

ВПЛИВ ЗСУВНИХ ЗУСИЛЬ НА НАПРУЖЕНИЙ СТАН ПІВПРОСТОРУ З ТРІЩИНОЮ

Методом граничних інтегральних рівнянь досліджено напружений стан в околі перпендикулярної до межі півпростору плоскої тріщини, на поверхнях якої діють зсувні зусилля. Задачу зведено до двовимірних гіперсингулярних інтегральних рівнянь, у явному вигляді записано їх регулярні ядра, які враховують взаємодію тріщини з межею півпростору. Наведено залежності коефіцієнтів інтенсивності напружень від кутової координати при різних навантаженнях тріщини.

Метод розв'язування тривимірних задач теорії пружності для безмежного тіла та півпростору з довільно розташованими тріщинами викладено в монографії [5]. У працях [2–4, 6, 7, 11] досліджено напружений стан в околі перпендикулярної до межі півпростору плоскої кругової або еліптичної тріщини, навантаженої нормальними зусиллями. Напруження в безмежному тілі з плоскими неоднорозв'язними тріщинами, які знаходяться у полі зсувних зусиль, визначено в [10]. Нижче з урахуванням результатів [5], методом граничних інтегральних рівнянь з використанням теорії потенціалів визначаються напруження в околі плоскої тріщини у півпросторі, зумовлені заданими на ній зсувними зусиллями. Для цього задачу зведено до сингулярних інтегральних рівнянь і отримано в явному вигляді вирази для їх регулярних ядер, які враховують вплив межі півпростору на напружений стан в околі перпендикулярної до неї плоскої тріщини. Інтегральні рівняння розв'язано аналітично-числовим методом.

Нехай у пружному півпросторі знаходиться плоска перпендикулярна до його межі тріщина (рис. 1), на поверхнях якої задані спрямовані в різні сторони зсувні зусилля.

Виберемо базисну декартову систему координат $Ox_{10}x_{20}x_{30}$ (площина $x_{10}Ox_{20}$ зливається з межею півпростору $x_{30} \leq 0$) і локальну систему координат $O_1x_{11}x_{21}x_{31}$ таким чином, що протилежним поверхням S^\pm тріщини відповідають значення $x_{31} = \pm 0$. Напрямні косинуси вектора \mathbf{d}_{01} , що

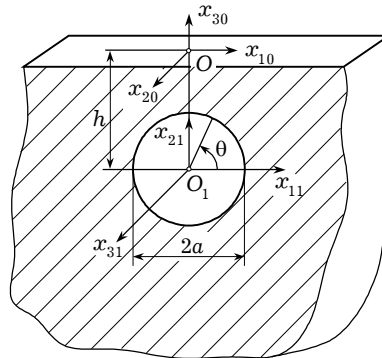


Рис. 1

Таблиця 1

	x_{11}	x_{21}	x_{31}
x_{10}	l_{101}	l_{201}	l_{301}
x_{20}	m_{101}	m_{201}	m_{301}
x_{30}	n_{101}	n_{201}	n_{301}

Таблиця 2

	x_{10}	x_{20}	x_{30}
x_{11}	l_{110}	l_{210}	l_{310}
x_{21}	m_{110}	m_{210}	m_{310}
x_{31}	n_{101}	n_{210}	n_{310}

з'єднує точки O та O_1 , в базисній системі координат позначимо через e_{j01} , а напрямні косинуси вектора \mathbf{d}_{10} в локальній системі координат позначимо через e_{j10} , $j = 1, 2, 3$.

Напрямні косинуси координатних осей задаємо табл. 1 і 2.

Тоді між координатами x_{j1} та x_{j0} однієї і тієї ж точки має місце залежність

$$x_{j10}^* = e_{j10}d_{10} + \ell_{j01}x_{10} + m_{j01}x_{20} + n_{j01}x_{30}, \quad j = 1, 2, 3.$$

Щоб задовольнити граничні умови на межі півпростору та на поверхнях тріщини, розв'язок задачі подамо у вигляді

$$u_j(x_0) = u_{j0}(x_0) + u_{11}(x_{10}^*)\ell_{j10} + u_{21}(x_{10}^*)m_{j10} + u_{31}(x_{10}^*)n_{j10},$$

де $u_j(x_0)$ – компоненти переміщень вздовж осей Ox_{j0} ; $u_{j0}(x_0)$ – компоненти переміщень вздовж осей Ox_{j0} , викликані довільними заданими на межі півпростору зусиллями; $u_{j1}(x_{10}^*)$ – компоненти переміщень уздовж осей O_1x_{j1} , зумовлені зміщенням протилежних точок поверхонь тріщини в процесі деформації півпростору:

$$x_{j01}^* = e_{j01}d_{01} + \sum_{j=1}^3 \ell_{j01}x_{j1}, \quad x_{j02}^* = e_{j01}d_{01} + \sum_{j=1}^3 m_{j01}x_{j1},$$

$$x_{j03}^* = e_{j01}d_{01} + \sum_{j=1}^3 n_{j01}x_{j1}.$$

Переміщення $u_{j0}(x_0)$ і $u_{j1}(x_{10}^*)$ запишемо у вигляді комбінації гармонічних потенціалів з довільними густинами [1, 5]:

