УДК 519.2

В. С. Королюк

ПРОЦЕСИ НАКОПИЧЕННЯ У СХЕМІ ПУАССОНІВСЬКОЇ АПРОКСИМАЦІЇ

Дискретні процеси накопичення, що визначаються сумами випадкових величин на марковському або напівмарковському процесах, апроксимуються складними пуассонівськими процесами з неперервним зсувом на зростаючих інтервалах часу.

Вступ. Відновлювальний процес накопичення (ВПН) визначається як сума незалежних однаково розподілених випадкових величин α_k, $k \ge 1$, які приймають значення в евклідовому просторі $\mathbb{R}^d$

$$\rho(t) = u + \sum_{k=1}^{\nu(t)} \alpha_k, \qquad t \ge 0,$$

де рахуючий процес відновлення

$$\nu(t) = \max\{n : \tau_n \le t\}, \qquad t \ge 0,$$

визначається моментами відновлення τ_n, $n \ge 0$, $\tau_0 = 0$, на дійсній прямій $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$.

ВПН має різні інтерпретації у застосуваннях [1, 6, 7].

Основною задачею є дослідження поведінки ВПН на зростаючих інтервалах часу $t \to \infty$.

Основним методом є введення малого параметра серії $\varepsilon \to 0$ $(\varepsilon > 0)$ таким чином, щоб можна було використати граничні теореми для випадкових процесів [1, 2, 4–7].

Асимптотичний аналіз випадкової еволюції є найбільш досконалим підходом для отримання граничних результатів для ВПН у схемі серій.

Теорема про пуассонівську апроксимацію ВПН доводиться для різних припущень про процес відновлення $\nu(t)$, $t \ge 0$, керований марковським або напівмарковським процесом.

1. Процеси відновлення з пуассонівськими стрибками. Процеси накопичення (ПН) у схемі серій з малим параметром серій $\varepsilon \to 0$, $\varepsilon > 0$, задано співвідношенням

$$\rho^\varepsilon(t) = u + \sum_{k=1}^{\nu(t/\varepsilon)} \alpha_k^\varepsilon, \qquad t > 0, \tag{1}$$

де рахуючий процес

$$\nu(t) = \max\{n : \tau_n \le t\}, \qquad \tau_n = \sum_{k=1}^{n} \theta_k, \quad n \ge 0, \qquad \tau_0 = 0,$$

задано незалежними однаково розподіленими величинами θ_k, $k \ge 0$, з функцією розподілу $G(t) = P(\theta_k \le t)$, $G(0) = 0$.

Випадкові величини α_k^ε, $k \ge 1$, приймають значення на дійсній прямій (або в $\mathbb{R}^d$). Умови пуассонівської апроксимації (ПА) (див. [7, розд. 7]) задано для функцій розподілу

$$\Phi^\varepsilon(u) = P\{\alpha_k^\varepsilon < u\}, \qquad u \in \mathbb{R}.$$

ПА 1: Апроксимація функції розподілу:

$$\int_{\mathbb{R}} g(u)\Phi^\varepsilon(du) = \varepsilon[\Phi_g + \theta_g^\varepsilon], \qquad g(u) \in C_3(\mathbb{R});$$

ПА 2: Апроксимація середніх значень:

$$\int_{\mathbb{R}} u\Phi^{\varepsilon}(du) = \varepsilon\left[a + \theta_a^{\varepsilon}\right], \qquad \int_{\mathbb{R}} u^2\Phi^{\varepsilon}(du) = \varepsilon\left[c + \theta_c^{\varepsilon}\right].$$

Знехтувальні доданки

$$\left|\theta_{\bullet}^{\varepsilon}\right| \to 0 \qquad \text{при} \qquad \varepsilon \to 0.$$

Теорема 1. *За умов* **ПА 1-2** *процес накопичення* (1) *слабко збігається до складного процесу Пуассона*

$$\rho^0(t) = u + bt + \sum_{k=1}^{\nu^0(t)} \alpha_k^0, \qquad t \geq 0 \ . \tag{2}$$

Функції розподілу $\Phi_0(u) = P(\alpha_k^0 < u)$ незалежних однаково розподілених випадкових величин α_k^0, $k \geq 1$, означені на класі $C_3(\mathbb{R})$ функцій $g(u)$ таким співвідношенням:

$$\mathrm{E}g(\alpha_k^0) = \int_{\mathbb{R}} g(u)\Phi^0(du) = \Phi_g/\Phi(\mathbb{R}),$$

