УДК 517.43+517.5

М. Л. Горбачук, В. І. Горбачук

ПРО РОЗВ'ЯЗКИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЕЛІПТИЧНОГО ТИПУ В БАНАХОВОМУ ПРОСТОРІ НА ПІВОСІ

Дається опис усіх класичних розв'язків абстрактного m-гармонічного рівняння на $(0,\infty)$ та досліджуються їхні властивості як усередині цього інтервалу, так і в околі особливої точки 0.

Мета роботи – описати множину всіх класичних розв'язків рівняння

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} - B\right)^m y(t) = 0, \qquad t \in (0,\infty), \qquad m \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

де B – позитивний оператор у комплексному банаховому просторі $\mathfrak{B}$ з нормою $\|\cdot\|$, і за допомогою цього опису дослідити їхню поведінку як усередині інтервалу $(0,\infty)$, так і при наближенні до точки 0.

Якщо оператор B обмежений, то можна показати, що усі розв'язки рівняння (1) на $(0,\infty)$ описуються формулою

$$y(t) = \sum_{k=0}^{m-1} t^k e^{tA} f_k + \sum_{k=0}^{m-1} t^k e^{-tA} g_k, \tag{2}$$

де $A = -B^{1/2}$, а f_k, g_k – довільні елементи простору $\mathfrak{B}$,

$$e^{\pm tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} (\pm A)^n. \tag{3}$$

У цьому випадку ряди (3) збігаються в рівномірній операторній топології і задають цілі оператор-функції зі значеннями у просторі $L(\mathfrak{B})$ лінійних неперервних операторів в $\mathfrak{B}$, а тому кожен розв'язок рівняння (1) на $(0,\infty)$ допускає продовження до цілої $\mathfrak{B}$-значної вектор-функції експоненціального типу і точка 0 є регулярною. Якщо ж B не є обмеженим (далі розглядатимуться тільки такі оператори), то ситуація значно ускладнюється, а саме: ***1***) ряди (3) з необмеженим оператором A можуть не збігатися не те що в рівномірній, а навіть у сильній операторній топології, більш того, існують приклади необмежених замкнених операторів у $\mathfrak{B}$, для яких ці ряди не збігаються на жодному відмінному від нуля елементі; ***2***) навіть якщо оператори $e^{\pm tA}$ є певним чином визначеними, формула (2), взагалі кажучи, не дає усіх розв'язків рівняння (1) на $(0,\infty)$. Отже, у випадку необмеженого A постають питання, як визначити оператори $e^{\pm tA}$, $t \in (0,\infty)$, і які множини мають перебігати вектори f_k і g_k, щоб за допомогою формули (2) отримати усі розв'язки рівняння (1) на $(0,\infty)$?

Зазначимо, що відшукання всіх розв'язків рівняння (1) на $(0,\infty)$ у випадку, коли $m = 1$, а оператор B породжується диференціальним виразом $-\dfrac{d^2}{dx^2}$, було предметом досліджень упродовж досить тривалого часу. У цій ситуації рівняння (1) на $(0,\infty)$ є нічим іншим, як рівнянням Лапласа у верхній півплощині, і проблема знаходження його розв'язків зводиться до опису усіх гармонічних у відкритій верхній півплощині функцій. За додаткової умови, що ці функції є неперервними у замкненій півплощині, їх опис дається формулою Пуассона через їхні граничні значення на дійсній осі. Але не всяка гармонічна у відкритій півплощині функція є неперервною в її замиканні. Численні спроби описати всі гармонічні у відкритій верхній півплощині функції за допомогою формули Пуассона привели до створення таких розділів математики, як теорія граничних значень гармонічних (аналітичних) функцій [8], теорія гіперфункцій [16, 17], теорія півгруп [10]. Тому досягнення поставленої вище мети потребує введення деяких просторів гладких і узагальнених векторів замкненого оператора A у просторі $\mathfrak{B}$ і належного означення операторів $e^{\pm tA}$, $t \in (0,\infty)$.

1. Позначимо через $E(\mathfrak{B})$ множину всіх щільно визначених в $\mathfrak{B}$ замкнених лінійних операторів, I − одиничний оператор, $\mathcal{D}(\cdot)$, $\mathcal{R}(\cdot)$, $\rho(\cdot)$ − область визначення, множину значень і резольвентну множину оператора.

Для оператора $A \in E(\mathfrak{B})$ і числа $\beta \ge 0$ покладемо

$$\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A) = \operatorname{ind}\lim_{\alpha\to\infty} \mathfrak{G}_\beta^\alpha(A) = \bigcup_{\alpha>0} \mathfrak{G}_\beta^\alpha(A),$$

$$\mathfrak{G}_{(\beta)}(A) = \operatorname{proj}\lim_{\alpha\to 0} \mathfrak{G}_\beta^\alpha(A) = \bigcap_{\alpha>0} \mathfrak{G}_\beta^\alpha(A),$$

де

$$\mathfrak{G}_\beta^\alpha(A) = \left\{x \in C^\infty(A) \mid \exists c = c(x) > 0,\ \forall k \in \mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N} : \left\|A^k x\right\| \le c\alpha^k k^{k\beta}\right\}$$

− банахів простір відносно норми

$$\| x \|_{\mathfrak{G}_\beta^\alpha(A)} = \sup_{k\in\mathbb{N}_0} \frac{\| A^k x \|}{\alpha^k k^{k\beta}},$$

а

$$C^\infty(A) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} \mathcal{D}(A^n)$$

− простір нескінченно диференційовних векторів оператора A. Нагадаємо [6], що збіжність в $\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)$ ($\mathfrak{G}_{(\beta)}(A)$) означає збіжність в $\mathfrak{G}_\beta^\alpha(A)$ при деякому (при всіх) $\alpha > 0$.