$$u_{j0}(x_0) = 4(1-\nu)[\psi_j(x_0) - \delta_{j3}(1-2\nu)M(x_0)] - \frac{\partial}{\partial x_{j0}} \left\{ x_{30}[\psi_3(x_0) - 2(1-\nu)M(x_0)] - (1-2\nu) \int_{x_{30}}^{\infty} \left[\psi_3(x_0) + \frac{4\nu(1-\nu)}{1-2\nu} M(x_0) \right] dx_{30} \right\},$$

$$\psi_j(x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_{j0}(\eta)}{|x_0 - \eta|} d_\eta S, \quad M(x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial \psi_1(x_0)}{\partial x_{10}} + \frac{\partial \psi_2(x_0)}{\partial x_{20}} \right] dx_{30},$$

$$u_{j1}(x_{10}^*) = \frac{\partial}{\partial x_{310}} \iint_S \frac{\alpha_{j1}(\xi)}{|x_{10}^* - \xi|} d_\xi S + \delta_{j3} \Phi(x_{10}^*) - \frac{\partial}{\partial x_{j10}} \left[\frac{x_{310}}{2(1-\nu)} \right] \Phi(x_{10}^*) + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \iint_S \frac{\alpha_{31}(\xi)}{|x_{10}^* - \xi|} d_\xi S,$$

$$\Phi(x_{10}^*) = \sum_{m=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_{m10}} \iint_S \frac{\alpha_{m1}(\xi)}{|x_{10}^* - \xi|} d_\xi S.$$

Тут ν – коефіцієнт Пуассона; G – модуль зсуву; δ_{j3} – символ Кронекера; $\alpha_{j0}(\xi)$ і $\alpha_{j1}(\xi)$ – довільні густини гармонічних потенціалів, які задовольняють граничні умови на межі півпростору та поверхнях тріщини.

Задовольняючи граничні умови на поверхнях тріщини S , маємо систему трьох двовимірних інтегральних рівнянь для визначення невідомих функцій $\alpha_{j1}(\xi)$, які характеризують розкриття тріщини в процесі деформації півпростору:

$$\Delta_x \iint_S \frac{\alpha_{j1}(\xi)}{|x_1 - \xi|} d_\xi S + (-1)^j \nu (1 - \delta_{j3}) \frac{\partial}{\partial x_{(3-j)1}} \iint_S \left[\alpha_{11}(\xi) \frac{\partial}{\partial x_{21}} - \alpha_{21}(\xi) \frac{\partial}{\partial x_{11}} \right] \frac{1}{|x_1 - \xi|} d_\xi S + \sum_{m=1}^3 \iint_S \alpha_{m1}(\xi) \Omega_{jm}(x_1, \xi) d_\xi S =$$

$$= -\frac{1-\nu}{G} N_j(x_1), \quad x_1 \in S, \quad j = 1, 2, 3. \quad (1)$$

Тут $\Delta_x = \frac{\partial^2}{\partial x_{11}^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_{21}^2}$ – двовимірний оператор Лапласа; $|x_1 - \xi|$ – від-
 даль між точками $x_1(x_{11}, x_{21})$ і $\xi(\xi_1, \xi_2)$; $\Omega_{jm}(x_1, \xi)$ – функції, які визначені
 так, що граничні умови на межі півпростору виконуються тотожно; $N(x_1)$ –
 задані на тріщині навантаження. Для визначення $\Omega_{jm}(x_1, \xi)$ необхідно ви-
 користати співвідношення, які виражають рівність нулевим зовнішнім наван-
 тажень на межі півпростору:

$$\sum_{m=1}^3 \iint_S \alpha_{m1}(\xi) \Omega_{jm}(x_1, \xi) d_\xi S = \sum_{s=1}^3 \bar{\Psi}_{js01} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_{s0}(\eta)}{|x_{01}^* - \eta|} d_\eta S,$$

$$\alpha_{j0}(\eta) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{m=1}^3 \iint_S \alpha_{m1}(\xi) \left[\bar{K}_{jm10} - x_{310}(\eta) \frac{\partial \bar{L}_{j10}}{\partial x_{s10}(\eta)} \right] \frac{d_\xi S}{|x_{10}^*(\eta) - \xi|}. \quad (2)$$