складний процес Пуассона $\nu^0(t)$, $t \geq 0$, має інтенсивність

$$\mathrm{E}\nu^0(t) = q_0 t, \quad q_0 = q\Phi(\mathbb{R}) = q\Lambda, \quad q = 1/\mathrm{E}\theta, \quad \Lambda := \Phi(\mathbb{R}).$$

Швидкість неперервного зсуву

$$b = q(a - \Lambda a^0), \qquad a^0 = \mathrm{E}\alpha_k^0.$$

Зауваження 1. Граничний складний процес Пуассона (2) можна подати таким чином:

$$\rho^0(t) = u + qat + \sum_{k=1}^{\nu^0(t)} \tilde{\alpha}_k, \qquad \tilde{\alpha}_k = \alpha_k^0 - a^0 \ .$$

Приклад. $\Phi^{\varepsilon}(au) = \begin{cases} \varepsilon\Lambda, & du = a^0, \\ 1 - \varepsilon\Lambda & du = \varepsilon a_0, \end{cases} \qquad \mathrm{E}\alpha_k^{\varepsilon} = \varepsilon(\Lambda a^0 + a_0) + \varepsilon\theta_a^{\varepsilon},$

$$a = a_0 + \Lambda a^0, \quad \Phi_g = \Lambda g(a^0), \quad \Phi^0(g) = \Phi(g)/\Lambda, \quad \alpha_k^0 = a^0,$$

$$b = q(a - \Lambda \mathrm{E}\alpha_k^0) = q(a - \Lambda a^0) = q a_0.$$

Зауваження 2. Інтенсивність $q_0 = q\Lambda$ процесу Пуассона $\nu^0(t)$ пропорційна усередненій інтенсивності q моментів відновлення та інтенсивності Λ великих стрибків суми (1).

Зауваження 3. За умов пуассонівської апроксимації **ПА 1-2** малі стрибки (εa_0) трансформуються в неперервний зсув, а великі стрибки (a^0) перетворюються у стрибки граничного складного процесу Пуассона.

Передбачувальні характеристики ПН. Легко обчислити передбачувальні характеристики ПН (1) [4]

$$b^{\varepsilon}(t) = \varepsilon\nu(t/\varepsilon)\left[a + \theta_b^{\varepsilon}\right],$$

$$c^{\varepsilon}(t) = \varepsilon\nu(t/\varepsilon)\left[c + \theta_c^{\varepsilon}\right],$$

$$\Phi_g^{\varepsilon}(t) = \varepsilon\nu(t/\varepsilon)\left[\Phi_g + \theta_g^{\varepsilon}\right],$$

згідно з теоремою відновлення [3, розд. 9]:

$$\varepsilon\nu(t/\varepsilon) \;\Rightarrow\; qt, \qquad \varepsilon \to 0, \qquad q = 1/\mathrm{E}\theta.$$

За умов теореми 1 маємо такі граничні співвідношення при $\varepsilon \to 0$:

$$b^{\varepsilon}(t) \;\Rightarrow\; qat, \quad c^{\varepsilon}(t) \;\Rightarrow\; qct, \quad \Phi_g^{\varepsilon}(t) \;\Rightarrow\; q\Phi_g t = q\Lambda\Phi_g^0 t,$$

$$\Phi_g^{\varepsilon}(t) \;\Rightarrow\; q\Phi_g t = q\int_{\mathbb{R}} g(u)\Phi(du)t = q\Lambda\int_{\mathbb{R}} g(u)\Phi^0(du)t.$$

Тут $\Phi^0(du) = \Phi(du)/\Phi(\mathbb{R})$; $\Lambda := \Phi(\mathbb{R})$.

