)$ нормальної u_x і дотичної u_y компонент вектора переміщень. Умови (13), (14) є змішаними, вони враховують випадки, коли на відрізку $[-1, 1]$ задана одна з компонент (нормальна або дотична) напружень і одна компонента вектора переміщень (дотична або нормальна). Для визначення лінійних функцій $u_0(y)$ і $v_0(x)$, потрібно підпорядкувати отриманий розв’язок деяким додатковим умовам відповідно до фізичного змісту задачі. Наприклад, у двовимірній теорії пружності доцільно вибрати $u_0(y)$ та $v_0(x)$ так, щоб поля переміщень u_x і u_y , визначені за знайденим розв’язком $\Phi(x, y)$, не викликали переміщень тіла як абсолютно жорсткого [8].

Зазначимо, що при виконанні обмежень (8) умови (11) еквівалентні (7), причому функції їх правих частин пов’язані співвідношеннями

$$\sigma(y) = \frac{d^2 m(y)}{dy^2}, \quad \tau(y) = \frac{dt(y)}{dy}.$$

Множину розв’язків задачі для півбезмежної області $\mathcal{D}(x, y)$ подамо у вигляді

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (C_k^{(1)} \Phi_k^{(1)} + C_k^{(2)} \Phi_k^{(2)}), \quad (17)$$

де $\Phi_k^{(1)} = \Phi_k$, $\Phi_k^{(2)} = \bar{\Phi}_k$, $C_k^{(1)} = C_k$, $C_k^{(2)} = \bar{C}_k$; C_k – невизначені комплексні сталі.

Легко переконатися, що введена формулою (17) дійсна функція $\Phi(x, y)$ задовольняє рівняння (1), умови (2) і (15) за набору комплексних коефіцієнтів C_1, C_2, \dots , для яких ряд (17) збігається. Отже, якщо вибрати коефіцієнти C_1, C_2, \dots так, щоб підпорядкувати функцію $\Phi(x, y)$ одній із пар умов (11)–(14), заданих на торці півсмуги, то отримаємо розв’язок відповідної крайової задачі для півбезмежної прямокутної області $\mathcal{D}(x, y)$.

Згідно з розробленим у [8] варіаційним підходом для кожної з умов (11)–(14) запишемо відповідний квадратичний функціонал

$$F_I = \int_{-1}^1 \left((\sigma_{xx}|_{x=0} - \sigma(y))^2 + (\sigma_{xy}|_{x=0} - \tau(y))^2 \right) dy, \quad (18)$$

$$F_{II} = \int_{-1}^1 \left((u_x|_{x=0} - u(y))^2 + (u_y|_{x=0} - v(y))^2 \right) dy, \quad (19)$$

$$F_{III} = \int_{-1}^1 \left((\sigma_{xx}|_{x=0} - \sigma(y))^2 + (u_y|_{x=0} - v(y))^2 \right) dy, \quad (20)$$

$$F_{IV} = \int_{-1}^1 \left((\sigma_{xy}|_{x=0} - \tau(y))^2 + (u_x|_{x=0} - u(y))^2 \right) dy. \quad (21)$$

Підставляючи в формули (18)–(21) вирази (16) для σ_{xx} , σ_{xy} , u_x , u_y з урахуванням подання (17) для шуканого розв'язку та застосовуючи до отриманої квадратичної форми стосовно параметрів $C_1^{(1)}, C_2^{(1)}, \dots, C_1^{(2)}, C_2^{(2)}, \dots$ необхідні умови мінімуму квадратичної форми, отримуємо такого вигляду нескінченні СЛАР для кожного з функціоналів (18)–(21):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^2 M_{mk}^{(\lambda, \mu)} C_k^{(\mu)} = K_m^{(\lambda)}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (22)$$

Коефіцієнти $M_{mk}^{(\lambda, \mu)}$, $\lambda, \mu = 1, 2$, системи (22) є комплексними числами, які визначаються через корені трансцендентних рівнянь (4) і залежать від вигляду граничних умов (11)–(14), а вільні члени $K_m^{(\lambda)}$ – ще й від функцій у правих частинах цих умов. Враховуючи формули (5), відповідні вирази для $M_{mk}^{(\lambda, \mu)}$ неважко обчислити. Так, для функціонала (18), який відповідає умовам на торці вигляду (11), матимемо