Очевидно, що для довільних $\lambda \ne 0, \mu \in \mathbb{C}$

$$\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A) = \mathfrak{G}_{\{\beta\}}(\lambda A + \mu I), \qquad \mathfrak{G}_{(\beta)}(A) = \mathfrak{G}_{(\beta)}(\lambda A + \mu I),$$

і за умови, що $\beta_1 < \beta_2$,

$$\mathfrak{G}_{(\beta_1)}(A) \subseteq \mathfrak{G}_{\{\beta_1\}}(A) \subseteq \mathfrak{G}_{(\beta_2)}(A) \subseteq \mathfrak{G}_{\{\beta_2\}}(A).$$

Крім того, для будь-якого многочлена $P(\lambda)$

$$P(A)\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A) \subseteq \mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A), \qquad P(A)\mathfrak{G}_{(\beta)}(A) \subseteq \mathfrak{G}_{(\beta)}(A),$$

і якщо $0 \in \rho(P(A))$, то

$$P(A)\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A) = \mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A), \qquad P(A)\mathfrak{G}_{(\beta)}(A) = \mathfrak{G}_{(\beta)}(A).$$

Простори $\mathfrak{G}_{\{1\}}(A)$ і $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$ називають просторами аналітичних [18] і цілих [11] векторів оператора A відповідно.

Зауважимо, що простір $\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)$ (а поготів і $\mathfrak{G}_{(\beta)}(A)$) може складатися лише з нульового вектора. Але має місце таке твердження (див. [12−14]).

Твердження 1. *Якщо A генерує обмежену аналітичну C_0-півгрупу $\{e^{tA}\}_{t\ge 0}$ у просторі $\mathfrak{B}$ з кутом аналітичності $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, то, коли $\beta > 1 - \frac{2\theta}{\pi}$, то $\overline{\mathfrak{G}_{(\beta)}(A)} = \mathfrak{B}$, а оператор-функція*

$$\exp(zA) = \sum_{k=0}^\infty \frac{z^k A^k}{k!}$$

є цілою у просторі $\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)$ *з* $\beta < 1$ *і в* $\mathfrak{G}_{(\beta)}(A)$ *з* $\beta \le 1$. *Сім'я* $\{\exp(zA)\}_{z\in\mathbb{C}}$ *утворює однопараметричну* C_0*-групу операторів у цих просторах, і якщо* x *належить до такого простору, то*

$$\exp(tA)x = \begin{cases} e^{tA}x, & t \ge 0, \\ (e^{-tA})^{-1}x, & t < 0. \end{cases}$$

Крім того, виконуються рівності

$$\mathfrak{G}_{(1)}(A) = \bigcap_{t>0} \mathcal{R}(e^{tA}), \qquad \mathfrak{G}_{\{1\}}(A) = \bigcup_{t>0} \mathcal{R}(e^{tA}).$$

2. Скрізь у подальшому півгрупу, що генерується оператором A, позначатимемо $\{e^{tA}\}_{t\ge 0}$ (стосовно теорії півгруп у банаховому і локально-опуклому просторах див. [1, 5, 10]).

Нехай A − генератор C_0-півгрупи $\{e^{tA}\}_{t\ge 0}$ лінійних операторів у $\mathfrak{B}$. Надалі припускатимемо, що $\ker e^{tA} = \{0\}$ для будь-якого $t > 0$. Без обмеження загальності вважатимемо також $\{e^{tA}\}_{t\ge 0}$ півгрупою стисків.

Позначимо через $\mathfrak{B}_{-t}(A)$, $t > 0$, поповнення $\mathfrak{B}$ за нормою

$$\| x \|_{-t} = \| e^{tA}x \|.$$

Норми $\| \cdot \|_{-t}$, $t > 0$, є узгодженими і порівнянними на $\mathfrak{B}$. Отже, при $t < t'$ маємо щільне й неперервне вкладення $\mathfrak{B}_{-t}(A) \subseteq \mathfrak{B}_{-t'}(A)$. Покладемо

$$\mathfrak{B}_{-}(A) = \operatorname*{proj\,lim}_{t\to 0} \mathfrak{B}_{-t}(A).$$

Зауважимо, що для одержання $\mathfrak{B}_{-}(A)$ досить обмежитися просторами $\mathfrak{B}_{-1/n}(A)$, $n \in \mathbb{N}$. Таким чином, $\mathfrak{B}_{-}(A)$ − повний зліченно-нормований простір (щодо зліченно-нормованих просторів і операторів у них див [2]).

Оператор e^{tA} допускає неперервне розширення $\tilde{U}(t)$ з $\mathfrak{B}$ на $\mathfrak{B}_{-t}(A)$, причому з огляду на неперервність вкладення $\mathfrak{B}_{-t}(A)$ в $\mathfrak{B}_{-t'}(A)$ при $t < t'$ $\tilde{U}(t') \restriction_{\mathfrak{B}_{-t}(A)} = \tilde{U}(t)$.

На просторі $\mathfrak{B}_{-}(A)$ задамо оператори $U(t)$, $t \ge 0$, таким чином:

$$\forall x \in \mathfrak{B}_{-}(A) : U(t)x = \tilde{U}(t)x \quad \text{при} \quad t > 0, \qquad U(0)x = x.$$

Наступне твердження характеризує оператори $U(t)$ (див. [3, 4]).