Тут $\bar{\Psi}_{js01}$, \bar{K}_{jm10} і \bar{L}_{j10} – відомі оператори:

$$\bar{\Psi}_{js01} = \bar{K}_{js01} + x_{301} \frac{\partial}{\partial x_{301}} \int_{x_{301}}^{-\infty} \bar{L}_{j01} dx_{301} + \frac{\partial}{\partial x_{s01}} \int_{x_{301}}^{-\infty} \int_{x_{301}}^{-\infty} \bar{P}_{js01} dx_{301} dx_{301},$$

$$\bar{K}_{jm01} = \sum_{p=1}^3 L_{js01}^{(p)} \frac{\partial}{\partial x_{301}}, \quad \bar{P}_{js01} = M_{js01}^{(1)} \frac{\partial^2}{\partial x_{101}^2} + M_{js01}^{(3)} \frac{\partial^2}{\partial x_{101} \partial x_{201}},$$

$$\bar{L}_{j01} = \ell_{j301} \frac{\partial^2}{\partial x_{101}^2} + m_{j301} \frac{\partial^2}{\partial x_{201}^2} + n_{j301} \frac{\partial^2}{\partial x_{301}^2} + \ell_{j301}^* \frac{\partial^2}{\partial x_{101} \partial x_{201}} +$$

$$+ m_{j301}^* \frac{\partial^2}{\partial x_{201} \partial x_{301}} + n_{j301}^* \frac{\partial^2}{\partial x_{101} \partial x_{301}},$$

$$x_{j01} = e_{j01} d_{01} + \ell_{j01} x_{11} + m_{j01} x_{21},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{L}_{j10} \\ \bar{K}_{jm10} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \ell_{j310} \\ K_{1jm10} \end{array} \right\} \frac{\partial^2}{\partial x_{110}^2} + \left\{ \begin{array}{l} m_{j310} \\ K_{2jm10} \end{array} \right\} \frac{\partial^2}{\partial x_{210}^2} + \left\{ \begin{array}{l} n_{j310} \\ K_{3jm10} \end{array} \right\} \frac{\partial^2}{\partial x_{310}^2} +$$

$$+ \left\{ \begin{array}{l} l_{j310}^* \\ K_{1jm10}^* \end{array} \right\} \frac{\partial^2}{\partial x_{110} \partial x_{210}} + \left\{ \begin{array}{l} m_{j310}^* \\ K_{2jm10}^* \end{array} \right\} \frac{\partial^2}{\partial x_{210} \partial x_{310}} + \left\{ \begin{array}{l} n_{j310}^* \\ K_{3jm10}^* \end{array} \right\} \frac{\partial^2}{\partial x_{110} \partial x_{310}},$$

$$x_{j10}(\eta) = e_{j10} d_{10} + \ell_{j01} \eta_1 + m_{j01} \eta_2. \quad (3)$$

Коефіцієнти у виразах для операторів (3) залежать від пружних ста-
 лих матеріалу і орієнтації тріщини відносно межі півпростору. Для перпен-
 дикулярної до межі півпростору тріщини вони мають вигляд

$$m_{j310} = m_{j10} m_{310}, \quad n_{j310} = n_{j10} n_{310}, \quad \ell_{j310}^* = \ell_{j10} m_{310},$$

$$m_{j310}^* = m_{j10} n_{310} + n_{j10} m_{310}, \quad n_{j310}^* = \ell_{j10} n_{310},$$

$$K_{1jm10} = \nu \delta_{2m} m_{j310}^*, \quad K_{2jm10} = \nu \delta_{1m} n_{j310}^* - (1 - 2\nu) \delta_{3m} m_{j310},$$

$$K_{3jm10} = \delta_{1m} n_{j310}^* + \delta_{2m} m_{j310}^* + \delta_{3m} (2\nu m_{j310} + n_{j310}),$$

$$K_{1jm10}^* = -\nu (\delta_{1m} m_{j310}^* + \delta_{2m} n_{j310}^*) - (1 - 2\nu) \delta_{3m} \ell_{j310}^*,$$

$$K_{2jm10}^* = 2\delta_{2m} m_{j310} + (1 - \nu) \delta_{1m} \ell_{j310}^*,$$

$$K_{3jm10}^* = 2\delta_{1m} \nu m_{j310} + (1 - \nu) \delta_{2m} \ell_{j310}^*,$$

$$\begin{aligned}
\ell_{j301} &= \ell_{j01}\ell_{301}, & n_{j301} &= n_{j01}n_{301}, & \ell_{j301}^* &= m_{j01}\ell_{301}, \\
m_{j301}^* &= m_{j01}n_{301}, & n_{j301}^* &= \ell_{j01}m_{301} + n_{j01}\ell_{301}, \\
L_{js01}^{(1)} &= 2\delta_{1s}(1+\nu)\ell_{j301} + \delta_{2s}\ell_{j301}^*, & L_{js01}^{(2)} &= \delta_{1s}\ell_{j301}^* + 2\delta_{2s}\nu\ell_{j301}, \\
L_{js01}^{(3)} &= \delta_{1s}n_{j301}^* + \delta_{2s}m_{j301}^* + \delta_{3s}(2\nu\ell_{j301} + n_{j301}), \\
M_{js01}^{(1)} &= [2\nu(\delta_{1s} + \delta_{2s}) - \delta_{3s}(1 - 2\nu)]\ell_{j301}, \\
M_{js01}^{(3)} &= [2\nu(\delta_{1s} + \delta_{2s}) - \delta_{3s}(1 - 2\nu)]\ell_{j301}^*.
\end{aligned}$$