– для випадку симетрії:

$$M_{mk}^{(\lambda, \mu)} = \frac{4(\gamma_k^{(\mu)})^3 (\gamma_m^{(\lambda)})^3 \left((\gamma_k^{(\mu)})^2 \cos^2 \gamma_m^{(\lambda)} - (\gamma_m^{(\lambda)})^2 \cos^2 \gamma_k^{(\mu)} \right)}{(\gamma_k^{(\mu)} + \gamma_m^{(\lambda)}) (\gamma_k^{(\mu)} - \gamma_m^{(\lambda)})^3 \cos \gamma_k^{(\mu)} \cos \gamma_m^{(\lambda)}},$$

$$M_{mm}^{(\lambda, \lambda)} = \frac{2}{3} (\gamma_m^{(\lambda)})^4 \left(3 \cos^2 \gamma_m^{(\lambda)} - (\gamma_m^{(\lambda)})^2 \right),$$

– для випадку антисиметрії:

$$M_{mk}^{(\lambda, \mu)} = \frac{4(\gamma_k^{(\mu)})^3 (\gamma_m^{(\lambda)})^3 \left((\gamma_k^{(\mu)})^2 \sin^2 \gamma_m^{(\lambda)} - (\gamma_m^{(\lambda)})^2 \sin^2 \gamma_k^{(\mu)} \right)}{(\gamma_k^{(\mu)} + \gamma_m^{(\lambda)}) (\gamma_k^{(\mu)} - \gamma_m^{(\lambda)})^3 \sin \gamma_k^{(\mu)} \sin \gamma_m^{(\lambda)}},$$

$$M_{mm}^{(\lambda, \lambda)} = \frac{2}{3} (\gamma_m^{(\lambda)})^4 \left(3 \sin^2 \gamma_m^{(\lambda)} - (\gamma_m^{(\lambda)})^2 \right),$$

а вільні члени системи (22) визначаємо як

$$K_m^{(\lambda)} = \int_{-1}^1 \left(\sigma(y) (F_m^{(\lambda)})'' + \tau(y) (\gamma_m^{(\lambda)} F_m^{(\lambda)})' \right) dy.$$

Тут використано позначення $\gamma_k^{(1)} = \gamma_k$, $\gamma_k^{(2)} = \bar{\gamma}_k$, $F_k^{(1)} = F_k(y)$, $F_k^{(2)} = \bar{F}_k(y)$.

Для функціонала (19), який відповідає умовам (12), отримуємо такі вирази для $M_{mk}^{(\lambda, \mu)}$ і $K_m^{(\lambda)}$ системи рівнянь (22):

– для випадку симетрії:

$$\begin{aligned}
M_{mk}^{(\lambda\mu)} &= \frac{4(1+\nu)\gamma_k^{(\mu)}\gamma_m^{(\lambda)}\left((\gamma_k^{(\mu)})^2\cos^2\gamma_m^{(\lambda)} - (\gamma_m^{(\lambda)})^2\cos^2\gamma_k^{(\mu)}\right)}{(\gamma_k^{(\mu)} + \gamma_m^{(\lambda)})(\gamma_k^{(\mu)} - \gamma_m^{(\lambda)})^3\cos\gamma_k^{(\mu)}\cos\gamma_m^{(\lambda)}} \left[(1+\nu)\gamma_k^{(\mu)}\gamma_m^{(\lambda)} + \right. \\
&\quad \left. + (\gamma_k^{(\mu)} - \gamma_m^{(\lambda)})^2 \right] + 4\gamma_k^{(\mu)}\gamma_m^{(\lambda)}\frac{\sin(\gamma_k^{(\mu)} - \gamma_m^{(\lambda)})}{\gamma_k^{(\mu)} - \gamma_m^{(\lambda)}} - 4\nu^2\sin\gamma_k^{(\mu)}\sin\gamma_m^{(\lambda)}, \\
M_{mm}^{(\lambda\lambda)} &= \frac{2}{3}(\gamma_m^{(\lambda)})^2\left(- (1+\nu)^2(\gamma_m^{(\lambda)})^2 + 6\right) - 4\nu^2\sin^2\gamma_m^{(\lambda)}, \\
K_m^{(\lambda)} &= \int_{-1}^1 [u(y)u_m^{(\lambda)} + v(y)v_m^{(\lambda)}] dy - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 u(y) dy \int_{-1}^1 u_m^{(\lambda)} dy, \tag{23}
\end{aligned}$$