Тепер передбачувальні характеристики $b(t)=qat$, $c(t)=qct$, $\Phi_g(t)=q\Lambda\Phi_g^0 t$ визначають граничний процес Пуассона зі зсувом, який має вигляд

$$\rho^0(t) = u + aqt + \sum_{k=1}^{\nu^0(t)}(\alpha_k^0 - a^0), \qquad t \ge 0,$$

або, інша форма (2) з

$$b = q(a - \Lambda a^0), \qquad a^0 = \mathrm{E}\alpha_k^0 = \int_{\mathbb{R}} u\Phi^0(du).$$

2. Процес накопичення на марковському процесі. Марковський процес накопичення (МПН) у схемі серій визначається співвідношенням

$$\rho^{\varepsilon}(t) = u + \sum_{k=1}^{\nu(t/\varepsilon)} \alpha_k^{\varepsilon}(\varkappa_k), \qquad t \ge 0, \tag{3}$$

де марковський процес $\varkappa(t), t \ge 0$, на стандартному фазовому просторі $(E, \mathcal{E})$ задається генератором [7, розд. 1]

$$Q\varphi(x) = q(x)\int_E P(x, dy)[\varphi(y) - \varphi(x)].$$

Рахуючий процес

$$\nu(t) := \max\{n : \tau_n \le t\}, \qquad \tau_{n+1} = \tau_n + \theta_{n+1}, \qquad n \ge 0,$$

моменти відновлення θ_n визначаються умовними функціями розподілу

$$G_x(t) := P(\theta_x \le t) = P\{\theta_{n+1} \le t \mid \varkappa_n = x\} = 1 - e^{-q(x)t}, \; t \ge 0, \quad x \in E.$$

Вкладений ланцюг Маркова (ВЛМ) $\varkappa_k, k \ge 0$, визначається стохастичним ядром

$$P(x, B) = P(\varkappa_{k+1} \in B \mid \varkappa_k = x), \qquad x \in E, \qquad B \in \mathcal{E}.$$

Основне припущення полягає в тому, що ВЛМ рівномірно ергодичний зі стаціонарним розподілом $\rho(B)$, $B \in \mathcal{E}$.

Сім'я випадкових величин $\alpha_k^{\varepsilon}(x), x \in E, k \ge 1$, визначається сім'єю функцій розподілу

$$\Phi_x^{\varepsilon}(u) = P(\alpha_k^{\varepsilon}(x) < u), \qquad u \in \mathbb{R}, \qquad x \in E.$$

Припускаються також умови пуассонівської апроксимації [7, розд. 7]:

ПА 1: $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} g(u)\Phi_x^{\varepsilon}(du) = \varepsilon\left[\Phi_g(x) + \theta_g^{\varepsilon}(x)\right], \qquad g(u) \in C_3(\mathbb{R});$

ПА 2: $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} u\Phi_x^{\varepsilon}(du) = \varepsilon\left[a(x) + \theta_a^{\varepsilon}(x)\right], \qquad \int_{\mathbb{R}} u^2\Phi_x^{\varepsilon}(du) = \varepsilon\left[c(x) + \theta_c^{\varepsilon}(x)\right].$

Знехтувальні члени

$$\sup_{x\in E}\left|\theta_{\bullet}^{\varepsilon}(x)\right| \to 0, \qquad \varepsilon \to 0.$$

Теорема 2. *За умов* **ПА 1-2** *процес накопичення* (3) *слабко збігається до складного процесу Пуассона*

$$\rho^0(t) = u + bt + \sum_{k=1}^{\nu^0(t)} \alpha_k^0, \qquad t \ge 0. \tag{4}$$

Функція розподілу $\Phi^0(u) = \Phi(u)/\Phi(\mathbb{R}) = P(\alpha_k^0 < u)$ незалежних однаково розподілених випадкових величин $\alpha_k^0,\ k \ge 1$, визначається як

$$\Phi(u) = q\int_E \rho(dx)\Phi_x(u), \qquad \Phi_g(x) = \int_{\mathbb{R}} g(u)\Phi_x(du), \qquad g \in C_3(\mathbb{R}).$$

Складний процес Пуассона $\nu^0(t),\ t \ge 0$, задається інтенсивністю

$$\mathrm{E}\nu^0(t) = q_0 t, \qquad q_0 = q\Lambda, \qquad \Lambda := \Phi(\mathbb{R}).$$

Швидкість неперервного зносу

$$b = q(a - \Lambda a^0), \qquad a^0 = \mathrm{E}\alpha_k^0.$$

Середня інтенсивність марковського процесу

$$q = \int_E \pi(dx)q(x), \qquad \pi(dx)q(x) = q\rho(dx),$$

де $\pi(B),\ B \in \mathcal{E}$, – це стаціонарний розподіл марковського процесу $æ(t),\ t \ge 0$.