Твердження 1. *Сім'я* $\{U(t)\}_{t\ge 0}$ *утворює одностайно неперервну* C_0*-півгрупу лінійних операторів у просторі* $\mathfrak{B}_{-}(A)$ *таку, що:*

(***i***) $\forall t > 0 : U(t)\mathfrak{B}_{-}(A) \subseteq \mathfrak{B}$;

(***ii***) $\forall t \ge 0,\ \forall x \in \mathfrak{B} : U(t)x = e^{tA}x$;

(***iii***) $\forall t, s > 0,\quad \forall x \in \mathfrak{B}_{-}(A) : U(t+s)x = e^{tA}U(s)x = e^{sA}U(t)x$.

Теорема 1. *Якщо півгрупа* $\{e^{tA}\}_{t\ge 0}$ *є диференційовною при* $t > 0$*, то вкладення* $\mathfrak{B}$ *в* $\mathfrak{B}_{-}(A)$ *є строгим:* $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}_{-}(A)$*, генератор* $\widehat{A}$ *півгрупи* $\{U(t)\}_{t\ge 0}$ *визначений і неперервний на всьому просторі* $\mathfrak{B}_{-}(A)$ *і є замиканням* A *в* $\mathfrak{B}_{-}(A)$*, а отже, півгрупа* $\{U(t) = e^{t\widehat{A}}\}_{t\ge 0}$ *є нескінченно диференційовною на* $[0,\infty)$ *в* $\mathfrak{B}_{-}(A)$*. Якщо* $0 \in \rho(A)$*, то оператор* $\widehat{A}$ *має неперервний обернений, визначений на всьому* $\mathfrak{B}_{-}(A)$.

Д о в е д е н н я. Не обмежуючи загальності, можна вважати $0 \in \rho(A)$ (у супротивному випадку замість оператора A можна взяти $A + I$).

На множині $H^n(A) = \mathcal{D}(A^n)$, $n \in \mathbb{N}$, визначимо n-норму як

$$\| x \|_{H^n} = \| A^n x \|.$$

Простір $H^n(A)$ називають соболєвським простором порядку n. Простір $H^{-n}(A)$ вводиться як поповнення $\mathfrak{B}$ за нормою

$$\| x \|_{H^{-n}} = \| A^{-n} x \|, \qquad x \in \mathfrak{B}.$$

Неважко бачити, що при $n_1 > n$

$$H^{n_1}(A) \subseteq H^n(A) \subseteq \mathfrak{B} \subseteq H^{-n}(A) \subseteq H^{-n_1}(A)$$

щільно й неперервно.

Покажемо, що для довільного $n \in \mathbb{N}$ простір $H^{-n}(A)$ щільно та неперервно вкладається в $\mathfrak{B}_{-}(A)$, тобто $H^{-n}(A) \subseteq \mathfrak{B}_{-t}(A)$ щільно та неперервно для будь-якого $t > 0$. Для цього досить довести порівнянність і узгодженість норм $\| \cdot \|_{H^{-n}}$ та $\| \cdot \|_{-t}$ на $\mathfrak{B}$.

Перша властивість зумовлюється співвідношенням

$$\| x \|_{-t} = \| e^{tA} x \| = \| e^{tA} A^n A^{-n} x \| \le c \| A^{-n} x \| = c \| x \|_{-n}$$

$(0 < c = c(t) = \mathrm{const})$, оскільки, внаслідок диференційовності півгрупи $\{e^{tA}\}_{t \ge 0}$, оператор $A^n e^{tA}$ є неперервним у $\mathfrak{B}$ (див. [19]).

Припустимо тепер, що $\mathfrak{B} \ni x_m \to 0$, $m \to \infty$, у просторі $\mathfrak{B}_{-t}(A)$ і послідовність x_m є фундаментальною в $H^{-n}(A)$. Останнє означає, що послідовність $A^{-n} x_m$ є фундаментальною в $\mathfrak{B}$, а отже, $A^{-n} x_m$ збігається в $\mathfrak{B}$ до деякого елемента y. З іншого боку, із неперервності оператора $A^n e^{tA}$ випливає, що $A^n e^{tA} A^{-n} x_m \to A^n e^{tA} y$ в $\mathfrak{B}$. Враховуючи, що $A^n e^{tA} A^{-n} x_m = e^{tA} x_m \to 0$ в $\mathfrak{B}$ при $m \to \infty$, одержуємо $A^n e^{tA} y = 0$, звідки, з огляду на оборотність оператора A, $e^{tA} y = 0$. Оскільки $\ker e^{tA} = \{0\}$, то приходимо до висновку, що $y = 0$, а отже, норми $\| \cdot \|_{H^{-n}}$ і $\| \cdot \|_{-t}$ є узгодженими.

Таким чином, для довільного $n \in \mathbb{N}$ маємо ланцюжок щільних і неперервних вкладень

$$H^n(A) \subset \mathfrak{B} \subseteq H^{-n}(A) \subseteq \mathfrak{B}_{-}(A).$$

Покажемо, що для необмеженого A вкладення $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{B}_{-}(A)$ є строгим. Припустимо, що це не так. Тоді для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ $\mathfrak{B} = H^{-n}(A)$, зокрема, $\mathfrak{B} = H^{-1}(A)$. Отже, у просторі $\mathfrak{B}$ маємо дві норми: $\| \cdot \|$ і $\| \cdot \|_{H^{-1}}$. При цьому

$$\forall x \in \mathfrak{B} : \| x \|_{H^{-1}} \le c_1 \| x \|, \tag{4}$$

де $c_1 = \| A^{-1} \|$. Розглянемо тепер оператор J, що ставить у відповідність кожному елементу $x \in \mathfrak{B}$ його самого, але як елемент простору $H^{-1}(A)$. Нерівність (4) показує, що він є обмеженим. За теоремою Банаха, обернений до J оператор $J^{-1} : H^{-1}(A) \mapsto \mathfrak{B}$ є також неперервним, а тому

$$\forall x \in \mathfrak{B} : \| x \| \le c_2 \| x \|_{H^{-1}}, \qquad 0 < c_2 = \mathrm{const}.$$