– для випадку антисиметрії:

$$\begin{aligned}
M_{mk}^{(\lambda\mu)} &= \frac{4(1+\nu)\gamma_k^{(\mu)}\gamma_m^{(\lambda)}\left((\gamma_k^{(\mu)})^2\sin^2\gamma_m^{(\lambda)} - (\gamma_m^{(\lambda)})^2\sin^2\gamma_k^{(\mu)}\right)}{(\gamma_k^{(\mu)} + \gamma_m^{(\lambda)})(\gamma_k^{(\mu)} - \gamma_m^{(\lambda)})^3\sin\gamma_k^{(\mu)}\sin\gamma_m^{(\lambda)}} \left[(1+\nu)\gamma_k^{(\mu)}\gamma_m^{(\lambda)} + \right. \\
&\quad \left. + (\gamma_k^{(\mu)} - \gamma_m^{(\lambda)})^2 \right] + 4\left(\frac{\gamma_k^{(\mu)}\gamma_m^{(\lambda)}\sin(\gamma_k^{(\mu)} - \gamma_m^{(\lambda)})}{\gamma_k^{(\mu)} - \gamma_m^{(\lambda)}} - \right. \\
&\quad \left. - \sin\gamma_k^{(\mu)}\sin\gamma_m^{(\lambda)} - \frac{3\nu^2\sin^3\gamma_k^{(\mu)}\sin^3\gamma_m^{(\lambda)}}{\gamma_k^{(\mu)}\gamma_m^{(\lambda)}} \right), \\
M_{mm}^{(\lambda\lambda)} &= \frac{2}{3}(\gamma_m^{(\lambda)})^2\left(6 - (1+\nu)^2(\gamma_m^{(\lambda)})^2\right) - 4\sin^2\gamma_m^{(\lambda)} - \frac{12\nu^2\sin^6\gamma_m^{(\lambda)}}{(\gamma_m^{(\lambda)})^2}, \\
K_m^{(\lambda)} &= \int_{-1}^1 (u(y)u_m^{(\lambda)} + v(y)v_m^{(\lambda)}) dy - \frac{3}{2} \int_{-1}^1 yu(y) dy \int_{-1}^1 yu_m^{(\lambda)} dy - \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 v(y) dy \int_{-1}^1 v_m^{(\lambda)} dy. \tag{24}
\end{aligned}$$

У формулах (23), (24) використано позначення: $u_k^{(1)} = u_k$, $u_k^{(2)} = \bar{u}_k$, $v_k^{(1)} = v_k$, $v_k^{(2)} = \bar{v}_k$, де y випадку симетрії

$$u_k = \gamma_k(1+\nu)F_k(y) - 2\gamma_k\cos(\gamma_k y), \quad v_k = -(1+\nu)F_k'(y) + 2\gamma_k\sin(\gamma_k y),$$

а для антисиметрії

$$u_k = \gamma_k(1+\nu)F_k(y) + 2\gamma_k\sin(\gamma_k y), \quad v_k = -(1+\nu)F_k'(y) + 2\gamma_k\cos(\gamma_k y).$$

Отримані аналогічні формули для задач (1), (13) та (1), (14), яким відповідають функціонали (20) і (21), не наводимо.

3. Скінченна область. Розглянемо клас бігармонічних задач для скінченної області $\mathcal{D}(x, y) = (-a < x < a) \cup (-1 < y < 1)$, на сторонах $y = \pm 1$ якої діють умови (2), а на кожній зі сторін $x = a$ та $x = -a$ виконуються одна з пар умов вигляду (11)–(14) у різних комбінаціях. Беручи до уваги інваріантність стосовно перетворення $x \rightarrow -x$, отримуємо десять незалежних крайових задач такого типу. Розглянемо дві з них: перша – на обох сторонах $x = \pm a$ діють умови вигляду (11):

$$\sigma_{xx}|_{x=\pm a} = \sigma^\pm(y), \quad \sigma_{xy}|_{x=\pm a} = \tau^\pm(y), \tag{25}$$

і друга – на одній із сторін діє умова вигляду (12), а на іншій вигляду (13):

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx}|_{x=a} &= \sigma(y), & \sigma_{xy}|_{x=a} &= \tau(y), \\
u_x|_{x=-a} &= u(y), & u_y|_{x=-a} &= v(y). \tag{26}
\end{aligned}$$

Як і у випадку півбезмежної області, для розв'язування цих задач застосуємо розвинення шуканого розв'язку за системами однорідних розв'язків. Однак, щоб задовольнити умови на сторонах $x = \pm a$, замість системи (3) використаємо дві незалежні системи комплексних бігармонічних функцій $\exp(-\gamma_k(x+a))F_k(y)$ та $\exp(\gamma_k(x-a))F_k(y)$, які відповідають послідовностям коренів γ_k та $-\gamma_k$ трансцендентних рівнянь (4). Відповідно до цього подамо шуканий розв'язок у вигляді

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^2 [C_k^{(\mu)} \exp(-\gamma_k^{(\mu)}(x+a)) + D_k^{(\mu)} \exp(\gamma_k^{(\mu)}(x-a))] F_k^{(\mu)}. \quad (27)$$

Тут $C_k^{(1)} = C_k$, $C_k^{(2)} = \bar{C}_k$, $D_k^{(1)} = D_k$, $D_k^{(2)} = \bar{D}_k$, де C_k , D_k – невизначені комплексні сталі.