У цьому випадку напрямні косинуси координатних осей і вектора, який з'єднує їх центри O та O_1 , задаємо так:

$$\begin{aligned}
\ell_{110} &= \ell_{101} = 0, & \ell_{210} &= m_{101} = 1, & \ell_{310} &= n_{101} = 0, & e_{101} &= 0, & e_{110} &= 0, \\
m_{110} &= \ell_{201} = 0, & m_{210} &= m_{201} = 0, & m_{310} &= n_{201} = 1, & e_{201} &= 0, & e_{210} &= 1, \\
n_{110} &= \ell_{301} = 1, & n_{210} &= m_{301} = 0, & n_{310} &= n_{301} = 0, & e_{301} &= -1, & e_{310} &= 0.
\end{aligned}$$

Застосувавши до (2) техніку обчислення двовимірних інтегралів [1], одержимо вирази для функцій $\Omega_{jm}(\xi, x_1)$:

$$\begin{aligned}
\Omega_{jm}(x_1, \xi) &= \sum_{s=1}^3 \left[\sum_{p=1}^3 L_{js01}^{(p)} \frac{\partial F_{sm}^{(1)}}{\partial x_{p01}} + x_{301} \frac{\partial \bar{L}_{j01}}{\partial x_{s01}} F_{sm}^{(2)} + \right. \\
&\quad \left. + M_{js01}^{(1)} \frac{\partial^3 F_{sm}^{(3)}}{\partial x_{s01} \partial^2 x_{101}} + M_{js01}^{(3)} \frac{\partial^3 F_{sm}^{(3)}}{\partial x_{s01} \partial x_{101} \partial x_{201}} \right], \quad (4)
\end{aligned}$$

де \bar{L}_{j01} – диференціальний оператор вигляду (3),

$$\begin{aligned}
F_{sm}^{(j)} &= - \int_{x_{301}}^{-\infty} \dots \int_{x_{301}}^{-\infty} \left[\frac{M_{sm} x_{301}^3 + N_{sm} x_{301}^2 + F_{sm} x_{301} + E_{sm}}{|y_1 - \xi|^7} + \frac{A_{sm}}{|y_1 - \xi|^3} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{B_{sm} x_{301}^2 + C_{sm} x_{301} + D_{sm}}{|y_1 - \xi|^5} \right] dx_{301} \dots dx_{301}, \quad j = 1, 2, 3,
\end{aligned}$$

$$A_{sm} = -(K_{1sm10} + K_{2sm10} + K_{3sm10}),$$

$$\begin{aligned}
B_{sm} &= K_{2sm10} m_{310}^2 + K_{3sm10} n_{310}^2 + K_{3sm10} m_{310} n_{310} - \\
&\quad - 2\delta_{3s} n_{310} \gamma_{m310} + \gamma_{ms10} n_{310} + \delta_{3m} \delta_{3s},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{sm} &= -3\{2K_{2sm10} m_{310}(y_2^* - \xi_2) + 2K_{3sm10} n_{310} y_3^* + K_{1sm10}^* m_{310}(y_2^* - \xi_2) + \\
&\quad + K_{2sm10}^* [n_{310}(y_2^* - \xi_2) + m_{310} y_3^*] + K_{3sm10}^* n_{310}(y_1^* - \xi_1) - (n_{310} \delta_{3s} - \\
&\quad - n_{s10}) X_{m1} - (n_{310} \gamma_{m310} - \delta_{3m}) Y_{s1} - n_{310} \gamma_{m310} Y_{31} - 2\delta_{3s} \gamma_{m310} y_3^*\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{sm} &= -3\{K_{1sm10}(y_1^* - \xi_1)^2 + K_{2sm10}(y_2^* - \xi_2)^2 + K_{3sm10} y_3^{*2} + \\
&\quad + K_{1sm10}^* (y_1^* - \xi_1)(y_2^* - \xi_2) + K_{2sm10}^* (y_2^* - \xi_2) y_3^* + \\
&\quad + K_{3sm10}^* (y_1^* - \xi_1) y_3^* - y_3^* (\delta_{3s} X_{m1} + \gamma_{m310} Y_{s1} + \gamma_{ms10} Y_{31})\},
\end{aligned}$$

$$M_{sm} = -15\delta_{3s} n_{310} \gamma_{m310} Y_{31},$$

$$N_{sm} = 15Y_{31}(\delta_{3s} n_{310} X_{m1} + n_{310} \gamma_{m310} Y_{s1} + y_3 \delta_{3s} \gamma_{m310}),$$

$$F_{sm} = -15Y_{31}(n_{310} Y_{s1} X_{m1} + y_3 \gamma_{m310} Y_{s1} + y_3 \delta_{3s} X_{m1}),$$

$$E_{sm} = 15y_3 Y_{s1} Y_{31} X_{m1}.$$

Для γ_{ms10} , X_{m1} , Y_{s1} та y_s введено такі позначення:

$$\begin{aligned}\gamma_{ms10} &= \delta_{m1} \ell_{s10} + \delta_{m2} m_{s10} + \delta_{m3} n_{s10}, \\ X_{m1} &= \delta_{m1} (y_1^* - \xi_1) + \delta_{m2} (y_2^* - \xi_2) + \delta_{m3} y_3^*, \\ Y_{s1} &= \ell_{s10} (y_1^* - \xi_1) + m_{s10} (y_2^* - \xi_2) + n_{s10} y_3^*, \\ |y - \xi| &= [(y_1 - \xi_1)^2 + (y_2 - \xi_2)^2 + y_3^2]^{1/2}, \\ y_j &= e_{j10} d_{10} + \ell_{j01} x_{101} + m_{j01} x_{201} - n_{j01} x_{301}, \\ y_j^* &= e_{j10} d_{10} + \ell_{j01} x_{101} + m_{j01} x_{201}.\end{aligned}$$

