УДК 517.95

Н. І. Білусяк, Б. Й. Пташник

КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ РІВНЯНЬ ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ, НЕРОЗВ'ЯЗНИХ ВІДНОСНО СТАРШОЇ ПОХІДНОЇ ЗА ЧАСОМ

У циліндричній області досліджено однозначну розв'язність крайової задачі з даними на всій границі області для певного класу лінійних рівнянь із частинними похідними вищого порядку, нерозв'язних відносно старшої похідної за часом, зі змінними за просторовими координатами коефіцієнтами. Отримані результати перенесено на випадок, коли рівняння збурено нелінійним доданком в лінійній частині.

Вступ. На відміну від еліптичних рівнянь, крайові задачі з даними на всій границі області для гіперболічних і безтипних (у тому числі нерозв'язних відносно старшої похідної за часом) рівнянь і систем рівнянь не завжди є коректними, а їх розв'язність в обмежених областях пов'язана, взагалі, з проблемою малих знаменників (див., наприклад, [1–8, 11, 13, 14, 16–18] і бібліографію там).

У цій роботі, яка поширює результати праці [5] на випадок змінних коефіцієнтів рівняння, досліджено однозначну розв'язність задачі типу Діріхле в обмеженій циліндричній області для лінійних рівнянь із частинними похідними вищого порядку, нерозв'язних відносно старшої похідної за часом, зі змінними за x коефіцієнтами, збурених нелінійним доданком. Виділено клас рівнянь (в яких порядок диференціювання за x є найвищим при старшій похідній за часом), коли розв'язність задачі не пов'язана з проблемою малих знаменників.

Надалі використовуватимемо такі позначення: $x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$, $s = (s_1, \dots, s_p) \in \mathbb{Z}_+^p$, $|s| = s_1 + \dots + s_p$; $Q = \{(t,x) : t \in (0,T),\ x \in G \in \mathbb{R}^p\}$, де G – обмежена однозв'язна область з гладкою межею ∂G; $\Gamma = \partial G \times [0,T]$; $\mathcal{K}_T = \{(t,\tau) : 0 \le t, \tau \le T\}$; $C^{(r,q)}(\bar{Q})$ – простір функцій $v(t,x)$, які в області $\bar{Q}$ r раз неперервно диференційовні за t та q раз неперервно диференційовні за x, $\| v; C^{(r,q)}(\bar{Q}) \| = \sum_{s_0=0}^{r} \sum_{|s|\le q} \max_{(t,x)\in\bar{Q}} \left| \dfrac{\partial^{s_0+|s|} v(t,x)}{\partial t^{s_0} \partial x_1^{s_1} \dots \partial x_p^{s_p}} \right|$; $C^{j,\nu}$ – клас функцій $w(x)$, визначених в $\bar{G}$ і які мають неперервні похідні до порядку j, які задовольняють умову Гельдера з показником ν, $0 < \nu < 1$, рівномірно в $\bar{G}$; $A^{j,\nu}$ – клас замкнених областей $\bar{G}$, для яких функції, що задають у локальних координатах рівняння межових поверхонь цих областей, належать класу $C^{j,\nu}$.

Випадок лінійного рівняння. В області Q розглядаємо задачу

$$Mu := \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{2n} L^{\beta} u(t,x) + \sum_{r=0}^{n-1} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{2r} \sum_{s=0}^{m} a_s^r L^s u = f(t,x), \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial^{2q} u}{\partial t^{2q}}\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial^{2q} u}{\partial t^{2q}}\right|_{t=T} = 0, \qquad q = 0,1,\dots,n-1, \tag{2}$$

$$\left. L^q u(t,x) \right|_{\Gamma} = 0, \qquad q = 0,1,\dots,\Theta - 1, \tag{3}$$

у якій $a_s^r \in \mathbb{R}$, $a_m^0 \ne 0$, $a_m^1 \ne 0$; $\Theta = \max(\beta, m)$; $n > 1$;

$$L := \sum_{i,j=1}^{p} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(p_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) - q(x)$$

– еліптичний в області G диференціальний вираз, де

$$q(x) \in C^{2\Theta-2,\nu}, \qquad p_{ij}(x) \in C^{2\Theta-1,\nu}, \qquad i,j \in \{1,\dots,n\}, \qquad \nu \in (0,1),$$

$$L^0 u = u, \qquad L^q u = L(L^{q-1}u).$$

Зауважимо, що всі власні значення λ_k, $k \in \mathbb{N}$, задачі

$$LX(x) = -\lambda X(x), \qquad X(x)\big|_{\partial G} = 0, \tag{4}$$

множину яких позначимо через Λ, є різними та додатними, а власні функції $\{X_k(x),\, k \in \mathbb{N}\}$ утворюють повну ортогональну систему в просторі $L_2(G)$ (надалі вважатимемо, що ця система є нормованою); при цьому $X_k(x) \in \in C^{2\Theta}(\bar{G})$ і справджуються такі оцінки [9, 12]:

$$A_0 k^{2/p} \le \lambda_k \le A_1 k^{2/p}, \qquad 0 < A_0 < A_1, \qquad k \in \mathbb{N}, \tag{5}$$

$$\max_{x\in\bar{G}} \left| \frac{\partial^{|s|} X_k(x)}{\partial x_1^{s_1} \dots \partial x_p^{s_p}} \right| \le A_2 \lambda_k^{p/4+|s|/2}, \qquad |s| = 0,1,\dots,\Theta, \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

Зобразимо розв'язок задачі (1)–(3) у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) X_k(x), \tag{7}$$

у якому коефіцієнти $u_k(t)$, $k \in \mathbb{N}$, є відповідно розв'язками таких задач:

$$(-\lambda_k)^{\beta} u_k^{(2n)}(t) + \sum_{r=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{m} a_s^r (-\lambda_k)^s u_k^{(2r)}(t) = f_k(t), \tag{8}$$

$$u_k^{(2q)}(0) = u_k^{(2q)}(T) = 0, \qquad q = 0,1,\dots,n-1, \tag{9}$$

де

$$f_k(t) = \int_G f(t,x) X_k(x)\, dx, \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{10}$$

Позначимо $\bar{f}_k = \max_{0\le t\le T} |f_k(t)|$, $\quad k \in \mathbb{N}$.