Покладаючи $y = A^{-1}x$, одержимо

$$\forall y \in \mathfrak{B} : \| Ay \| \le c_2 \| y \|,$$

що суперечить необмеженості оператора A. Таким чином, за умов теореми,

$$\mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}_{-}(A).$$

Далі, для довільного $t > 0$ можна завжди знайти число t' таке, щоб оператор A був неперервним із $\mathfrak{B}_{-t'}(A)$ в $\mathfrak{B}_{-t}(A)$. За таке t' можна взяти будь-яке число з інтервалу $(0, t)$, оскільки тоді для довільного $x \in \mathcal{D}(A)$

$$\| Ax \|_{-t} = \| e^{tA} Ax \| = \| Ae^{(t-t')A} e^{t'A} x \| \le c \| e^{t'A} Ax \| = c \| x \|_{-t'},$$

де $c = \| Ae^{(t-t')A} \|$. Тому оператор A допускає продовження до неперервного на всьому просторі $\mathfrak{B}_{-}(A)$ оператора $A_{-} = \overline{A}$ (замикання береться у просторі $\mathfrak{B}_{-}(A)$). Доведемо, що $A_{-} = \widehat{A}$.

Оскільки

$$\forall x \in \mathcal{D}(A) : Ax = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{e^{(t+\Delta t)A} x - e^{tA} x}{\Delta t}$$

(границя береться в просторі $\mathfrak{B}$), то й тим більше у просторі $\mathfrak{B}_{-}(A)$ існує

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{U(t + \Delta t)x - U(t)x}{\Delta t} = \widehat{A}x = Ax.$$

Це означає, що $\widehat{A} \restriction \mathcal{D}(A) = A$. Беручи до уваги, що $\widehat{A}$ − замкнений, щільно заданий оператор в $\mathfrak{B}_{-}(A)$, а A_{-} − найменший замкнений оператор, що містить A, дійдемо висновку, що $\widehat{A} \supseteq A_{-}$, а той факт, що $\mathcal{D}(A_{-}) = \mathfrak{B}_{-}(A)$, зумовлює рівність $\widehat{A} = A_{-} = \overline{A}$. Отже, $\widehat{A}$ − замикання оператора A у просторі $\mathfrak{B}_{-}(A)$.

Припустимо тепер, що $0 \in \rho(A)$. Із нерівності

$$\| A^{-1}x \|_{t} = \| e^{tA} A^{-1} x \| \le \| A^{-1} \| \| x \|_{-t}, \qquad x \in \mathfrak{B},$$

і щільності $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{B}_{-t}(A)$ випливає, що оператор A^{-1} допускає продовження до неперервного оператора A_t^{-1} у просторі $\mathfrak{B}_{-t}(A)$, причому $A_{t'}^{-1} \restriction \mathfrak{B}_{-t}(A) = A_t^{-1}$ при $t < t'$. На просторі $\mathfrak{B}_{-}(A)$ означимо оператор $\widehat{A^{-1}}$:

$$\forall x \in \mathfrak{B}_{-}(A) : \widehat{A^{-1}}x = A_t^{-1}x.$$

Очевидно, що оператор $\widehat{A^{-1}}$ є неперервним. Оскільки

$$\forall x \in \mathfrak{B} : \widehat{A}\widehat{A^{-1}}x = AA^{-1}x = x,$$

то, з огляду на неперервність операторів $\widehat{A}$ і $\widehat{A^{-1}}$ в $\mathfrak{B}_{-}(A)$, остання рівність є правильною і для $x \in \mathfrak{B}_{-}(A)$. Так само переконуємося, що

$$\widehat{A^{-1}}\widehat{A}x = x, \qquad x \in \mathfrak{B}_{-}(A).$$

Отже, $\widehat{A^{-1}} = \widehat{A}^{-1}$. Теорему доведено. ◊

3. Розглянемо рівняння (1), де B − позитивний оператор в $\mathfrak{B}$, тобто $B \in E(\mathfrak{B})$, $(-\infty, 0] \in \rho(B)$, та існує стала $M > 0$ така, що

$$\forall \lambda \ge 0 : \| R_B(-\lambda) \| \le \frac{M}{1 + \lambda}$$

($R_B(\lambda) = (B - \lambda I)^{-1}$ − резольвента оператора B). Як показано в [7, 15], у цьому випадку є визначеними дробові степені B^{α}, $0 < \alpha < 1$, оператора B, а оператор $A = -B^{1/2}$ генерує обмежену аналітичну C_0-півгрупу $\{e^{tA}\}_{t \ge 0}$ у просторі $\mathfrak{B}$ з від'ємним типом.

Під розв'язком рівняння (1) на $(0, \infty)$ розумітимемо $2m$ разів неперервно диференційовну в $\mathfrak{B}$ на $(0, \infty)$ вектор-функцію $y(t)$ таку, що $y^{(2k)} \in \mathcal{D}(B^{m-k})$, $k = 0, 1, \ldots, m$, і $B^{m-k} y^{(2k)}$ неперервна в $\mathfrak{B}$ на $(0, \infty)$, а $y(t)$ задовольняє рівняння (1). Підкреслимо, що жодних умов на поведінку розв'язку в околі нуля не вимагається.

Теорема 2. *Вектор-функція $y(t)$ є розв'язком рівняння* (1) *на* $(0, \infty)$ *тоді й тільки тоді, коли її можна зобразити у вигляді*

$$y(t) = \sum_{k=0}^{m-1} t^k e^{t\hat{A}} f_k + \sum_{k=0}^{m-1} t^k \exp(-tA) g_k, \tag{5}$$

де $A = -B^{1/2}$, $f_k \in \mathfrak{B}_-(A)$, $g_k \in \mathfrak{G}_{(1)}(A)$. *Вектори* f_k *і* g_k, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, *однозначно визначаються за* $y(t)$.