Передбачувальні характеристики марковського процесу накопичення (МПН). Згідно з теоремою про представлення семимартингалу (див. [4, розд. 2]), передбачувальні характеристики МПН задаються таким чином:

$$b^\varepsilon(t) = \sum_{k=1}^{\nu(t/\varepsilon)} \mathrm{E}\left[\alpha_k^\varepsilon(æ_k) \mid F_{k-1}\right],$$

$$c^\varepsilon(t) = \sum_{k=1}^{\nu(t/\varepsilon)} \mathrm{E}\left[(\alpha_k^\varepsilon(æ_k))^2 \mid F_{k-1}\right],$$

$$\Phi_g^\varepsilon(t) = \sum_{k=1}^{\nu(t/\varepsilon)} \mathrm{E}\left[g(\alpha_k^\varepsilon(æ_k)) \mid F_{k-1}\right], \tag{5}$$

де $F_{k-1} := \sigma\{æ_r,\ r \le k-1\},\ k \ge 1$, – сім'я σ-алгебр.

Згідно з основними припущеннями **ПА 1-2**, передбачувальні характеристики МПН мають такий вигляд:

$$b^\varepsilon(t) = b_0^\varepsilon(t) + \theta_b^\varepsilon(t), \qquad c^\varepsilon(t) = c_0^\varepsilon(t) + \theta_0^\varepsilon(t),$$

$$\Phi_g^\varepsilon(t) = \Phi_{g,0}^\varepsilon(t) + \theta_g^\varepsilon(t),$$

де головні частини є нормалізованими процесами приростів:

$$b_0^\varepsilon(t) = \varepsilon\sum_{k=1}^{\nu(t/\varepsilon)} a(æ_k), \quad c_0^\varepsilon = \varepsilon\sum_{k=1}^{\nu(t/\varepsilon)} c(æ_k), \quad \Phi_{g,0}^\varepsilon(t) = \varepsilon\sum_{k=1}^{\nu(t/\varepsilon)} \Phi_g^\varepsilon(æ_k). \tag{6}$$

Тепер слабка збіжність передбачувальних характеристик (5) еквівалентна слабкій збіжності нормалізованих процесів з приростами (6), яка випливає з теореми 3.2 [7]. Граничні передбачувальні характеристики мають вигляд

$$b^0(t) = a^0 t, \qquad c^0(t) = c^0 t, \qquad \Phi_g^0(t) = \Phi_g^0 t, \tag{7}$$

де

$$a^0 = qa, \qquad c^0 = qc, \qquad \Phi_g^0 = q\Phi_g, \qquad \Phi_g = \Phi_g^0\Lambda, \tag{8}$$

$$a = \int_E \rho(dx)a(x), \qquad c = \int_E \rho(dx)c(x), \qquad \Phi_g = \int_E \rho(dx)\Phi_g(x). \tag{9}$$

Передбачувальні характеристики (7)–(9) визначають граничний складний процес Пуассона (4).

3. Напівмарковський процес накопичення (НМПН). НМПН у схемі серій визначається співвідношенням (як і в (3))

$$\rho^\varepsilon(t) = u + \sum_{k=1}^{\nu(t/\varepsilon)} \alpha_k^\varepsilon(\varkappa_k), \qquad t \ge 0\,, \tag{10}$$

з напівмарковським перемикаючим процесом $\varkappa(t),\, t \ge 0$, який задається напівмарковським ядром [7, розд. 1]

$$Q(x,B,t) = P(x,B)F_x(t), \quad x \in E, \quad B \in \mathcal{E}, \quad t \ge 0\,.$$

Стохастичне ядро $P(x,B),\ x \in E,\ B \in \mathcal{E}$, визначає перехідні ймовірності вкладеного ланцюга Маркова $\varkappa_k,\, k \ge 0$.

Рахуючий процес

$$\nu(t) = \max\{n : \tau_n \le t\}, \qquad n \ge 0\,,$$

визначається моментами відновлення

$$\tau_{n+1} = \tau_n + \theta_{n+1}, \qquad n \ge 0\,,$$

де час між відновленням $\theta_{n+1},\, n \ge 0$, визначається умовними функціями розподілу

$$F_x(t) = P\big(\theta_{n+1} \le t \mid \varkappa_n = x\big) =: P(\theta_x \le t)\,.$$