Інтегральні рівняння (1) значно спрощуються, якщо на тріщину діють лише зсувні зусилля, задані на її поверхнях, тобто коли $N_3(x_1) = 0$ і $\alpha_{31}(\xi) = 0$. Тоді гіперсингулярні інтегральні рівняння (1) мають вигляд

$$\begin{aligned}\iint_S \alpha_{11}(\xi) \left[\frac{1 + \nu}{|x_1 - \xi|^3} - \frac{3\nu(x_{21} - \xi_2)^2}{|x_1 - \xi|^5} \right] d_\xi S + \iint_S \alpha_{21}(\xi) \frac{3\nu(x_{11} - \xi_1)(x_{21} - \xi_2)}{|x_1 - \xi|^5} d_\xi S + \\ + \iint_S \alpha_{11}(\xi) \Omega_{11}(x_1, \xi) d_\xi S + \iint_S \alpha_{21}(\xi) \Omega_{12}(x_1, \xi) d_\xi S = -\frac{1 - \nu}{G} N_1(x_1), \\ \iint_S \alpha_{11}(\xi) \frac{3\nu(x_{11} - \xi_1)(x_{21} - \xi_2)}{|x_1 - \xi|^5} d_\xi S + \iint_S \alpha_{21}(\xi) \left[\frac{1 + \nu}{|x_1 - \xi|^3} - \frac{3\nu(x_{11} - \xi_1)^2}{|x_1 - \xi|^5} \right] d_\xi S + \\ + \iint_S \alpha_{11}(\xi) \Omega_{21}(x_1, \xi) d_\xi S + \iint_S \alpha_{21}(\xi) \Omega_{22}(x_1, \xi) d_\xi S = -\frac{1 - \nu}{G} N_2(x_1), \quad (5)\end{aligned}$$

де $|x_1 - \xi| = [(x_{11} - \xi_1)^2 + (x_{21} - \xi_2)^2]^{1/2}$ – віддаль між точками $x_1(x_{11}, x_{21})$ і $\xi(\xi_1, \xi_2)$ на тріщині S ; $\alpha_{j1}(\xi) = [u_{j1}^-(\xi) - u_{j1}^+(\xi)] / 4\pi$, $j = 1, 2$, – невідомі функції, які характеризують зміщення протилежних точок поверхонь тріщини; $\Omega_{ji}(x_1, \xi)$, $i = 1, 2$, – регулярні ядра, які враховують взаємодію тріщини з межею півпростору і визначаються формулами

$$\begin{aligned}\Omega_{11}(x_1, \xi) &= \frac{\omega[\omega - 2R(x_1, \xi)]}{3R^3(x_1, \xi)[\omega - R(x_1, \xi)]^2} - \frac{16\nu^2 - 17\nu + 3}{R^3(x_1, \xi)} - \\ &- 3 \frac{(x_{21} - h)^2 + (\xi_2 - h)^2}{R^5(x_1, \xi)} + \frac{6\nu(\xi_2 - h)(x_{11} - \xi_1) - 3(1 - 3\nu)\omega^2}{R^5(x_1, \xi)} - \\ &- \frac{30(\xi_2 - h)(x_{21} - h)(x_{11} - \xi_1)^2}{R^7(x_1, \xi)}, \\ \Omega_{12}(x_1, \xi) &= -\frac{3\nu(x_{11} - \xi_1)\omega + 6(1 - \nu)(\xi_2 - h)(x_{11} - \xi_1)}{R^5(x_1, \xi)} + \\ &+ \frac{30(\xi_2 - h)(x_{21} - h)(x_{11} - \xi_1)\omega}{R^7(x_1, \xi)}, \\ \Omega_{21}(x_1, \xi) &= \frac{3\nu(x_{11} - \xi_1)(\xi_2 - h) + 3(2 - 3\nu)(x_{21} - h)(x_{11} - \xi_1)}{R^5(x_1, \xi)} - \\ &- \frac{30(\xi_2 - h)(x_{21} - h)(x_{11} - \xi_1)\omega}{R^7(x_1, \xi)},\end{aligned}$$

$$\Omega_{22}(x_1, \xi) = -\frac{1+v}{R^3(x_1, \xi)} + \frac{3v(x_{11} - \xi_1)^2 - 6(\xi_2 - h)(x_{21} - h)}{R^5(x_1, \xi)} +$$

$$+ \frac{30(\xi_2 - h)(x_{21} - h)\omega^2}{R^7(x_1, \xi)},$$

$$R(x_1, \xi) = \sqrt{(x_{11} - \xi_1)^2 + \omega^2}, \quad \omega = x_{21} + \xi_2 - 2h, \quad h = d_{10}. \quad (6)$$

На контурі області S зміщення точок її протилежних поверхонь дорівнює нулеві. Якщо область S – круг радіуса a , то розв'язок системи рівнянь (5) подаємо у вигляді

$$\alpha_{j1}(\xi) = \sqrt{a^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2} \varphi_j(\xi), \quad (7)$$

де $\varphi_j(\xi)$ – невідомі функції, які мають обмежені частинні похідні до другого порядку включно.