Припустимо, що для всіх $\lambda_k \in \Lambda$ корені $\eta_j := \eta_j(\lambda_k)$, $j = 1,\dots,n$, рівняння

$$(-\lambda_k)^{\beta} \eta^n + \sum_{r=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{m} a_s^r (-\lambda_k)^s \eta^r = 0 \tag{11}$$

є різними та відмінними від нуля. Тоді корені характеристичного рівняння

$$(-\lambda_k)^{\beta} \gamma^{2n} + \sum_{r=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{m} a_s^r (-\lambda_k)^s \gamma^{2r} = 0, \tag{12}$$

яке відповідає однорідному рівнянню

$$(-\lambda_k)^{\beta} u_k^{(2n)}(t) + \sum_{r=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{m} a_s^r (-\lambda_k)^s u_k^{(2r)}(t) = 0, \tag{13}$$

є також різними та відмінними від нуля і мають вигляд

$$\gamma_j := \gamma_j(\lambda_k) = \sqrt{|\eta_j(\lambda_k)|}\, \exp\left(i \arg \eta_j(\lambda_k)/2\right), \qquad j = 1,\dots,n,$$

$$\gamma_{n+j} := \gamma_{n+j}(\lambda_k) = -\sqrt{|\eta_j(\lambda_k)|}\, \exp\left(i \arg \eta_j(\lambda_k)/2\right), \qquad j = 1,\dots,n.$$

На підставі оцінок для коренів полінома через його коефіцієнти [15, с. 102] одержуємо

$$\left|\gamma_j(\lambda_k)\right| \le A_3 \lambda_k^{\mu/2}, \qquad j = 1,\dots,2n, \tag{14}$$

де $\mu = \max\big((m-\beta)/n,\, m-\beta\big)$, $A_3 = 2 \max\limits_{r\in\{1,\dots,m\}}\left(\left|\sum\limits_{j=0}^{n-1} a_r^j\right|, 1\right)$.

Фундаментальна система розв'язків рівняння (13) має вигляд

$$\left\{u_{kj}(t) = \exp(\gamma_j t),\ u_{k,n+j}(t) = \exp(-\gamma_j t),\ j = 1,\dots,n\right\},$$

а характеристичний визначник $\Delta(\lambda_k)$ задачі (8), (9) визначається формулою

$$\Delta(\lambda_k) = 2^n \prod_{j=1}^{n} \operatorname{sh}(-\gamma_j T) \prod_{1\le r<s\le n} (\gamma_s^2 - \gamma_r^2)^2 .$$

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі* (1)–(3) *у просторі* $C^{(2n,2\Theta)}(\bar{Q})$ *необхідно й достатньо, щоб виконувались умови*

$$\forall \lambda_k \in \Lambda \quad 1 - \exp\left(2T\sqrt{|\eta_j(\lambda_k)|}\, \exp\left(i \arg \eta_j(\lambda_k)/2\right)\right) \ne 0,\ j = 1,\dots,n. \tag{15}$$

Д о в е д е н н я здійснюється за схемою доведення теореми 2.4 із [13, гл. 2]. ◊

Нехай справджуються умови (15). Тоді для кожного $\lambda_k \in \Lambda$ існує єдина функція Ґріна $G_k(t,\tau) := G(\lambda_k; t,\tau)$ задачі (8), (9), за допомогою якої її розв'язок зображується у вигляді

$$u_k(t) = \int_0^T G_k(t,\tau) f_k(\tau)\, d\tau . \tag{16}$$

У квадраті $\mathcal{K}_T$, крім сторін $\tau = 0$ і $\tau = T$, функції $G_k(t,\tau)$, $k \in \mathbb{N}$, визначаються формулами

$$G_k(t,\tau) = \frac{(-1)^\beta \operatorname{sgn}(t-\tau)}{2} \sum_{j=1}^{n} \frac{\operatorname{sh}(\gamma_j(\tau - t))}{\gamma_j \lambda_k^\beta \prod\limits_{r=1, r\ne j}^{n} (\gamma_r^2 - \gamma_j^2)} +$$

$$+ \sum_{s,j,r=1}^{n} \frac{(-1)^{s+\beta} S_{n-s}^j \gamma_r^{2s-3}\left[\operatorname{sh}(\gamma_j(t-T))\operatorname{sh}(\gamma_r \tau) + \operatorname{sh}(\gamma_j t)\operatorname{sh}(\gamma_r(T-\tau))\right]}{\lambda_k^\beta \prod\limits_{p=1,p\ne j}^{n} (\gamma_p^2 - \gamma_j^2) \prod\limits_{p=1,p\ne r}^{n} (\gamma_p^2 - \gamma_r^2)\operatorname{sh}(\gamma_j T)},$$

$$k \in \mathbb{N}, \tag{17}$$

де S_{n-s}^j – сума всіх можливих добутків елементів $\gamma_1^2,\dots,\gamma_{j-1}^2,\gamma_{j+1}^2,\dots,\gamma_n^2$, взятих у кількості $n-s$ у кожному добутку; $S_0^j := 1$.