Д о в е д е н н я. Доведемо спочатку *необхідність* і почнемо з випадку $m = 1$.

Отже, нехай $y(t)$ − розв'язок на $(0, \infty)$ рівняння

$$\left(\frac{d}{dt} + A\right)\left(\frac{d}{dt} - A\right) y(t) = 0, \qquad t \in (0, \infty).$$

Тоді вектор-функція

$$z(t) = \left(\frac{d}{dt} - A\right) y(t)$$

є розв'язком рівняння

$$\frac{dz(t)}{dt} = -Az(t), \qquad t \in (0, \infty),$$

у якому оператор $A = -(-A) = -B^{1/2}$ генерує обмежену аналітичну C_0-півгрупу. Тому [13]

$$z(t) = \exp(-tA) g, \qquad g \in \mathfrak{G}_{(1)}(A),$$

а отже, $y(t)$ на $(0, \infty)$ задовольняє рівняння

$$\left(\frac{d}{dt} - A\right) y(t) = \exp(-tA) g. \tag{6}$$

Оскільки $\mathfrak{B}$-значна вектор-функція $\exp(-tA)g$ є цілою, то (див. [7, 19]) вектор-функція

$$\tilde{y}(t) = \int_0^t e^{(t-s)A} \exp(-sA) g \, ds$$

є частинним розв'язком рівняння (6) на $[0, \infty)$, а тому вектор-функція $y_0(t) = y(t) - \tilde{y}(t)$ задовольняє на $(0, \infty)$ рівняння

$$\left(\frac{d}{dt} - A\right) y_0(t) = 0.$$

Згідно з [4],

$$y_0(t) = e^{t\hat{A}} f, \qquad f \in \mathfrak{B}_-(A),$$

звідки

$$y(t)=e^{t\widehat{A}}f+\int_0^t e^{(t-s)A}\exp(-sA)g\,ds=e^{t\widehat{A}}f+\frac{\sinh(tA)}{A}g=$$

$$=e^{t\widehat{A}}\left(f+\frac{1}{2}A^{-1}g\right)+\exp(-tA)\left(-\frac{1}{2}A^{-1}g\right)=e^{t\widehat{A}}f_0+\exp(-tA)g_0,$$

де

$$f_0=f+\frac{1}{2}A^{-1}g\in\mathfrak{B}_-(A),\qquad g_0=-\frac{1}{2}A^{-1}g\in\mathfrak{G}_{(1)}(A),$$

оскільки $A^{-1}\mathfrak{G}_{(1)}(A)=\mathfrak{G}_{(1)}(A)$.

Припустимо тепер, що довільний розв'язок рівняння (1) на $(0,\infty)$ з $m-1$ замість m допускає зображення

$$y(t)=\sum_{k=0}^{m-2}t^k e^{t\widehat{A}}f_k+\sum_{k=0}^{m-2}t^k\exp(-tA)g_k,\quad f_k\in\mathfrak{B}_-(A),\quad g_k\in\mathfrak{G}_{(1)}(A),\quad (7)$$

і доведемо, що для розв'язків рівняння вигляду (1) справджується зображення (5) (тобто скористаємося методом математичної індукції).

Запишемо рівняння (1) як

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}-A^2\right)\left(\frac{d^2}{dt^2}-A^2\right)^{m-1}y(t)=0,\qquad t\in(0,\infty).$$

Тоді вектор-функція

$$z(t)=\left(\frac{d^2}{dt^2}-A^2\right)^{m-1}y(t)$$

є розв'язком на $(0,\infty)$ рівняння (1) з $m=1$, а тому

$$\exists\,\tilde{f}_0\in\mathfrak{B}_-(A),\ \ \exists\,\tilde{g}_0\in\mathfrak{G}_{(1)}(A):z(t)=e^{t\widehat{A}}\tilde{f}_0+\exp(-tA)\tilde{g}_0.$$

Враховуючи, що для довільних $f\in\mathfrak{B}_-(A)$ і $t>0$

$$\left(\frac{d}{dt}-A\right)^{m-1}(t^{m-1}e^{t\widehat{A}}f)=(m-1)!\,e^{t\widehat{A}}f,$$

при $f_{m-1}=\dfrac{\widehat{A}^{1-m}}{2^{m-1}(m-1)!}\tilde{f}_0\in\mathfrak{B}_-(A)$ одержуємо

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}-A^2\right)^{m-1}e^{t\widehat{A}}f_{m-1}=e^{t\widehat{A}}\tilde{f}_0.$$

Аналогічно доводиться, що для $g_{m-1}=\dfrac{(-1)^{m-1}\widehat{A}^{1-m}}{2^{m-1}(m-1)!}\tilde{g}_0\in\mathfrak{G}_{(1)}(A)$ виконується рівність

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}-A^2\right)^{m-1}\exp(-tA)g_{m-1}=\exp(-tA)\tilde{g}_0.$$

Це означає, що вектор-функція $y(t)-e^{t\widehat{A}}f_{m-1}-\exp(-tA)g_{m-1}$ є розв'язком однорідного рівняння (1) з $m-1$ замість m і, за припущенням, допускає зображення (7). Таким чином,

$$y(t)-e^{t\widehat{A}}f_{m-1}-\exp(-tA)g_{m-1}=\sum_{k=0}^{m-2}t^k e^{t\widehat{A}}f_k+\sum_{k=0}^{m-2}t^k\exp(-tA)g_k,$$

$$f_k\in\mathfrak{B}_-(A),\quad g_k\in\mathfrak{G}_{(1)}(A),\qquad k=0,1,\dots,m-1,$$

звідки

$$y(t) = \sum_{k=0}^{m-1} t^k e^{t\widehat{A}} f_k + \sum_{k=0}^{m-1} t^k \exp(-tA) g_k ,$$

$$f_k \in \mathfrak{B}_-(A), \quad g_k \in \mathfrak{G}_{(1)}(A), \qquad k = 0,1,\ldots,m-1 .$$

Достатність умов теореми підтверджується безпосередньою перевіркою, що вектор-функція вигляду (5) є розв'язком рівняння (1) на $(0,\infty)$.