Для розв'язування системи гіперсингулярних інтегральних рівнянь (5), використавши відому аналітично-числову методику [5, 8, 9], будуємо регулярне подання у вигляді

$$\begin{aligned} & \varphi_j(x_1) \left\langle (1+v)[I_{00}(x_1) - I_{00}^*(x_1)] - 3v\{\delta_{j1}[J_{02}(x_1) - J_{02}^*(x_1)] + \right. \\ & \quad \left. + \delta_{j2}[J_{20}(x_1) - J_{20}^*(x_1)]\} \right\rangle + \frac{\partial \varphi_j(x_1)}{\partial x_{11}} \left\langle (1+v)[I_{10}(x_1) - I_{10}^*(x_1)] - \right. \\ & \quad \left. - 3v\{\delta_{j1}[J_{12}(x_1) - J_{12}^*(x_1)] + \delta_{j2}[J_{30}(x_1) - J_{30}^*(x_1)]\} \right\rangle + \\ & \quad + \frac{\partial \varphi_j(x_1)}{\partial x_{21}} \left\langle (1+v)[I_{01}(x_1) - I_{01}^*(x_1)] - 3v\{\delta_{j1}[J_{03}(x_1) - J_{03}^*(x_1)] + \right. \\ & \quad \left. + \delta_{j2}[J_{21}(x_1) - J_{21}^*(x_1)]\} \right\rangle + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi_j(x_1)}{\partial x_{11}^2} \left\langle (1+v)[I_{20}(x_1) - I_{20}^*(x_1)] - \right. \\ & \quad \left. - 3v\{\delta_{j1}[J_{22}(x_1) - J_{22}^*(x_1)] + \delta_{j2}[J_{40}(x_1) - J_{40}^*(x_1)]\} \right\rangle + \\ & \quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi_j(x_1)}{\partial x_{21}^2} \left\langle (1+v)[I_{02}(x_1) - I_{02}^*(x_1)] - 3v\{\delta_{j1}[J_{04}(x_1) - J_{04}^*(x_1)] + \right. \\ & \quad \left. + \delta_{j2}[J_{22}(x_1) - J_{22}^*(x_1)]\} \right\rangle + \frac{\partial^2 \varphi_j(x_1)}{\partial x_{11} \partial x_{21}} \left\langle (1+v)[I_{11}(x_1) - I_{11}^*(x_1)] - \right. \\ & \quad \left. - 3v\{\delta_{j1}[J_{13}(x_1) - J_{13}^*(x_1)] + \delta_{j2}[J_{31}(x_1) - J_{31}^*(x_1)]\} \right\rangle + \\ & \quad + 3v \left\{ \frac{\partial \varphi_{3-j}(x_1)}{\partial x_{11}} [J_{21}(x_1) - J_{21}^*(x_1)] + \frac{\partial \varphi_{3-j}(x_1)}{\partial x_{21}} [J_{12}(x_1) - J_{12}^*(x_1)] \right\} + \\ & \quad + 3v \left\{ \varphi_{3-j}(x_1) [J_{11}(x_1) - J_{11}^*(x_1)] + \frac{\partial^2 \varphi_{3-j}(x_1)}{\partial x_{11} \partial x_{21}} [J_{22}(x_1) - J_{22}^*(x_1)] \right\} + \\ & \quad + \frac{3v}{2} \left\{ \frac{\partial^2 \varphi_{3-j}(x_1)}{\partial x_{11}^2} [J_{31}(x_1) - J_{31}^*(x_1)] + \frac{\partial^2 \varphi_{3-j}(x_1)}{\partial x_{21}^2} [J_{13}(x_1) - \right. \\ & \quad \left. - J_{13}^*(x_1)] \right\} + \iint_S \varphi_j(\xi) \frac{\sqrt{a^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2}}{|x_1 - \xi|^3} \left[1 + v - \right. \\ & \quad \left. - 3v \frac{(x_{21} - \xi_2)^2 \delta_{j1} + (x_{11} - \xi_1)^2 \delta_{j2}}{|x_1 - \xi|^2} \right] d_\xi S + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \iint_S \varphi_{3-j}(\xi) \frac{\sqrt{a^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2}}{|x_1 - \xi|^3} \frac{3v(x_{11} - \xi_1)(x_{21} - \xi_2)}{|x_1 - \xi|^2} d_\xi S + \\
& + \iint_S \sqrt{a^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2} \varphi_j(\xi) \Omega_{j1}(\xi, x_1) d_\xi S + \\
& + \iint_S \sqrt{a^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2} \varphi_{3-j}(\xi) \Omega_{j2}(\xi, x_1) d_\xi S = -\frac{1-v}{G} N_j(x_1), \\
& j = 1, 2, \tag{8}
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
I_{ij}(x_1) &= \iint_S \frac{\sqrt{a^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2} (\xi_1 - x_{11})^i (\xi_2 - x_{21})^j}{|x_1 - \xi|^3} d_\xi S, \quad i, j = 0, 1, 2, \\
J_{ij}(x_1) &= \iint_S \frac{\sqrt{a^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2} (\xi_1 - x_{11})^i (\xi_2 - x_{21})^j}{|x_1 - \xi|^5} d_\xi S, \quad i + j \geq 2. \tag{9}
\end{aligned}$$