На стороні $\tau = 0$ ($\tau = T$) квадрата $\mathcal{K}_T$ функції $G_k(t,\tau)$ довизначаємо за неперервністю справа (зліва).

На підставі формул (7), (16) формальний розв'язок задачі (1)–(3) зображується рядом

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T G_k(t,\tau) f_k(\tau)\, d\tau\, X_k(x) \tag{18}$$

який, взагалі, є розбіжним, оскільки модулі виразів $\operatorname{sh}(\gamma_j(\lambda_k)T)$, $\prod\limits_{q=1,q\ne j}^{n} \left(\gamma_q^2(\lambda_k) - \gamma_j^2(\lambda_k)\right)$, $j = 1,\dots,n$, які входять у знаменники формул (17), будучи відмінними від нуля, можуть набувати як завгодно малих значень для нескінченної множини значень $\lambda_k \in \Lambda$. Тому в загальному випадку існування розв'язку задачі (1)−(3) пов'язане з проблемою малих знаменників.

Для дослідження питання про існування класичного розв'язку задачі (1)−(3) потрібні будуть наступні допоміжні твердження.

Лема 1. *Якщо* $\beta > m$, *то для всіх (крім скінченного числа)* $\lambda_k \in \Lambda$ *справджуються оцінки*

$$\left|\gamma_j^2(\lambda_k)\right| \geq A_4 \lambda_k^{(m-\beta)/n}, \quad A_4 = \frac{1}{2}\left|a_m^0\right| A_3^{-2(n-1)}, \qquad j = 1,\ldots,n. \tag{19}$$

Д о в е д е н н я. На підставі рівняння (12), згідно з теоремою Вієта, отримуємо нерівність

$$\left|\prod_{q=1}^{n}\gamma_q^2(\lambda_k)\right| = \left|(-1)^n \sum_{s=0}^{m} a_s^0(-\lambda_k)^{s-\beta}\right| \geq$$

$$\geq \left|\left|a_m^0\right|\lambda_k^{m-\beta} - \left|\sum_{s=0}^{m-1} a_s^0(-\lambda_k)^{s-\beta}\right|\right| \geq \frac{1}{2}\left|a_m^0\right|\lambda_k^{m-\beta}, \tag{20}$$

яка правильна для всіх тих $\lambda_k \in \Lambda$, які справджують нерівність

$$\frac{1}{2}\left|a_m^0\right|\lambda_k^{m-\beta} - \left|\sum_{s=0}^{m-1} a_s^0(-\lambda_k)^{s-\beta}\right| \geq 0.$$

Із нерівностей (14) і (20) випливає, що для всіх (крім скінченного числа) $\lambda_k \in \Lambda$

$$\left|\gamma_j^2(\lambda_k)\right| = \frac{\left|\prod_{q=1}^{n}\gamma_q^2(\lambda_k)\right|}{\left|\prod_{q=1, q\neq j}^{n}\gamma_q^2(\lambda_k)\right|} \geq \frac{1}{2}\left|a_m^0\right| A_3^{-2(n-1)}\,\lambda_k^{(m-\beta)/n}, \qquad j = 1,\ldots,n.$$

Лему доведено. ◊

Лема 2. *Якщо* $\beta \leq m$, *то для всіх (крім скінченного числа)* $\lambda_k \in \Lambda$ *справджуються оцінки*

$$\left|\gamma_j^2(\lambda_k)\right| \geq A_4 \lambda_k^{(m-\beta)(2-n)}, \qquad j = 1,\ldots,n. \tag{21}$$

Д о в е д е н н я проводиться за схемою доведення леми 1. ◊

Лема 3. *Якщо* $\beta > m$, *то для всіх (крім скінченного числа)* $\lambda_k \in \Lambda$ *справджуються оцінки*

$$\left|\prod_{q=1, q\neq j}^{n}\left(\gamma_q^2(\lambda_k) - \gamma_j^2(\lambda_k)\right)\right| \geq A_5 \lambda_k^{(m-\beta)(n-1)/n}, \qquad j = 1,\ldots,n, \tag{22}$$

де $A_5 = \frac{n}{2} A_4^{n-1}$, A_4 *− стала з формули* (19).

Д о в е д е н н я. Зауважимо, що якщо x_j, $j = 1,\ldots,n$, − корені многочлена $P(x) = x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n$, то

$$P'(x_j) = (-1)^{n-1}\prod_{q=1, q\neq j}^{n}(x_q - x_j), \qquad j = 1,\ldots,n. \tag{23}$$