Оскільки означена формулою (27) дійсна функція $\Phi(x, y)$ є бігармонічною в області $\mathcal{D}(x, y)$ і задовольняє умови (2) при значеннях коефіцієнтів C_k , D_k , для яких ряд у формулі (27) збігається, то для отримання розв'язків задач (1), (2), (25) або (1), (2), (26) слід вибрати коефіцієнти C_k , D_k так, щоб функція $\Phi(x, y)$ задовольняла умови (25) або (26) відповідно.

Для визначення коефіцієнтів розвинення C_k , D_k для задач (1), (2), (25) та (1), (2), (26) використаємо такі квадратичні функціонали:

$$F_V = \int_{-1}^1 \left((\sigma_{xx}|_{x=a} - \sigma^+(y))^2 + (\sigma_{xy}|_{x=a} - \tau^+(y))^2 + (\sigma_{xx}|_{x=-a} - \sigma^-(y))^2 + (\sigma_{xy}|_{x=-a} - \tau^-(y))^2 \right) dy, \quad (28)$$

$$F_{VI} = \int_{-1}^1 \left((\sigma_{xx}|_{x=a} - \sigma(y))^2 + (\sigma_{xy}|_{x=a} - \tau(y))^2 + (u_x|_{x=-a} - u(y))^2 + (u_y|_{x=-a} - v(y))^2 \right) dy, \quad (29)$$

які визначають за квадратичною нормою L_2 відхилення розв'язку від умов (25) та (26), заданих на межі $x = \pm a$. Підставляючи подання (16) для σ_{xx} , σ_{xy} , u_x , u_y у функціонали (28), (29) з урахуванням виразу (27) для функції $\Phi(x, y)$ і використовуючи необхідні умови мінімуму квадратичного функціонала, отримуємо такі нескінченні СЛАР стосовно двох послідовностей комплексних сталих $C_1, C_2, \dots, D_1, D_2, \dots$ для кожного з функціоналів:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^2 (M_{mk}^{(\lambda, \mu)} C_k^{(\mu)} + N_{mk}^{(\lambda, \mu)} D_k^{(\mu)}) &= K_m^{(\lambda)}, \\ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^2 (O_{mk}^{(\lambda, \mu)} C_k^{(\mu)} + P_{mk}^{(\lambda, \mu)} D_k^{(\mu)}) &= L_m^{(\lambda)}, \quad m = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (30)$$

Коефіцієнти системи (30) можна виразити через корені трансцендентних рівнянь (4). Наведемо відповідні вирази лише для симетричних задач.

Для випадку функціонала (28) коефіцієнти $M_{mk}^{(\lambda, \mu)}$ та $N_{mk}^{(\lambda, \mu)}$ визначаються за формулами

$$M_{mk}^{(\lambda, \mu)} = [\exp(-2a(\gamma_k^{(\mu)} + \gamma_m^{(\lambda)})) + \frac{4(\gamma_k^{(\mu)})^3 (\gamma_m^{(\lambda)})^3 \left((\gamma_k^{(\mu)})^2 \cos^2 \gamma_m^{(\lambda)} - (\gamma_m^{(\lambda)})^2 \cos^2 \gamma_k^{(\mu)} \right)}{(\gamma_k^{(\mu)} - \gamma_m^{(\lambda)})^3 (\gamma_k^{(\mu)} + \gamma_m^{(\lambda)}) \cos \gamma_k^{(\mu)} \cos \gamma_m^{(\lambda)}}] + 1,$$

$$M_{mm}^{(\lambda\lambda)} = \frac{2}{3}(\gamma_m^{(\lambda)})^4 [\exp(-4a\gamma_m^{(\lambda)}) + 1] \left(3 \cos^2 \gamma_m^{(\lambda)} - (\gamma_m^{(\lambda)})^2 \right),$$

$$N_{mk}^{(\lambda,\mu)} = [\exp(-2a\gamma_k^{(\mu)}) + \exp(-2a\gamma_m^{(\lambda)})] \frac{-4(\gamma_k^{(\mu)})^3 (\gamma_m^{(\lambda)})^3 \left((\gamma_k^{(\mu)})^2 \cos^2 \gamma_m^{(\lambda)} - (\gamma_m^{(\lambda)})^2 \cos^2 \gamma_k^{(\mu)} \right)}{(\gamma_k^{(\mu)} - \gamma_m^{(\lambda)}) (\gamma_k^{(\mu)} + \gamma_m^{(\lambda)})^3 \cos \gamma_k^{(\mu)} \cos \gamma_m^{(\lambda)}},$$

$$N_{mm}^{(\lambda\lambda)} = 2(\gamma_m^{(\lambda)})^4 \exp(-2a\gamma_m^{(\lambda)}) \cos^2 \gamma_m^{(\lambda)}.$$