Інтегралі $I_{ij}(x_1)$ та $J_{ij}(x_1)$ існують в сенсі головного значення і за допомогою заміни змінних інтегрування $\xi_1 = x_{11} + \rho \cos \alpha$, $\xi_2 = x_{21} + \rho \sin \alpha$ визначаються аналітично:

$$\begin{aligned}
I_{00}(x_1) &= -\pi^2, & I_{10}(x_1) &= -\frac{1}{2} \pi^2 x_{11}, & I_{01}(x_1) &= -\frac{1}{2} \pi^2 x_{21}, \\
I_{11}(x_1) &= \frac{1}{8} \pi^2 x_{11} x_{21}, & I_{20}(x_1) &= \frac{1}{16} \pi^2 (4a^2 - x_{11}^2 - 3x_{21}^2), \\
I_{02}(x_1) &= \frac{1}{16} \pi^2 (4a^2 - 3x_{11}^2 - x_{21}^2), & J_{12}(x_1) &= -\frac{1}{8} \pi^2 x_{11}, \\
J_{22}(x_1) &= \frac{1}{16} \pi^2 \left(a^2 - \frac{1}{2} x_{11}^2 - \frac{1}{2} x_{21}^2 \right), & J_{20}(x_1) &= J_{02}(x_1) = -\frac{1}{2} \pi^2, \\
J_{31}(x_1) &= J_{13}(x_1) = -\frac{1}{16} \pi^2 x_{11} x_{21}, & J_{11}(x_1) &= 0, \\
J_{30}(x_1) &= -\frac{3}{8} \pi^2 x_{11}, & J_{03}(x_1) &= -\frac{3}{8} \pi^2 x_{21}, \\
J_{21}(x_1) &= -\frac{1}{8} \pi^2 x_{21}, & J_{40}(x_1) &= \frac{1}{16} \pi^2 \left(3a^2 - \frac{1}{2} x_{11}^2 - \frac{5}{2} x_{21}^2 \right), \\
J_{04}(x_1) &= \frac{1}{16} \pi^2 \left(3a^2 - \frac{5}{2} x_{11}^2 - \frac{1}{2} x_{21}^2 \right).
\end{aligned}$$

Інтегралі $I_{ij}^*(x_1)$ та $J_{ij}^*(x_1)$ мають вигляд (9) і їх знаходимо чисельно, замінивши S на S_0 , де S_0 – двозв'язна область, отримана з області S радіуса a виключенням з неї кругової області малого радіуса з центром в точці $\xi = x_1$.

При розв'язуванні системи рівнянь (8) вводимо в області S сітку радіально-кутових елементів і, використавши кусково-сталу апроксимацію шуканої функції та різницеві схеми для похідних, колокаційно задовольняємо ці рівняння у вузлових точках усередині граничних елементів. Тоді задачу зводимо до розв'язування системи лінійних алгебричних рівнянь відносно вузлових значень функції $\varphi_j(x_1)$.

Для довільної однозв'язної обмеженої гладким контуром області S при чисельному розв'язуванні рівняння (8) необхідно спочатку однозначно відобразити цю область на круг одиничного радіуса [5, 8].

Безпосередньо через $\varphi_j(x_1)$ визначаються коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) як функції від кутової координати θ точки контуру тріщини. Для кругової тріщини при зсувних зусиллях КІН визначаються за формулами [5]:

$$K_1(\theta, a) = 0,$$

$$K_2(\theta, a) = -\frac{2G\pi\sqrt{a\pi}}{1-\nu} [\varphi_1(\theta, a) \cos \theta + \varphi_2(\theta, a) \sin \theta],$$

$$K_3(\theta, a) = -2G\pi\sqrt{a\pi} [\varphi_1(\theta, a) \sin \theta - \varphi_2(\theta, a) \cos \theta].$$

На рис. 2 і рис. 3 показані залежності зведених значень КІН \bar{K}_2 , а на рис. 4 – КІН \bar{K}_3 ($\bar{K}_i = 2K_i / (\tau\sqrt{\pi a})$, $i = 2, 3$) від кутової координати θ точки контуру тріщини. Розрахунки проводились для різних глибин залягання і навантажень тріщини при значенні коефіцієнта Пуассона $\nu = 0.3$.