На підставі (12) і (23) отримуємо

$$\prod_{q=1,q\neq j}^{n}\left(\gamma_q^2(\lambda_k)-\gamma_j^2(\lambda_k)\right)=(-1)^{n-1}\left[n\gamma_j^{2(n-1)}+\sum_{r=0}^{n-2}(r+1)\sum_{s=0}^{m}a_s^{r+1}(-\lambda_k)^{s-\beta}\gamma_j^{2r}\right],$$

$$j=1,\dots,n. \qquad (24)$$

Із формули (24) та леми 1 випливає, що для всіх (крім скінченного числа) $\lambda_k\in\Lambda$ справджуються нерівності

$$\left|\prod_{q=1,q\neq j}^{n}\left(\gamma_q^2(\lambda_k)-\gamma_j^2(\lambda_k)\right)\right|\geq$$

$$\geq\left|\frac{n}{2}\left|\gamma_j^2\right|^{(n-1)}+\left(\frac{n}{2}\left|\gamma_j^2\right|^{(n-1)}-\left|\sum_{r=0}^{n-2}(r+1)\sum_{s=0}^{m}a_s^{r+1}(-\lambda_k)^{s-\beta}\gamma_j^{2r}\right|\right)\right|\geq$$

$$\geq\frac{n}{2}\left|\gamma_j^2\right|^{(n-1)}\geq\frac{n}{2}A_4^{n-1}\lambda_k^{(m-\beta)(n-1)/n},\qquad j=1,\dots,n. \qquad (25)$$

Лему доведено. ◊

Лема 4. *Якщо* $\beta\leq m$, *то для майже всіх* (*стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}^{n-1}$) *векторів* $a_m=\left(a_m^1,\dots,a_m^{n-1}\right)$ *і для довільних фіксованих решти коефіцієнтів рівняння* (1) *нерівності*

$$\left|\prod_{q=1,q\neq j}^{n}\left(\gamma_q^2(\lambda_k)-\gamma_j^2(\lambda_k)\right)\right|\geq\lambda_k^{m-\beta-p/2-\varepsilon},\quad 0<\varepsilon<1,\quad j=1,\dots,n, \qquad (26)$$

справджуютьcя для всіх (*крім скінченного числа*) $\lambda_k\in\Lambda$.

Д о в е д е н н я. Для кожного $j\in\{1,\dots,n\}$ праву частину відповідної з рівностей (24) позначимо через $F_j(a_m)$. Нехай B_j − множина тих векторів a_m, для яких нерівність

$$\left|F_j(a_m)\right|<\lambda_k^{m-\beta-p/2-\varepsilon} \qquad (27)$$

справджується для нескінченної множини значень $\lambda_k\in\Lambda$, а $B_j(\lambda_k)$ − множина тих векторів a_m, для яких нерівність (27) правильна при фіксованому $\lambda_k\in\Lambda$. Очевидно, що

$$\left|\frac{\partial F_j(a_m)}{\partial a_m^1}\right|=\lambda_k^{m-\beta},\qquad j=1,\dots,n. \qquad (28)$$

Розглянемо деякий паралелепіпед $P_{n-1}=[\alpha_1,\beta_1]\times P_{n-2}\subset\mathbb{R}^{n-1}$. На підставі (28) та леми 2.2 із [13, гл. 1] отримуємо, що міра множини $B_j(\lambda_k,a_m')$ тих значень $a_m^1\in[\alpha_1,\beta_1]$, для яких справджується нерівність (27) (при фіксованих коефіцієнтах $a_m^2,\dots,a_m^{n-1}$), має таку оцінку:

$$\operatorname{mes}B_j(\lambda_k,a_m')\leq C_1\lambda_k^{-p/2-\varepsilon}\leq C_1A_1^{-p/2-\varepsilon}k^{-1-2\varepsilon/p}. \qquad (29)$$

Інтегруючи оцінку (29) за змінними $a_m^2,\dots,a_m^{n-1}$ по паралелепіпеду P_{n-2}, отримуємо

$$\operatorname{mes}B_j(\lambda_k)\leq C_2(C_1,A_1,n)k^{-1-2\varepsilon/p},\qquad\varepsilon>0.$$

Оскільки ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{mes}B_j(\lambda_k)$ є збіжним, то на підставі леми Бореля − Кантелі (див. лему 2.1 із [13, гл. 1]) міра кожної множини B_j, $j=1,\dots,n$, дорівнює нулеві. Отже, для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^{n-1}$) векторів $a_m \in P_{n-1}$ виконуються нерівності (26) для всіх (крім скінченного числа) $\lambda_k \in \Lambda$. Враховуючи, що простір $\mathbb{R}^{n-1}$ можна покрити зліченним числом $(n-1)$-вимірних паралелепіпедів, отримуємо доведення леми. ◊

Лема 5. *Якщо* $\beta > m$, *то для всіх (крім скінченного числа)* $\lambda_k \in \Lambda$ *справджуються оцінки*

$$\max_{0\le t\le T}\left|\frac{\operatorname{sh}(\gamma_j(\lambda_k)t)}{\operatorname{sh}(\gamma_j(\lambda_k)T)}\right| \le A_6, \qquad j = 1,\dots,n, \tag{30}$$

де $A_6 = 19\pi\sqrt{2}/12$.

Д о в е д е н н я здійснюється за схемою доведення леми 2 з [3]. ◊

Лема 6. *Якщо* $\beta \le m$, *то для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) чисел* T *оцінки*

$$\max_{0\le t\le T}\left|\frac{\operatorname{sh}(\gamma_j(\lambda_k)t)}{\operatorname{sh}(\gamma_j(\lambda_k)T)}\right| \le A_7\lambda_k^{p/2+\varepsilon}, \qquad 0<\varepsilon<1, \qquad j = 1,\dots,n, \tag{31}$$

справджуються для всіх (крім скінченного числа) $\lambda_k \in \Lambda$.