Решту коефіцієнтів системи (30) можна визначити зі співвідношень

$$M_{mk}^{(\lambda\mu)} = P_{mk}^{(\lambda\mu)}, \quad N_{mk}^{(\lambda\mu)} = O_{mk}^{(\lambda\mu)}, \quad M_{mm}^{(\lambda\lambda)} = P_{mm}^{(\lambda\lambda)}, \quad N_{mm}^{(\lambda\lambda)} = O_{mm}^{(\lambda\lambda)}.$$

Для вільних членів системи (30) у цьому випадку маємо такі вирази:

$$K_m^{(\lambda)} = \int_{-1}^1 \left([\exp(-2a\gamma_m^{(\lambda)}) \sigma^+(y) + \sigma^-(y)] (F_m^{(\lambda)})'' + [\exp(-2a\gamma_m^{(\lambda)}) \tau^+(y) + \tau^-(y)] \gamma_m^{(\lambda)} (F_m^{(\lambda)})' \right) dy,$$

$$L_m^{(\lambda)} = \int_{-1}^1 \left([\sigma^+(y) + \exp(-2a\gamma_m^{(\lambda)}) \sigma^-(y)] (F_m^{(\lambda)})'' - [\tau^+(y) + \exp(-2a\gamma_m^{(\lambda)}) \tau^-(y)] \gamma_m^{(\lambda)} (F_m^{(\lambda)})' \right) dy.$$

Для випадку функціонала (29) справджується співвідношення $O_{mk}^{(\lambda\mu)} = N_{km}^{(\lambda\mu)}$, що дозволяє виразити всі коефіцієнти та вільні члени системи (30) через корені трансцендентного рівняння (4):

$$M_{mk}^{(\lambda\mu)} = \frac{4\gamma_k^{(\mu)} \gamma_m^{(\lambda)} \left((\gamma_k^{(\mu)})^2 \cos^2 \gamma_m^{(\lambda)} - (\gamma_m^{(\lambda)})^2 \cos^2 \gamma_k^{(\mu)} \right)}{(\gamma_k^{(\mu)} + \gamma_m^{(\lambda)}) (\gamma_k^{(\mu)} - \gamma_m^{(\lambda)})^3 \cos \gamma_k^{(\mu)} \cos \gamma_m^{(\lambda)}} \times$$

$$\times \left((1+\nu) [(1+\nu) \gamma_k^{(\mu)} \gamma_m^{(\lambda)} + (\gamma_k^{(\mu)} - \gamma_m^{(\lambda)})^2] + \exp[-2a(\gamma_k^{(\mu)} + \gamma_m^{(\lambda)})] (\gamma_k^{(\mu)})^2 (\gamma_m^{(\lambda)})^2 \right) +$$

$$+ \frac{4\gamma_k^{(\mu)} \gamma_m^{(\lambda)} \sin(\gamma_k^{(\mu)} - \gamma_m^{(\lambda)})}{\gamma_k^{(\mu)} - \gamma_m^{(\lambda)}} - \frac{4\gamma_k^{(\mu)} \gamma_m^{(\lambda)} \nu^2}{\cos \gamma_k^{(\mu)} \cos \gamma_m^{(\lambda)}},$$

$$M_{mm}^{(\lambda\lambda)} = \frac{2}{3} (\gamma_m^{(\lambda)})^4 \exp(-4a\gamma_m^{(\lambda)}) [3 \cos^2 \gamma_m^{(\lambda)} - (\gamma_m^{(\lambda)})^2] +$$

$$+ 2(\gamma_m^{(\lambda)})^2 \left(\frac{1}{3} [6 - (1+\nu)^2 (\gamma_m^{(\lambda)})^2] - \frac{2\nu^2}{\cos^2 \gamma_m^{(\lambda)}} \right), \quad (31)$$