Доведемо єдиність зображення (5), тобто, що тотожність $y(t) \equiv 0$ зумовлює рівності $f_k = g_k = 0$, $k = 0,1,\ldots,m-1$.

Неважко перевірити, що для $f \in \mathfrak{B}_-(A)$, $g \in \mathfrak{G}_{(1)}(A)$

$$\left(\frac{d}{dt} - A\right)^k (t^i e^{t\widehat{A}} f) = \begin{cases} i(i-1)\ldots(i-k+1)t^{i-k} e^{t\widehat{A}} f, & k \le i, \\ 0, & k > i, \end{cases} \tag{8}$$

та

$$\left(\frac{d}{dt} + A\right)^k (t^i \exp(-tA) g) =$$

$$= \begin{cases} i(i-1)\ldots(i-k+1)t^{i-k} \exp(-tA) g, & k \le i, \\ 0, & k > i, \end{cases} \tag{9}$$

звідки

$$\left(\frac{d}{dt} - A\right)^k y_1(t) = \sum_{i=k}^{m-1} i(i-1)\ldots(i-k+1)\, t^{i-k} e^{t\widehat{A}} f_i \tag{10}$$

і

$$\left(\frac{d}{dt} + A\right)^k y_2(t) = \sum_{i=k}^{m-1} i(i-1)\ldots(i-k+1) t^{i-k} \exp(-tA)\, g_i , \tag{11}$$

де

$$y_1(t) = \sum_{k=0}^{m-1} t^k e^{t\widehat{A}} f_k , \qquad y_2(t) = \sum_{k=0}^{m-1} t^k \exp(-tA) g_k . \tag{12}$$

Беручи до уваги, що для $k = 0,1,\ldots,m-1$ і $t > 0$

$$\left(\frac{d}{dt} + A\right)^m \left(\frac{d}{dt} - A\right)^k y(t) = \left(\frac{d}{dt} + A\right)^m \left(\frac{d}{dt} - A\right)^k y_1(t)$$

та

$$\left(\frac{d}{dt} - A\right)^m \left(\frac{d}{dt} + A\right)^k y(t) = \left(\frac{d}{dt} - A\right)^m \left(\frac{d}{dt} + A\right)^k y_2(t) ,$$

а також (8), (9), одержимо

$$\left(\frac{d}{dt} + A\right)^m \left(\frac{d}{dt} - A\right)^{m-1} y(t) = \left(\frac{d}{dt} + A\right)^m (m-1)!\, e^{t\widehat{A}} f_{m-1} =$$

$$= 2^m (m-1)!\, \widehat{A}^m e^{t\widehat{A}} f_{m-1} \tag{13}$$

і

$$\left(\frac{d}{dt} - A\right)^m \left(\frac{d}{dt} + A\right)^{m-1} y(t) = \left(\frac{d}{dt} - A\right)^m (m-1)! \exp(-tA) g_{m-1} =$$

$$= (-1)^m 2^m (m-1)! A^m \exp(-tA) g_{m-1} . \tag{14}$$

Припустимо тепер, що $y(t) \equiv 0$. Тоді з теореми 1 і рівностей (13), (14) при $t = 0$ випливає, що

$$f_{m-1} = g_{m-1} = 0,$$

тобто $y(t)$ має вигляд

$$y(t) = \sum_{i=0}^{m-2} t^i e^{t\hat{A}} f_i + \sum_{i=0}^{m-2} t^i \exp(-tA) g_i.$$

Повторюючи цю процедуру m разів, дійдемо висновку, що усі f_i та g_i, $i = 0, 1, \ldots, m-1$, у формулі (5) дорівнюють нулеві, що й завершує доведення теореми. ◊

Наслідок 1. *Будь-який розв'язок рівняння* (1) *на* $(0, \infty)$ *є аналітичною в* $\mathfrak{B}$ *вектор-функцією на* $(0, \infty)$ *зі значеннями в* $\mathfrak{G}_{\{1\}}(A)$.

Д о в е д е н н я. Оскільки розв'язок $y(t)$ рівняння (1) на $(0, \infty)$ зображується у вигляді $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$, де $y_1(t)$ і $y_2(t)$ визначаються формулою (12), і, за твердженням 1, $y_2(t)$ − ціла вектор-функція зі значеннями в $\mathfrak{G}_{(1)}(A) \subseteq \mathfrak{G}_{\{1\}}(A)$, то досить довести, що $y_1(t)$ є аналітичною на $(0, \infty)$ $\mathfrak{G}_{\{1\}}(A)$-значною вектор-функцією.

Якщо $f_k \in \mathfrak{B}$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, то з аналітичності півгрупи $\{e^{tA}\}_{t \ge 0}$ випливає, що $t^k e^{tA}$, а тому й $y_1(t)$ є аналітичними на $(0, \infty)$ $\mathfrak{B}$-значними вектор-функціями. За твердженням 1, значення $y_1(t)$ належать до $\mathfrak{G}_{\{1\}}(A)$.