Д о в е д е н н я здійснюється за схемою доведення теореми 7 із [3]; при цьому використовуються оцінки (14). ◊

Теорема 2. *Нехай* $\beta > m$, *справджуються умови* (15), $f \in C^{(0,2h_1)}(\bar{Q})$, $L^q f(t,x)\big|_{\Gamma} = 0$, $q = 0,1,\dots,h_1-1$, *де* $h_1 = \left[(\beta-m)(2n-1)/(2n)+p\right]+1$. *Тоді існує розв'язок задачі* (1)–(3) *з простору* $C^{(2n,2\beta)}(\bar{Q})$, *який неперервно залежить від* $f(t,x)$.

Д о в е д е н н я. На підставі формул (17), оцінок (14) (при $\beta > m$) та лем 1, 3, 5 отримуємо

$$\max_{0\le t\le T}\left|\frac{d^q}{dt^q}\int_0^T G_k(t,\tau)f_k(\tau)\,d\tau\right| \le A_8\lambda_k^{((\beta-m)(2n-q-1)-2n\beta)/(2n)}\bar{f}_k, \quad k\in\mathbb{N}, \tag{32}$$

де $q = 0,1,\dots,2n$, $A_8 = 2n\max\left(A_3^{2n}A_4^{-1/2}A_5^{-1},\, n^2A_3^{4n-3}A_5^{-2}A_6\right)\exp(A_3T)$.

За умов теореми на підставі (6), (10) отримуємо оцінки

$$\bar{f}_k \le A_2 \operatorname{mes} G\lambda_k^{-h_1+p/4}\|f\|_{C^{(0,2h_1)}(\bar{Q})}, \qquad k\in\mathbb{N}. \tag{33}$$

Із формули (18) та нерівностей (5), (6), (32), (33) одержуємо таку оцінку для норми розв'язку задачі (1)–(3):

$$\|u\|_{C^{(2n,2\beta)}(\bar{Q})} = \sum_{s_0=0}^{2n}\sum_{|s|\le 2\beta}\max_{\bar{Q}}\left|\frac{\partial^{s_0+|s|}\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^T G_k(t,\tau)f_k(\tau)\,d\tau\,X_k(x)}{\partial t^{s_0}\partial x_1^{s_1}\dots\partial x_p^{s_p}}\right| \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s_0=0}^{2n}\sum_{|s|\le 2\beta}\max_{0\le t\le T}\left|\frac{\partial^{s_0}}{\partial t^{s_0}}\int_0^T G_k(t,\tau)f_k(\tau)\,d\tau\right|\max_{x\in\bar{G}}\left|\frac{\partial^{|s|}X_k(x)}{\partial x_1^{s_1}\dots\partial x_p^{s_p}}\right| \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s_0=0}^{2n}\sum_{|s|\le 2\beta}A_2\lambda_k^{p/4+|s|/2}A_8\lambda_k^{[(\beta-m)(2n-s_0-1)-2n\beta]/(2n)}\bar{f}_k \le$$

$$\le (2n+1)(2\beta+1)^p A_2^2A_8\operatorname{mes} G\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{(\beta-m)(2n-1)/(2n)+p/2-h_1}\|f\|_{C^{(0,2h_1)}(\bar{Q})} \le$$

$$\le (2n+1)(2\beta+1)^p A_2^2A_8\operatorname{mes} G\,K(\delta_1)\|f\|_{C^{(0,2h_1)}(\bar{Q})} := \rho, \tag{34}$$

де $\delta_1 = 2h_1/p - 2 - (\beta - m)(2n-1)/(np)$, $K(\delta_1) = A_1^{(-1-\delta_1)p/2}\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{-1-\delta_1}$. Оскільки $\delta_1 > 0$, то з нерівності (34) випливає доведення теореми. ◊

При дослідженні розв'язності задачі (1)–(3) у випадку $\beta \le m$ будемо використовувати такі простори:

$$B_\delta^\omega = \left\{ \varphi(x) \in L_2(G) : \varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k X_k(x), \ \ \|\varphi\|_{B_\delta^\omega} = \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k| \exp(\delta k^\omega) < \infty \right\},$$

$C^z([0,T], B_\delta^\omega)$ – простір функцій $u(t,x)$, визначених в області $\bar{Q}$, таких, що для кожного $t \in [0,T]$ похідна $\dfrac{\partial^j u(t,x)}{\partial t^j}$ належить простору B_δ^ω і неперервна за t в нормі цього простору

$$\|u\|_{C^z([0,T],B_\delta^\omega)} = \sum_{r=1}^{z} \sum_{k=1}^{\infty} \max_{0 \le t \le T} \left| u_k^{(r)}(t) \right| \exp(\delta k^\omega),$$

де $u_k(t) = \int\limits_G u(t,x) X_k(x)\, dx$.

Теорема 3. *Нехай* $\beta \le m$ *та справджуються умови* (15). *Якщо* $f \in$ $\in C([0,T], B_{h_2}^{(m-\beta)/p})$, $h_2 > 2A_3 A_1^{(m-\beta)/2} T$, *то для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}^{n-1}$) *векторів* $a_m = (a_m^1, \dots, a_m^{n-1})$ *і для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$) *чисел* T *існує розв'язок задачі* (1)–(3) *з простору* $C^{(2n,2m)}(\bar{D})$, *який неперервно залежить від* $f(t,x)$.