Основне припущення полягає в тому, що НМП $\varkappa(t),\, t \ge 0$, рівномірно ергодичний зі стаціонарним розподілом $\pi(B),\, B \in \mathcal{E}$, який задовольняє співвідношення

$$\pi(dx)q(x) = q\rho(dx), \qquad q = \int_E \pi(dx)q(x)\,,$$

де усереднена інтенсивність

$$q(x) = \frac{1}{m(x)}, \qquad m(x) = \int_0^\infty \overline{F}_x(t)dt, \qquad \overline{F}_x(t) := 1 - F_x(t)\,.$$

Стаціонарний розподіл $\rho(dx)$ ВЛМ $\varkappa_k,\, k \ge 0$, задовольняє співвідношення

$$\rho(B) = \int_E \rho(dx)P(x,B), \qquad B \in \mathcal{E}, \qquad \rho(E) = 1\,.$$

Сім'я випадкових величин $\alpha_k^\varepsilon(x),\ x \in E,\, k \ge 1$, які є незалежні в сукупності, визначається функцією розподілу $\Phi_x^\varepsilon(du) = P\big(\alpha_k^\varepsilon(x) \in du\big)$.

Теорема 3. *Умови пуассонівської апроксимації такі*:

ПА 1: $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} u\Phi_x^\varepsilon(du) = \varepsilon\big[a(x) + \theta_a^\varepsilon(x)\big], \qquad \int_{\mathbb{R}} u^2\Phi_x^\varepsilon(du) = \varepsilon\big[c(x) + \theta_c^\varepsilon(x)\big]$,

ПА 2: $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} g(u)\Phi_x^\varepsilon(du) = \varepsilon\big[\Phi_g(x) + \theta_g^\varepsilon(x)\big], \qquad g(u) \in C_3(\mathbb{R})$,

де $\displaystyle\Phi_g(x) = \int_{\mathbb{R}} g(u)\Phi_x(du)$.

За умов **ПА 1-2** має місце наступна слабка збіжність:

$$\rho^\varepsilon(t) \Rightarrow \rho^0(t), \qquad \varepsilon \to 0\,.$$

Граничний складний процес Пуассона $\rho^0(t)$ визначається своїми передбачувальними характеристиками

$$b^0(t) = b^0 t, \qquad c^0(t) = c^0 t, \qquad \Phi_g^0(t) = q\Phi_g t\,, \tag{11}$$

де

$$\Phi_g = \int_E \rho(dx)\Phi_g(x) = \Lambda\Phi_g^0, \qquad b^0 = qb, \qquad c^0 = qc\,,$$

$$b = \int_E \rho(dx)a(x), \quad c = \int_E \rho(dx)c(x), \quad \Lambda = \Phi_g(R), \quad \Phi_g = \int_{\mathbb{R}} g(u)\Phi_g(du)\,. \quad (12)$$

Передбачувальні характеристики НМПН (10) мають такий вигляд:

$$b^\varepsilon(t) = \sum_{k=1}^{\nu(t/\varepsilon)} \mathrm{E}\left[\alpha_k^\varepsilon(\varkappa_k) \mid F_{k-1}\right],$$

$$c^\varepsilon(t) = \sum_{k=1}^{\nu(t/\varepsilon)} \mathrm{E}\left[(\alpha_k^\varepsilon(\varkappa_k))^2 \mid F_{k-1}\right],$$

$$\Phi_g^\varepsilon(t) = \sum_{k=1}^{\nu(t/\varepsilon)} \mathrm{E}\left[g(\alpha_k^\varepsilon(\varkappa_k)) \mid F_{k-1}\right]. \quad (13)$$

Відповідно до припущень **ПА 1-2** передбачувальні характеристики (13) мають таке представлення:

$$b^\varepsilon(t) = b_0^\varepsilon(t) + \theta_b^\varepsilon(t), \quad c^\varepsilon(t) = c_0^\varepsilon(t) + \theta_c^\varepsilon(t), \quad \Phi_g^\varepsilon(t) = \Phi_{g,0}^\varepsilon(t) + \theta_g^\varepsilon(t)\,, \quad (14)$$

де

$$b_0^\varepsilon(t) = \varepsilon \sum_{k=1}^{\nu(t/\varepsilon)} a(\varkappa_k), \quad c_0^\varepsilon(t) = \varepsilon \sum_{k=1}^{\nu(t/\varepsilon)} c(\varkappa_k), \quad \Phi_{g,0}^\varepsilon(t) = \varepsilon \sum_{k=1}^{\nu(t/\varepsilon)} \Phi_g(\varkappa_k)\,, \quad (15)$$