$$N_{mk}^{(\lambda\mu)} = \frac{4\gamma_k^{(\mu)} \gamma_m^{(\lambda)} \left((\gamma_k^{(\mu)})^2 \cos^2 \gamma_m^{(\lambda)} - (\gamma_m^{(\lambda)})^2 \cos^2 \gamma_k^{(\mu)} \right)}{(\gamma_k^{(\mu)} + \gamma_m^{(\lambda)})^3 (\gamma_k^{(\mu)} - \gamma_m^{(\lambda)})^3 \cos \gamma_k^{(\mu)} \cos \gamma_m^{(\lambda)}} \times$$

$$\times \left((1+\nu) \exp(-2a\gamma_k^{(\mu)}) (\gamma_k^{(\mu)} + \gamma_m^{(\lambda)})^2 [(1+\nu) \gamma_k^{(\mu)} \gamma_m^{(\lambda)} + (\gamma_k^{(\mu)} - \gamma_m^{(\lambda)})^2] - \exp(-2a\gamma_m^{(\lambda)}) (\gamma_k^{(\mu)})^2 (\gamma_m^{(\lambda)})^2 (\gamma_k^{(\mu)} - \gamma_m^{(\lambda)})^2 \right) +$$

$$+ 4\gamma_k^{(\mu)} \gamma_m^{(\lambda)} \exp(-2a\gamma_k^{(\mu)}) \left(\frac{\sin(\gamma_k^{(\mu)} - \gamma_m^{(\lambda)})}{\gamma_k^{(\mu)} - \gamma_m^{(\lambda)}} - \frac{\nu^2}{\cos \gamma_k^{(\mu)} \cos \gamma_m^{(\lambda)}} \right),$$

$$N_{mm}^{(\lambda\lambda)} = (\gamma_m^{(\lambda)})^2 \exp(-2a\gamma_m^{(\lambda)}) \left((\gamma_m^{(\lambda)})^2 \cos^2 \gamma_m^{(\lambda)} + \frac{2}{3} [6 - (1 + \nu)^2 (\gamma_m^{(\lambda)})^2] - \frac{4\nu^2}{\cos^2 \gamma_m^{(\lambda)}} \right), \quad (32)$$

$$P_{mk}^{(\lambda\mu)} = \frac{4\gamma_k^{(\mu)}\gamma_m^{(\lambda)} \left((\gamma_k^{(\mu)})^2 \cos^2 \gamma_m^{(\lambda)} - (\gamma_m^{(\lambda)})^2 \cos^2 \gamma_k^{(\mu)} \right)}{(\gamma_k^{(\mu)} + \gamma_m^{(\lambda)})(\gamma_k^{(\mu)} - \gamma_m^{(\lambda)})^3 \cos \gamma_k^{(\mu)} \cos \gamma_m^{(\lambda)}} \times \\ \times \left((1 + \nu) \exp[-2a(\gamma_k^{(\mu)} + \gamma_m^{(\lambda)})] [(1 + \nu)\gamma_k^{(\mu)}\gamma_m^{(\lambda)} + (\gamma_k^{(\mu)} - \gamma_m^{(\lambda)})^2] + (\gamma_k^{(\mu)})^2 (\gamma_m^{(\lambda)})^2 \right) + 4\gamma_k^{(\mu)}\gamma_m^{(\lambda)} \exp[-2a(\gamma_k^{(\mu)} + \gamma_m^{(\lambda)})] \left(\frac{\sin(\gamma_k^{(\mu)} - \gamma_m^{(\lambda)})}{\gamma_k^{(\mu)} - \gamma_m^{(\lambda)}} - \frac{\nu^2}{\cos \gamma_k^{(\mu)} \cos \gamma_m^{(\lambda)}} \right), \\ P_{mm}^{(\lambda\lambda)} = \frac{2}{3} (\gamma_m^{(\lambda)})^4 [3 \cos^2 \gamma_m^{(\lambda)} - (\gamma_m^{(\lambda)})^2] + 2(\gamma_m^{(\lambda)})^2 \exp(-4a\gamma_m^{(\lambda)}) \left(\frac{1}{3} [6 - (1 + \nu)^2 (\gamma_m^{(\lambda)})^2] - \frac{2\nu^2}{\cos^2 \gamma_m^{(\lambda)}} \right), \quad (33)$$

$$K_m^{(\lambda)} = \int_{-1}^1 \left(\exp(-2a\gamma_m^{(\lambda)}) [\sigma(y)(F_m^{(\lambda)})'' + \gamma_m^{(\lambda)} \tau(y)(F_m^{(\lambda)})'] + u(y)u_m^{(\lambda)} + v(y)v_m^{(\lambda)} \right) dy - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 u(y) dy \int_{-1}^1 u_m^{(\lambda)} dy, \\ L_m^{(\lambda)} = \int_{-1}^1 \left(\sigma(y)(F_m^{(\lambda)})'' - \gamma_m^{(\lambda)} \tau(y)(F_m^{(\lambda)})' + \exp(-2a\gamma_m^{(\lambda)}) [u(y)u_m^{(\lambda)} + v(y)v_m^{(\lambda)}] \right) dy - \frac{1}{2} \exp(-2a\gamma_m^{(\lambda)}) \int_{-1}^1 u(y) dy \int_{-1}^1 u_m^{(\lambda)} dy. \quad (34)$$