Д о в е д е н н я. На підставі (17), оцінок (5), (14) (при $\beta \le m$) та лем 2, 4, 6 отримуємо, що для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^{n-1}$) векторів $a_m = (a_m^1, \dots, a_m^{n-1})$ та для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел T справджуються оцінки

$$\max_{0 \le t \le T} \left| \frac{d^q}{dt^q} \int_0^T G_k(t,\tau) f_k(\tau)\, d\tau \right| \le$$
$$\le A_9 \lambda_k^{(m-\beta)(2n-7+q)/2 - \beta + 3p/2 + \varepsilon} \exp\left(2A_3 A_1^{(m-\beta)/2} T k^{(m-\beta)/p}\right) \bar{f}_k, \quad (35)$$

де $q = 0, 1, \dots, 2n$, $A_9 = A_9(n, T, A_3, A_7)$.

На підставі формули (18) і нерівностей (5), (6), (35), скориставшись елементарною нерівністю $d^\sigma \le C_3(\sigma) \exp(\delta d)$, яка при $0 < d \le \infty$ справджується для довільних $\sigma > 0$ та $\delta > 0$, одержуємо таку оцінку для норми розв'язку задачі (1)–(3):

$$\|u\|_{C^{(2n,2m)}(\bar{Q})} = \sum_{s_0=0}^{2n} \sum_{|s| \le 2m} \max \left| \frac{\partial^{s_0 + |s|} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_0^T G_k(t,\tau) f_k(\tau)\, d\tau\, X_k(x)}{\partial t^{s_0} \partial x_1^{s_1} \dots \partial x_p^{s_p}} \right| \le$$
$$\le \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s_0=0}^{2n} \sum_{|s| \le 2m} \max_{0 \le t \le T} \left| \frac{d^{s_0}}{dt^{s_0}} \int_0^T G_k(t,\tau) f_k(\tau)\, d\tau \right| \max_{x \in \bar{G}} \left| \frac{\partial^{|s|} X_k(x)}{\partial x_1^{s_1} \dots \partial x_p^{s_p}} \right| \le$$
$$\le \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s_0=0}^{2n} \sum_{|s| \le 2m} A_2 A_9 \lambda_k^{|s|/2 + (m-\beta)(2n-7+s_0)/2 - \beta + 7p/4 + \varepsilon} \times$$
$$\times \exp\left(2A_3 A_1^{(m-\beta)/2} T k^{(m-\beta)/p}\right) \bar{f}_k \le A_{10} \|f\|_{C([0,T], B_{h_2}^{(m-\beta)/p})}, \quad (36)$$

де $A_{10} = A_{10}(m, n, p, \beta, A_1, A_2, A_9)$. Теорему доведено. ◊

Випадок слабко нелінійного рівняння. Розглянемо тепер задачу з умовами (2),(3) для рівняння

$$Mu = f(t,x) + \varepsilon\Phi\big(t,x,u(t,x)\big), \tag{37}$$

де оператор M визначено формулою (1), $\beta > m$, $\Theta = \beta$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \neq 0$; функція $\Phi(t,x,u)$ визначена та неперервна за змінною t і досить гладка за x, u в замкненій області

$$Q_1 = \{(t,x,u) : (t,x) \in \bar{Q},\ u \in \bar{S}(u^0, r)\},$$

де

$$\bar{S}(u^0, r) = \{u \in C^{(2n,2\beta)}(\bar{Q}) : \|u - u^0\|_{C^{(2n,2\beta)}(\bar{Q})} \le r\},$$

$u^0 := u^0(t,x)$ − розв'язок задачі (1)−(3).

Задача (2), (3), (37) еквівалентна нелінійному інтегральному рівнянню

$$u(t,x) = u^0(t,x) + \varepsilon \int_Q K(t,x,\tau,\xi)\Phi(\tau,\xi,u(\tau,\xi))\,d\tau\,d\xi \tag{38}$$

за умови, що ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} G_k(t,\tau)X_k(x)X_k(\xi) \tag{39}$$

рівномірно збігається в області $\bar{Q} \times \bar{Q}$ до функції $K(t,x,\tau,\xi)$.

На підставі (5), (6), (17) та лем 1, 3, 5 отримуємо оцінку

$$\max_{\bar{Q}\times\bar{Q}} |G_k(t,\tau)X_k(x)X_k(\xi)| \le A_2^2 A_8 \lambda_k^{[(\beta-m)(2n-1)-2n\beta]/(2n)+p/2},$$

звідки випливає, що ряд (39) рівномірно збігається в області $\bar{Q} \times \bar{Q}$ при

$$\beta > \max(m,\, 2np - 2nm + m).$$

Запишемо рівняння (38) у вигляді операторного рівняння

$$u(t,x) = A_{u_0} u(t,x),$$

де A_v − нелінійний інтегральний оператор, визначений у кулі $\bar{S}(u^0, r)$ формулою

$$A_v u(t,x) := v(t,x) + \varepsilon \int_Q K(t,x,\tau,\xi)\Phi\big(\tau,\xi,u(\tau,\xi)\big)\,d\tau\,d\xi. \tag{40}$$

Позначимо

$$\bar{\Phi} = \max_{0\le|s|+s_0\le 2\beta}\ \max_{Q_1} \left| \frac{\partial^{|s|+s_0}\Phi(t,x,u)}{\partial u^{s_0}\partial x_1^{s_1}\dots\partial x_p^{s_p}} \right|,$$

$$\psi = (2n+1)(2\beta+1)^p A_2^2 A_8 A_{11} K(\delta_2) \operatorname{mes} G \times$$
$$\times \max\left\{ \max_{1\le i,j\le p} \|p_{ij}(x)\|_{C^{2\beta-1}(\bar{G})},\ \|q(x)\|_{C^{2\beta-2}(\bar{G})} \right\} \bar{\Phi}(1 + r + \rho)^{2\beta},$$