Припустимо тепер, що $f \in \mathfrak{B}\_(A)$. Зафіксуємо довільне $t_0 > 0$. Тоді, за твердженням 2, при $t > t_0$

$$e^{t\hat{A}} f = e^{(t-t_0)A} e^{t_0 \hat{A}} f \qquad \text{і} \qquad e^{t_0 \hat{A}} f \in \mathfrak{B}.$$

Тому $e^{t\hat{A}} f$ є аналітичною вектор-функцією зі значеннями в $\mathfrak{G}_{\{1\}}(A)$ на (t_0, ∞). З огляду на довільність t_0, $e^{t\hat{A}} f$, а тому і $y_1(A)$ є $\mathfrak{G}_{\{1\}}(A)$-значною аналітичною в $\mathfrak{B}$ на $(0, \infty)$ вектор-функцією. Доведення завершено. ◊

З наслідку 1 випливають, зокрема, теореми про підвищення гладкості всередині області розв'язків багатьох рівнянь із частинними похідними не обов'язково еліптичного типу.

Наслідок 2. *Для того щоб вектор-функція* $y(t)$ *була розв'язком рівняння* (1) *на* $(-\infty, \infty)$, *необхідно та достатньо, щоб вона допускала зображення вигляду* (5), *у якому* $f_k, g_k \in \mathfrak{G}_{(1)}(A)$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$.

Д о в е д е н н я. Якщо вектор-функція $y(t)$ має вигляд (5) на $(-\infty, \infty)$ з $f_k, g_k \in \mathfrak{G}_{(1)}(A)$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, то, за твердженням 1, $y(t)$ допускає продовження до цілої вектор-функції зі значеннями у просторі $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$, яка задовольняє рівняння (1) в усій комплексній площині.

Навпаки, нехай $y(t)$ − розв'язок рівняння (1) на $(-\infty, \infty)$. Як показано в [14], при $m = 1$ її можна подати у вигляді

$$y(t) = e^{tA} f_0 + \exp(-tA) g_0, \qquad f_0, g_0 \in \mathfrak{G}_{(1)}(A).$$

Припустимо, що твердження теореми є правильним при $m = k - 1$, і доведемо, що воно виконується для $m = k$.

Якщо $y(t)$ − розв'язок рівняння (1) на $(-\infty,\infty)$ з $m=k$, то вектор-функція

$$z(t)=\left(\frac{d^2}{dt^2}-B\right)^{k-1}y(t)$$

задовольняє рівняння

$$\frac{d^2z(t)}{dt^2}-Bz(t)=0, \qquad t\in(-\infty,\infty).$$

Тому існують $\tilde{f}_0,\tilde{g}_0\in\mathfrak{G}_{(1)}(A)$ такі, що

$$z(t)=e^{tA}\tilde{f}_0+\exp(-tA)\tilde{g}_0,$$

а тоді вектор-функція

$$\tilde{y}(t)=y(t)-t^{k-1}e^{tA}f_{k-1}-t^{k-1}\exp(-tA)\,g_{k-1},$$

де

$$f_{k-1}=\frac{A^{1-k}}{2^{k-1}(k-1)!}\tilde{f}_0, \qquad g_{k-1}=\frac{(-1)^{k-1}A^{1-k}}{2^{k-1}(k-1)!}\tilde{g}_0$$

є розв'язком рівняння (1) з $m=k-1$, а отже, $\tilde{y}(t)$ зображується у вигляді (5) з $m=k-1$, звідки для $y(t)$ прийдемо до такого самого зображення, але з $m=k$, що й завершує доведення наслідку. ◊

Наслідок 2 показує, що будь-який розв'язок рівняння (1) на всій осі є цілою $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$-значною вектор-функцією.

Із твердження 2 і теорем 1, 2 випливає наступне твердження.

Наслідок 3. *Кожний розв'язок* $y(t)$ *рівняння* (1) *на* $(0,\infty)$ *і його похідні будь-якого порядку мають граничні значення в точці нуль у просторі* $\mathfrak{B}_-(A)$.

Природно постає питання: за яких умов на розв'язок $y(t)$, усі f_k, $k=0,1,\ldots,m-1$, в його зображенні (5) належать до вихідного простору $\mathfrak{B}$? Відповідь дає така теорема.

Теорема 3. *Якщо простір* $\mathfrak{B}$ *є рефлексивним, то розв'язок* $y(t)$ *рівняння* (1) *на* $(0,\infty)$ *можна подати у вигляді* (5) *з* $f_k\in\mathfrak{B}$, $k=0,1,\ldots,m-1$, *тоді й тільки тоді, коли*

$$\left\|\left(\frac{d}{dt}-A\right)^k y(t)\right\|<\infty, \quad t\in(0,1], \qquad k=0,1,\ldots,m-1. \tag{16}$$

Д о в е д е н н я. Нехай $y(t)$ − розв'язок рівняння (1) на $(0,\infty)$. За теоремою 1, $y(t)=y_1(t)+y_2(t)$, де $y_i(t)$, $i=1,2$, визначаються формулою (12). Оскільки $y_2(t)$ − ціла вектор-функція зі значеннями в $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$, то виконання умови (16) для $y(t)$ рівносильне її виконанню для $y_1(t)$. Тому при доведенні теореми можна обмежитись випадком

$$y(t)=y_1(t)=\sum_{k=0}^{m-1}t^k e^{t\hat{A}}f_k.$$

Згідно з (10),

$$\left(\frac{d}{dt}-A\right)^{m-1}y(t)=(m-1)!\,e^{t\hat{A}}f_{m-1}, \qquad t\in(0,\infty). \tag{17}$$

У [3, 13] показано, що у випадку рефлексивного $\mathfrak{B}$ для $f \in \mathfrak{B}_-(A)$ справджується співвідношення еквівалентності

$$\sup_{t\in(0,1]} \left\| e^{t\hat{A}} f \right\| < \infty \quad \Leftrightarrow \quad f \in \mathfrak{B}.$$