4. Приклад. Числове дослідження низки задач для півбезмежної області за методом, що базується на поданні розв'язку у вигляді (6), проведено у статті [8]. Застосування до цих задач розробленого тут методу, в якому використано подання (17), приводить до ідентичних числових результатів. Тому наведемо приклад застосування цього методу для скінченної області.

Розглянемо задачу визначення двовимірного напружено-деформованого стану тіла прямокутної форми, до сторони $x = a$ якого прикладені розподілені нормальні сили, сторона $x = -a$ жорстко закріплена, а бічні сторони $y = \pm 1$ вільні від навантажень. Ця задача виникає, зокрема, при дослідженні міцності на відрив клеєвого з'єднання.

Нехай $n(y)$ – безрозмірна (віднесена до модуля Юнга матеріалу) поверхнева густина прикладених зовнішніх нормальних до поверхні $x = a$ сил. Розв'язок цієї лінійної задачі шукатимемо у вигляді суми складових

$$\boldsymbol{\sigma}^0 = \left(\sigma_{xx}^0 = \frac{N}{2}, \sigma_{yy}^0 = 0, \sigma_{xy}^0 = 0 \right), \quad \text{де } N = \int_{-1}^1 n(y) dy,$$

та

$$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}),$$

функція напружень $\Phi(x, y)$ якої задовольняє рівняння (1) та умови (2), (26), в яких

$$\sigma(y) = n(y) - \frac{N}{2}, \quad \tau(y) = 0, \quad u(y) = 0, \quad v(y) = \nu(1 - \nu) \frac{N}{2} y.$$

Для знаходження функції $\Phi(x, y)$ систему (30), коефіцієнти та вільні члени якої для $\sigma(y) = \sigma_0 \left(\frac{3}{2}y^2 - \frac{1}{2} \right)$ при $\sigma_0 = 0.005$ обчислювали за формулами (31)–(34), розв'язували методом редукції, утримуючи в нескінченних сумах по 20 членів. Тоді за формулами (16) обчислювали розподіли компонент напружень і переміщень в області $D(x, y)$. Середньоквадратичні абсолютна та відносна похибки, обчислені за значенням функціонала (29), не перевищували 10^{-5} та $2 \cdot 10^{-3}$ відповідно.

На рис. 1 як приклад показано розподіли безрозмірних (віднесених до модуля Юнга) дотичних напружень в околі поверхні закріплення $x = -a$ для розмірів області в поздовжньому напрямі $a = 1.0, 0.5, 0.25$.

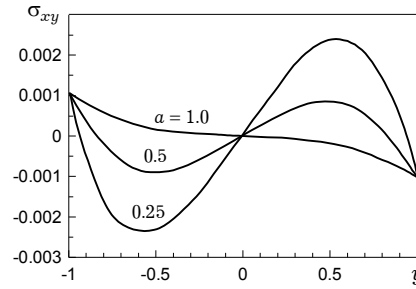


Рис. 1

Із проведеного числового аналізу задачі випливає, зокрема, що зі зменшенням відношення ширини прямокутника до його висоти спостерігається істотне відхилення напруженого стану від одновісного σ^0 . Крім того, абсолютні значення дотичних напружень у точках максимуму та мінімуму зростають, а координати цих екстремальних точок зміщуються у напрямках до кутових точок $x = -a$, $y = \pm 1$. Прийняті в задачі крайові умови не відповідають у цих точках вимогам коректності [7, с. 398–400], внаслідок чого компоненти напружень σ_{xx} в них стають сингулярними. Зрозуміло, що розв'язування нескінченної системи (30) методом редукції завжди даватиме скінченні значення напружень в цих кутових точках. Проте характер їхньої зміни в їх околах якісно й кількісно відповідає відомим теоретичним уявленням і результатам експериментальних досліджень щодо поведінки напружень у кутових точках [9].

5. Висновки. Таким чином, варіаційний метод дозволяє розв'язувати бігармомічні задачі для прямокутника, на двох протилежних сторонах якого задано однорідні умови для функції і її нормальної похідної, а на іншій парі сторін діють неоднорідні умови. Метод легко узагальнити на випадок задачі, в якій на межі прямокутної області задана функція та її нормальна похідна або нормальна та дотична компоненти напружень.