де A_2, A_8, ρ − сталі з оцінок (6), (32), (34); $\delta_2 = 2\beta/p - 2 - (\beta - m)(2n-1)/(np)$; $K(\delta_2) = A_1^{(-1-\delta_2)p/2} \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1-\delta_2}$; $A_{11} = A_{11}(\beta, p)$ − кількість доданків у виразі $L^\beta(\Phi(t,x,u(t,x)))$,

$$\varepsilon_1 = \min\left(\frac{r}{\psi},\ \frac{1}{\psi}\right).$$

Теорема 4. *Нехай* $\beta > \max(m, 2n + 2np - 2nm + m)$, *виконуються умови теореми 2, а функція* $\Phi(t,x,u)$ *в області* Q_1 *неперервна за* t *та має неперервні похідні за змінними* x, u *до порядку* 2β, *причому для довільної* $u \in \bar{S}(u^0, r)$ *справджуються умови* $\left.\dfrac{\partial^{|s|+s_0}\Phi(t,x,u)}{\partial u^{s_0}\partial x_1^{s_1}\ldots\partial x_p^{s_p}}\right|_\Gamma = 0$, $|s| + s_0 = 0,1,\ldots,\ldots,2\beta-2$. *Тоді для всіх* ε *таких, що* $|\varepsilon| < \varepsilon_1$, *існує єдиний розв'язок задачі* (2), (3), (37), *який належить кулі* $\bar{S}(u^0, r) \subset C^{(2n,2\beta)}(\bar{Q})$ *і неперервно залежить від функції* $f(t,x)$.

Д о в е д е н н я. Нехай $|\varepsilon|\psi < r$. Позначимо через V сукупність функцій $v \in C^{(2n,2\beta)}(\bar{Q})$, для яких

$$\left\|v - u^0\right\|_{C^{(2n,2\beta)}(\bar{Q})} \le \chi := r - |\varepsilon|\psi .$$

Покажемо, що для довільної функції $v(t,x)$ із V оператор A_v переводить кулю $\bar{S}(u^0, r)$ в себе. Нехай $u \in \bar{S}(u^0, r)$. Тоді

$$\Phi(t,x,u(t,x)) = \sum_{k=1}^{\infty}\Phi_k(t)X_k(x),$$

де

$$\Phi_k(t) = \int_G \Phi(t,x,u(t,x))X_k(x)\,dx, \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{41}$$

За умов теореми, на підставі формули (41) та правила диференціювання складної функції, знаходимо

$$\max_{0\le t\le T}|\Phi_k(t)| \le A_{11}A_2 \operatorname{mes} G \max\left\{\max_{1\le i,j\le p}\left\|p_{ij}(x)\right\|_{C^{2\beta-1}(\bar{G})}, \left\|q(x)\right\|_{C^{2\beta-2}(\bar{G})}\right\}\times$$
$$\times\left(1 + \|u\|_{C^{(2n,2\beta)}(\bar{Q})}\right)^{2\beta}\bar{\Phi}\lambda_k^{-\beta+p/4} \le A_{11}A_{12}\left(1 + \left\|u - u^0\right\|_{C^{(2n,2\beta)}(\bar{Q})} + \right.$$
$$\left. + \left\|u^0\right\|_{C^{(2n,2\beta)}(\bar{Q})}\right)^{2\beta}\lambda_k^{-\beta+p/4} \le A_{11}A_{12}(1 + r + \rho)^{2\beta}\lambda_k^{-\beta+p/4},$$
$$k \in \mathbb{N}, \tag{42}$$

де

$$A_{12} = \bar{\Phi}A_2 \operatorname{mes} G \max\left\{\max_{1\le i,j\le p}\left\|p_{ij}(x)\right\|_{C^{2\beta-1}(\bar{G})}, \left\|q(x)\right\|_{C^{2\beta-2}(\bar{G})}\right\},$$

а ρ – стала з нерівності (34).

Із формули (40), враховуючи оцінки (5), (6), (32), (42), отримуємо

$$\left\|A_v u(t,x) - u^0(t,x)\right\|_{C^{(2n,2\beta)}(\bar{Q})} \le \left\|v - u^0\right\|_{C^{(2n,2\beta)}(\bar{Q})} +$$
$$+ |\varepsilon|\left\|\int_Q \sum_{k\in\mathbb{N}} G_k(t,\tau)\Phi(\tau,\xi,u(\tau,\xi))X_k(x)X_k(\xi)\,d\tau\,d\xi\right\|_{C^{(2n,2\beta)}(\bar{Q})} \le$$
$$\le \chi + |\varepsilon|\sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{s_0\le 2n}\sum_{|s|\le 2\beta} A_2\lambda_k^{p/4+|s|/2}\max_{0\le t\le T}\left|\frac{\partial^{s_0}}{\partial t^{s_0}}\int_0^T G_k(t,\tau)\Phi_k(\tau)\,d\tau\right| \le$$
$$\le \chi + |\varepsilon|(2n+1)(2\beta+1)^p A_2^2 A_8 K(\delta_1)A_{11} \operatorname{mes} G \times$$
$$\times\max\left\{\max_{1\le i,j\le p}\left\|p_{ij}(x)\right\|_{C^{2\beta-1}(\bar{G})}, \left\|q(x)\right\|_{C^{2\beta-2}(\bar{G})}\right\}\bar{\Phi}(1 + r + \rho)^{2\beta} =$$
$$= \chi + |\varepsilon|\psi = r .$$