Звідси, враховуючи (17), випливає, що

$$\sup_{t\in(0,1]} \left\| \left(\frac{d}{dt} - A\right)^{m-1} y(t) \right\| < \infty \quad \Leftrightarrow \quad f_{m-1} \in \mathfrak{B}.$$

Із формули (10) при $k = m - 2$ також одержуємо

$$\left(\frac{d}{dt} - A\right)^{m-2} y(t) = (m-2)!\, e^{t\hat{A}} f_{m-2} + (m-1)!\, t\, e^{t\hat{A}} f_{m-1}. \tag{18}$$

Беручи до уваги обмеженість на $(0,1]$ другого доданку у (18), робимо висновок, що

$$\sup_{t\in(0,1]} \left\| \left(\frac{d}{dt} - A\right)^{m-2} y(t) \right\| < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \sup_{t\in(0,1]} \left\| e^{t\hat{A}} f_{m-2} \right\| < \infty \quad \Leftrightarrow \quad f_{m-2} \in \mathfrak{B}.$$

Повторюючи ці міркування m разів, знайдемо, що $f_{m-3}, \ldots, f_0 \in \mathfrak{B}$. Доведення завершено. ◊

Із наведеного вище доведення видно, що умова (16) еквівалентна існуванню граничних значень у нулі вектор-функцій $\left(\frac{d}{dt} - A\right)^k y(t)$, $k = 0,1,\ldots,m-1$, у просторі $\mathfrak{B}$. У випадку, коли $m = 1$ і $\mathfrak{B}$ рефлексивний, обмеженість розв'язку в околі нуля рівносильна існуванню його граничного значення у точці 0 в $\mathfrak{B}$. Але, як показано в [9], це, взагалі кажучи, не так при $m > 1$. Наприклад, для бігармонічного рівняння $\left(B = -\frac{d^2}{dx^2}\right)$ із обмеженості в середньому квадратичному розв'язку в околі границі ще не випливає існування середньоквадратичного граничного значення.

Виконано за підтримки ДФФД України (проект 14.1-003), Наукової програми НАН України (проект 0107U002333) та гранту Міністерства освіти України № M\124 (UA 04\2007).

1. *Васильев В. В., Крейн С. Г., Пискарев С. И.* Полугруппы операторов, косинус оператор-функции и линейные дифференциальные уравнения // Итоги науки и техн. Мат. анализ. – 1990. – **28**. – С. 87–201.
2. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Пространства основных и обобщенных функций. – Т. 2. – Москва: Физматгиз, 1958. – 307 с.
3. *Горбачук В. И., Князюк А. В.* Граничные значения решений дифференциально-операторных уравнений // Успехи мат. наук. – 1989. – **44**, № 3. – С. 55–91.
4. *Горбачук М. Л., Горбачук В. І.* Про одне узагальнення еволюційного критерію Березанського самоспряженості оператора // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 5. – С. 608–615.
5. *Иосида К.* Функциональный анализ. – Москва: Мир, 1967. – 624 с.
6. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ в нормированных пространствах. – Москва: Физматгиз, 1959. – 684 с.
7. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. – Москва: Наука, 1967. – 464 с.
8. *Кусис П.* Введение в теорию пространств H^p. – Москва: Мир, 1984. – 364 с.
9. *Михайлов В. П.* О существовании предельных значений решений полигармонического уравнения на границе области // Мат. сб. – 1996. – **187**, № 11. – С. 89–114.
10. *Хилле Э., Филлипс Р. С.* Функциональный анализ и полугруппы. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. – 830 с.

11. *Goodman R.* Analytic and entire vectors for representations of Lie groups // Trans. Amer. Math. Soc. – 1969. – **143**. – P. 55–76.
12. *Gorbachuk M. L., Mokrousov Yu. G.* On density of some sets of infinitely differentiable vectors of a closed operator on a Banach space // Methods of Funct. Anal. and Topology. – 2002. – **8**, № 1. – P. 23–29.
13. *Gorbachuk V. I., Gorbachuk M. L.* Boundary-value problems for operator differential equations. – Dordrecht ets.: Kluwer Acad. Publ., 1991. – 347 p.
14. *Gorbachuk V. M.* On solutions of parabolic and elliptic differential equations on $(-\infty,\infty)$ in a Banach space // Methods of Funct. Anal. and Topology. – 2008. – **14**, № 2. – P. 25–32.
15. *Komatsu H.* Fractional powers of operators // Pacific J. of Math. – 1966. – **19**, No. 2. – P. 285–346.
16. *Komatsu H.* Ultradistributions and hyperfunctions // Lect. Notes in Math. – 1973. – **287**. – P. 164–261.
17. *Köthe G.* Die Ranwerte einer analytischen Funktionen // Math. Z. – 1952. – **57**. – P. 13–33.
18. *Nelson E.* Analytic vectors // Ann. Math. Z. – 1959. – **70**, No. 3. – P. 572–615.
19. *Pazy A.* Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. – New York ets.: Springer, 1983. – 279 p.

О РЕШЕНИЯХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ НА ПОЛУОСИ

Дается описание всех классических решений абстрактного m-гармонического уравнения на $(0,\infty)$ и исследуются их свойства как внутри этого интервала, так и в окрестности особой точки 0.

ON SOLUTIONS OF ELLIPTIC TYPE DIFFERENTIAL EQUATIONS IN A BANACH SPACE ON SEMIAXIS

There is given the description of all classical solutions for an abstract m-harmonic equation on $(0,\infty)$, and their properties inside of this interval and in the neighborhood of the singular point 0 *are investigated.*

Ін-т математики НАН України, Київ

Одержано
23.04.08