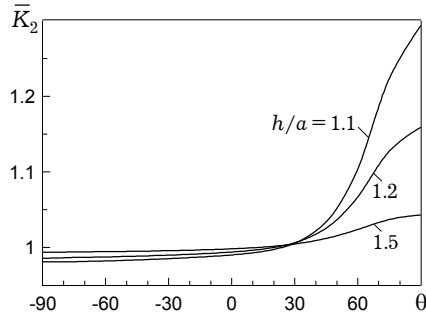


Рис. 2

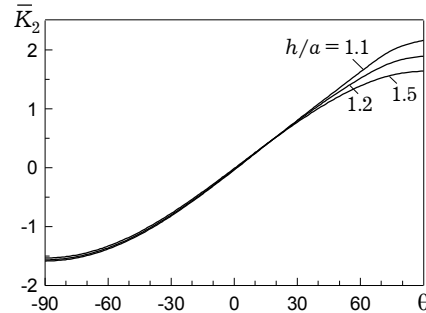


Рис. 3

Криві на рис. 2 подані для осесиметричного навантаження тріщини, а саме: $N_1(x_1) = \tau \cos \theta$ і $N_2(x_1) = \tau \sin \theta$. У цьому випадку \bar{K}_3 на два порядки менші, ніж \bar{K}_2 . Рис. 3 і 4 ілюструють поведінку КІН для $N_1(x_1) = 0$ і $N_2(x_1) = \tau$. На наведених графіках бачимо відчутний вплив межі півпростору на \bar{K}_2 при $\pi/4 \leq \theta \leq 3\pi/4$ і незначний – на \bar{K}_3 . Для $h/a > 2$, як і при нормальному навантаженні, можна вважати, що тріщина знаходиться у безмежному тілі.

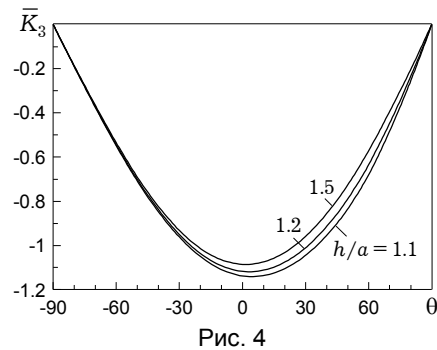


Рис. 4

1. Кит Г. С., Лаушник И. П., Хай М. В. Определение напряжений в полупространстве с произвольно расположенными плоскими трещинами // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1986. – № 3. – С. 164–171.
2. Кит Г. С., Сушко О. П. Термопружний стан півпростору з перпендикулярною до його межі теплоактивною еліптичною тріщиною // Фіз.-хім. мех. матеріалів. – 2006. – 42, № 2. – С. 45–52.
3. Кит Г. С., Сушко О. П. Термопружний стан півпростору з перпендикулярною до його межі теплоактивною круговою тріщиною // Фіз.-хім. мех. матеріалів. – 2005. – 41, № 2. – С. 2–9.
4. Кит Г., Сушко О., Лозовий Б. Згин балок з круговими тріщинами // Машинознавство. – 2007. – № 2 (116). – С. 9–13.
5. Кит Г. С., Хай М. В. Метод потенциалов в трехмерных задачах термоупругости тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1989. – 284 с.
6. Саврук М. П. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1988. – 620 с. – (Механика разрушения и прочность материалов: Справ. пос.: В 4 т. / Под общ. ред. В. В. Панасюка – Т. 2.)

7. Сушко О. П., Хай М. В. Решение задач теории упругости полупространства с плоскими краевыми трещинами // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1994. – Вып. 37. – С. 58–63.
8. Хай М. В. Двумерные интегральные уравнения типа ньютоновского потенциала и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1993. – 253 с.
9. Хай М. В., Калыняк И. В. Об одном подходе к численному решению задач математической теории трещин // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1984. – Вып. 20. – С. 38–42.
10. Хай М. В., Стасюк Б. М. Про визначення напружень в околі плоских неоднорозв'язних тріщин, які знаходяться в полі зсувних зусиль // Доп. НАН України. – 1998. – № 6. – С. 70–74.
11. Smith F. W., Alavi M. I. Stress intensity factors for a penny-shaped crack in a half-space // Eng. Fract. Mech. – 1971. – 3, No. 3. – P. 241–254.

ВЛИЯНИЕ СДВИГОВЫХ УСИЛИЙ НА НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ТРЕЩИНОЙ

Методом граничных интегральных уравнений исследуется напряженное состояние в окрестности перпендикулярной к границе полупространства плоской трещины, на поверхностях которой действуют сдвижные усилия. Задача сведена к двумерным гиперсингулярным интегральным уравнениям, в явном виде записаны их регулярные ядра, учитывающие взаимодействие трещины с границей полупространства. Приведены зависимости коэффициентов интенсивности напряжений от угловой координаты при разных нагружениях трещины.

EFFECT OF SHEARING FORCES ON THE STRESSED STATE OF A HALF-SPACE WITH A CRACK

The stressed state in the vicinity of a plane crack perpendicular to the half-space boundary is investigated by the method of boundary integral equations. The crack is under the action of shearing forces. The problem is reduced to the 2D-hypersingular integral equations. Their regular kernels considering the interaction of a crack with the half-space boundary are written in explicit form. The stress intensity factors vs. the angular coordinate are presented for different crack loading.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
13.11.07