та знехтувальні члени $\left|\theta_\bullet^\varepsilon(t)\right| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Тепер процес приростів (15) на ланцюгу Маркова $\varkappa_k, k \ge 0$, слабко збігається при $\varepsilon \to 0$ згідно з теоремою 3.2. [7, розд. 1]

$$b_0^\varepsilon(t) \ \Rightarrow\ \hat{a}t, \qquad c_0^\varepsilon(t) \ \Rightarrow\ \hat{c}t, \qquad \Phi_0^\varepsilon(t) \ \Rightarrow\ \Phi_g t\,.$$

За умов **ПА1-2** та основних припущень має місце така слабка збіжність передбачувальних характеристик:

$$b^\varepsilon(t) \Rightarrow b^0(t), \quad c^\varepsilon(t) \Rightarrow c^0 t, \quad \Phi_g^\varepsilon(t) \Rightarrow \Phi_g t\,,$$

де b^0, c^0 та Φ_g означені в (11), (12).

Граничні передбачувальні характеристики визначають граничний складний процес Пуассона $\rho^0(t)$ в теоремі 3 з передбачувальними характеристиками (11).

4. Процеси накопичення на суперпозиції двох процесів відновлення. Суперпозиція двох процесів відновлення задається двома послідовностями сум (див. [6, розд. 1])

$$\tau_n^{(i)} = \sum_{k=1}^{n} \theta_k^{(i)}, \qquad n \ge 1, \qquad \tau_0^{(i)} = 0, \qquad i = 1,2\,,$$

незалежних однаково розподілених додатних випадкових величин $\theta_k^{(i)}$, $k \ge 1$, $i = 1,2$, які задаються функціями розподілу

$$P_i(t) = P\{\theta_k^{(i)} \le t\}, \quad P_i(0) = 0, \quad i = 1,2\,.$$

Суперпозиція двох процесів відновлення визначається сумою

$$\nu(t) = \nu_1(t) + \nu_2(t)\,, \quad (16)$$

де $\nu_i(t) = \max\{n : \tau_n^{(i)} \le t\}$, $i = 1,2$.

Суперпозицію двох процесів відновлення (16) можна описати за допомогою напівмарковського процесу $\ae(t),\, t \ge 0$, на фазовому просторі

$$E = \{ix,\, i = 1,2,\ x > 0\}, \qquad \theta_{ix} = \theta^{(i)} \wedge x\,.$$

Перша цілозначна компонента i означає індекс моменту відновлення, а друга неперервна компонента $x > 0$ означає час, який залишився до моменту відновлення процесу з іншим індексом. Вкладений ланцюг Маркова $\ae_k = \ae(\tau_k),\, k \ge 0$, задано матрицею перехідних імовірностей (див. [6, § 1.2.4])

$$P = \begin{Vmatrix} P_1(x - dy) & P_1(x + dy) \\ P_2(x + dy) & P_2(x - dy) \end{Vmatrix}. \tag{17}$$

Визначною особливістю вкладеного ланцюга Маркова $\ae_k,\, k \ge 0$, з перехідними ймовірностями (17) є ергодичність зі стаціонарним розподілом

$$\rho_1(dx) = \rho_1 P_2^*(x)\, dx, \qquad \rho_2(dx) = \rho_2 P_1^*(x)\, dx\,,$$

де за означенням

$$P_i^*(x) := \bar{P}_i(x)/m_i\,, \qquad \bar{P}_i(x) := 1 - P_i(x)\,,$$

$$\rho_1 = \rho m_2, \qquad \rho_2 = \rho m_1, \qquad \rho = (m_1 + m_2)^{-1}\,,$$

тут $m_i = E\theta_k^{(i)} = \int\limits_0^\infty \bar{P}_i(x)\, dx\,.$

Процес накопичення на суперпозиції двох процесів відновлення визначається звичайним способом:

$$\rho^\varepsilon(t) = u + \sum_{k=1}^{\nu(t/\varepsilon)} \alpha_k^\varepsilon(\ae_k), \qquad t \ge 0\,.$$

Незалежні однаково розподілені випадкові величини $\alpha_k^\varepsilon(x),\, x \in E$, задаються функціями розподілу

$$\Phi_{ix}^\varepsilon(du) = P\{\alpha_k^\varepsilon(ix) \in du\}, \qquad i = 1,2\,,$$