Покажемо тепер, що для довільної функції $v \in V$ оператор A_v є оператором стиску, якщо $|\varepsilon| < \frac{1}{\psi}$. Нехай $u_1, u_2 \in \bar{S}(u^0, r)$. Із формули (40), враховуючи оцінки (5), (6), (32), (42) та формулу Лагранжа про скінченні прирости, одержуємо оцінку

$$\|A_v u_1(t,x) - A_v u_2(t,x)\|_{C^{(2n,2\beta)}(\bar{Q})} =$$

$$= |\varepsilon| \left\| \int_Q K(t,x,\tau,\xi)\big(\Phi(t,x,u_1(t,x)) - \Phi(t,x,u_2(t,x))\big)\, d\tau\, d\xi \right\|_{C^{(2n,2\beta)}(\bar{Q})} \le$$

$$\le |\varepsilon| \, \|u_2 - u_1\|_{C^{(2n,2\beta)}(\bar{Q})} (2n+1)(2\beta+1)^p A_2^2 A_8 A_{11} K(\delta_2) \operatorname{mes} G \times$$

$$\times \max\left\{ \max_{1\le i,j \le p} \|p_{ij}(x)\|_{C^{2\beta-1}(\bar{G})}, \|q(x)\|_{C^{2\beta-2}(\bar{G})} \right\} \bar{\Phi}(1 + r + \rho)^{2\beta} =$$

$$= |\varepsilon|\, \psi\, \|u_2 - u_1\|_{C^{(2n,2\beta)}(\bar{Q})}.$$

Якщо $|\varepsilon|\psi < 1$, то A_v є оператором стиску. Крім того, оператор A_v неперервний за v. Тому, згідно з теоремами 1 та 3 [10], рівняння (38), а разом з ним і задача (2), (3), (37) має єдиний розв'язок, який належить кулі $\bar{S}(u^0, r)$ і неперервно залежить від $f(t,x)$. Теорему доведено. ◊

Робота підтримана Державним фондом фундаментальних досліджень України (проект № 14.1/017).

1. *Арнольд В. И.* Малые знаменатели. 1. Об отображении окружности на себя // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1961. – **25**, № 1. – С. 21–86.
2. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1965. – 798 с.
3. *Білусяк Н. І., Комарницька Л. І., Пташник Б. Й.* Задача типу Діріхле для систем рівнянь із частинними похідними, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 12. – С. 1592–1602.
4. *Білусяк Н. І., Пташник Б. Й.* Крайова задача для слабко нелінійних гіперболічних рівнянь зі змінними коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 9. – С. 1281–1286.
5. *Білусяк Н. І., Пташник Б. Й.* Крайова задача для слабко нелінійних рівнянь із нерозв'язною відносно старшої похідної лінійною частиною // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – **48,** № 3. – С. 7–15.
6. *Білусяк Н. І., Пташник Б. Й.* Крайова задача з даними на всій границі області для слабко нелінійних гіперболічних рівнянь // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 2. – С. 244–249.
7. *Бобик І. О., Пташник Б. Й.* Крайові задачі для гіперболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 7. – С. 795–802.
8. *Бурский В. П.* Методы исследования граничных задач для общих дифференциальных уравнений. – Киев: Наук. думка, 2002. – 315 с.
9. *Ильин В. А., Шишмарев И. А.* Равномерные в замкнутой области оценки для собственных функций эллиптического оператора и их производных // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1960. – **24**. – С. 883–896.
10. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. – Москва: Наука, 1977. – 742 с.
11. *Комарницька Л. І., Пташник Б. Й.* Крайові задачі для диференціального рівняння, не розв'язаного відносно старшої похідної за часом // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 9. – С. 1197–1208.
12. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. – Москва: Наука, 1983. – 424 с.
13. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1984. – 264 с.
14. *Романко В. К.* Граничные задачи для общих дифференциальных операторов с выделенной переменной: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – Москва, 1980. – 26 с.

15. *Фаддєєв Д. К., Сомінський І. С.* Збірник задач з вищої алгебри. – Київ: Вища шк., 1971. – 316 с.
16. *Nguyen Nhan, Ardema M.* Optimality of hyperbolic partial differential equations with dynamically constrained periodic boundary control-a flow control application // J. Dynamic Systems, Measurement and Control. – 2006. – **128**, No. 4. – P. 946–959.
17. *Schaeffer D. G., Shearer M., Witelski T. P.* Boundary-value problems for hyperbolic equations related to steady granular flow // Math. and Mech. of Solids. – 2007. – **12**, No. 6. – P. 665–699.
18. *Sviridyuk G. A., Fedorov V. E.* Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators. – Zeist: VSP, 2003. – 268 p.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ, НЕРАЗРЕШИМЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО СТАРШЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ ПО ВРЕМЕНИ

В цилиндрической области исследована однозначная разрешимость краевой задачи с условиями на всей границе области для некоторого класса линейных уравнений в частных производных высшего порядка, неразрешимых относительно старшей производной по времени, с переменными по пространственным координатам коэффициентами. Полученные результаты перенесены на случай уравнения, возмущенного нелинейным слагаемым в линейной части.

BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR EQUATIONS WITH VARIABLE COEFFICIENTS NOT SOLVED RELATIVE TO THE HIGHEST DERIVATIVE WITH RESPECT TO TIME

The conditions of existence of unique solution to the boundary-value problem with data on all boundary of cylindrical domain for some class of linear partial equations, not solved relative to the highest derivative with respect to time, are established. Obtained results are extended to the case of equation, disturbed by nonlinear component at the linear part.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
16.04.08