Завдяки отриманим аналітичним виразам для коефіцієнтів систем рівнянь (22) і (30) вдається істотно знизити затрати машинного часу на розв'язування відповідних задач.

Реалізація цього варіаційного підходу приводить до нескінченних СЛАР (22), (30), які відмінні від системи, що виникає при реалізації відомого методу перехресної суперпозиції [2]. Тому проблема встановлення властивостей функцій у правих частинах крайових умов вигляду (11)–(14), при яких розв'язки нескінченних СЛАР (22), (30) існують і єдині, ще вимагає свого розв'язання. Проведені з використанням методу редукції числові експерименти показали, що зі збільшенням числа доданків часткових сум рядів (17), (27) точність задоволення крайових умов покращується, що свідчить про збіжність розв'язків, отриманих цим методом, принаймні для тих класів функцій крайових умов, для яких здійснювали числовий аналіз.

1. Гринберг Г. А. О методе, предложенном П. Ф. Папковичем для решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной области и задачи изгиба прямоугольной тонкой плиты с двумя закрепленными кромками, и о некоторых его обобщениях // Прикл. математика и механика. – 1953. – 17, № 2. – С. 211–228.

2. Мелешко В. В. Бигармоническая задача для прямоугольника: история и современность // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – 47, № 3. – С. 45–68.
3. Мелешко В. В., ван Хейст Г. Я. Ф. Змішування в'язкої рідини у прямокутній порожнині // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – 49, № 1. – С. 43–52.
4. Постолакі Л. І., Чекурін В. Ф. Властивості однієї системи однорідних розв'язків бігармонічного рівняння // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2007. – Вип. 5. – С. 156–162.
5. Прокопов В. К. О соотношении обобщенной ортогональности П. Ф. Папковича для прямоугольной пластины // Прикл. математика и механика. – 1964. – 29, № 2. – С. 351–355.
6. Тимошенко С. П. Курс теории упругости. – Киев: Наук. думка, 1972. – 507 с.
7. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. – Москва: Наука, 1972. – 735 с.
8. Чекурин В. Ф. Вариационный метод решения прямых и обратных задач теории упругости для полубесконечной полосы // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1999. – № 2. – С. 58–70.
9. Чекурін В. Ф., Похмурська Г. В. Поле залишкових напружень у покриві з тріщиною // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2006. – 42, № 2. – С. 80–88.
10. Lurie S. A., Vasiliev V. V. The biharmonic problem of the theory of elasticity. – London: Gordon and Breach Publ., 1995. – 265 p.

ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ БИГАРМОНИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

Развит вариационный метод решения бигармонических задач для прямоугольной области, на одной паре противоположных сторон которой функция и ее нормальная производная имеют нулевые значения, а на другой действуют неоднородные условия. Рассмотрены случаи полубесконечной и конечной области. Метод базируется на минимизации квадратичного функционала, определяющего по норме L_2 отклонение искомого решения от заданных неоднородных условий. Для решения этой вариационной задачи применено несколько отличное от предложенного ранее [8] разложение в ряд по системам комплексных бигармонических функций – так называемым однородным решениям П. Ф. Папковича, которые тождественно удовлетворяют заданные однородные условия на паре противоположных сторон прямоугольника. Рассмотрено несколько вариантов неоднородных граничных условий, которые возникают в задачах двумерной теории упругости. Приведен пример применения разработанного метода для определения распределенной компонент напряжений в прямоугольной области, одна из сторон которой жестко закреплена, а к противоположной стороне приложены нормальные силы.

VARIATIONAL METHOD FOR SOLVING BIHARMONIC PROBLEMS FOR RECTANGULAR AREA

A variational method for solving biharmonic problems for a rectangular area, on one pair of opposite sides of which the function and its normal derivative obtain zero values and on another pair some inhomogeneous conditions are valid, has been considered in the paper. The cases of semi-infinite and finite area have been considered. The method is based on minimization of a quadratic functional determining in the L_2 norm the solution declination from the given inhomogeneous boundary conditions. To solve this variational problem a series expansion of the solution by the systems of complex biharmonic functions, known as Papkovich homogeneous solutions, has been applied. Each of these functions identically satisfies the given homogeneous boundary conditions on the pair of rectangular sides. The used solution representation is different from the formerly known one [8]. A series of boundary conditions, applied in problems of 2-D theory of elasticity, have been considered. Application of the developed method to determine the stress components distributions in the rectangular area, a side of which is rigidly clamped and to the opposite one the normal forces are applied, has been exemplified in the paper.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
06.03.08