які задовольняють умови пуассонівської апроксимації:

ПА1: $$\int\limits_{\mathbb{R}} u \Phi_{ix}^\varepsilon(du) = \varepsilon\left[a_i(x) + \theta_{ai}^\varepsilon(x)\right], \qquad i = 1,2\,,$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}} u^2 \Phi_{ix}^\varepsilon(du) = \varepsilon\left[c_i(x) + \theta_{ci}^\varepsilon(x)\right], \qquad i = 1,2\,,$$

ПА2: $$\int\limits_{\mathbb{R}} g(u) \Phi_{ix}^\varepsilon(du) = \varepsilon\left[\Phi_g(ix) + \theta_{gi}^\varepsilon(x)\right], \qquad i = 1,2\,,$$

де

$$\Phi_g(ix) = \int\limits_{\mathbb{R}} g(u) \Phi_{ix}(du), \qquad g(u) \in C_3(\mathbb{R})\,.$$

Наслідок 1. *За умов* **ПА 1-2** *має місце слабка збіжність*

$$\rho_\varepsilon(t) \ \Rightarrow\ \rho^0(t) \quad \text{\textit{при}} \quad \varepsilon \to 0\,.$$

Граничний складний процес Пуассона $\rho^0(t),\, t \ge 0$, визначається ***передбачувальними характеристиками***

$$b_0(t) = q b_0 t, \qquad c_0(t) = q c_0 t, \qquad \Phi_g^0(t) = q \Phi_g^0 t\,,$$

$$b_0 = \rho_1 \mathrm{E} a_1(\theta_2^*) + \rho_2 \mathrm{E} a_2(\theta_1^*), \qquad c_0 = \rho_1 \mathrm{E} c_1(\theta_2^*) + \rho_2 \mathrm{E} c_2(\theta_1^*)\,,$$

$$\Phi_g^0 = \rho_1 \int\limits_0^\infty P_2^*(x) \Phi_g(1x)\, dx + \rho_2 \int\limits_0^\infty P_1^*(x) \Phi_g(2x)\, dx\,.$$

Висновки.

• Асимптотична поведінка стохастичних процесів накопичення з критичними стрибками у випадковому середовищі, що описується марковськими або напівмарковськими процесами, на зростаючих інтервалах часу апроксимується складним процесом Пуассона з неперервним зсувом.

• Критичні випадкові події типу катастроф, великих платежів та інші відбуваються за показниковим розподілом часу події. Отже, в розглянутих моделях стохастичних процесів накопичення передбачення критичних подій неможливе. Можлива лише статистична оцінка інтенсивності критичних подій.

1. *Анісімов В. В.* Збіжність процесів накопичення з перемиканнями // Теорія ймовірностей та мат. статистика. – 2000. – № 63. – С. 3–12.
2. *Жакод Ж., Ширяев А. Н.* Предельные теоремы для случайных процессов: В 2 т. – Москва: Физматлит, 1994. – Т. 1. – 544 с.; – Т. 2. – 368 с.
3. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее применения: В 2 т. – Москва: Мир, 1967. – Т. 2. – 752 с.
4. *Borovskikh Yu. V., Korolyuk V. S.* Martingale approximation. – VSP, 1997.
5. *Cinlar E., Jacod J., Protter P., Sharpe M. J.* Semimartingales and Markov processes // Zeitschift. – 1980. – **54**. – P. 161–219.
6. *Korolyuk V. S., Korolyuk V. V.* Stochastic models of systems. – Kluwer Academic Publishers, 1999.
7. *Korolyuk V. S., Limnios N.* Stochastic systems in merging phase space. – Singapore: World Scientific, 2005.

ПРОЦЕССЫ НАКОПЛЕНИЯ В СХЕМЕ ПУАССОНОВСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ

Дискретные процессы накопления, которые задаются суммами случайных величин на марковских или полумарковских процессах аппроксимируются пуассоновскими процессами с непрерывным сносом на возрастающих интервалах времени.

STORAGE PROCESSES IN POISSON'S APPROXIMATION SCHEME

Discrete storage processes, given by a sum of random variables on Markov and semi-Markov processes, are approximated by Poisson's compound processes on increasing time intervals.

Ін-т математики НАН України, Київ

Одержано
07.03.08