

## ЗАДАЧІ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ З НЕПОВНІСТЮ ВИЗНАЧЕНИМИ ГРАНИЧНИМИ УМОВАМИ

*Можливість побудови аналітичних розв'язків граничних задач математичної фізики для неканонічних областей важлива з точки зору створення ефективних алгоритмів кількісної оцінки характеристик досліджуваних полів. Використання методу суперпозиції дає можливість розглянути широке коло конкретних проблем на основі введеного поняття загального розв'язку граничної задачі. Однак при цьому можуть виникати труднощі при побудові алгоритмів розрахунків, пов'язані з неповною визначеністю граничних умов на проміжках ортогональності функцій, що входять у загальний розв'язок. У роботі даються приклади задач, у яких такі труднощі виникають, досліджується їх природа та методи подолання. Наведено кількісні оцінки точності побудованих розв'язків.*

Ярослав Степанович Підстригач був вченим з надзвичайно широким діапазоном наукових інтересів. Його працями збагачено ряд розділів сучасної механіки, створено нові математичні моделі для кількісного опису термодинамічних, хвильових процесів, процесів деформування пружних тіл з ускладненими фізико-механічними характеристиками [6]. Практична робота в рамках нових моделей вимагала розвинення нових підходів до побудови розв'язків відповідних граничних задач. Цим зумовлено великий інтерес Ярослава Степановича до математичних проблем, перш за все, до проблем математичної фізики. Ця обставина певною мірою визначила тематику цієї статті. Автору, який мав можливість спілкуватися з Я. С. Підстригачем і обговорювати проблеми розвитку механіки, здається, що реакція Ярослава Степановича на зміст статті була б такою: «Це цікаво».

**1. Поняття загального розв'язку граничної задачі.** Виклад основного змісту статті доцільно попередити коротким викладом змісту важливого для подальшого поняття. Загальновідомо, що, на відміну від граничних (початкових) задач для звичайних диференціальних рівнянь, поняття загального розв'язку рівняння в частинних похідних не має сенсу. Разом з тим, для широкого кола граничних задач математичної фізики досить змістовним є поняття загального розв'язку граничної задачі. Можливість конструктивного підходу тут визначається тим, що при формулюванні граничної задачі, крім основних рівнянь, задається і форма області. Якщо для відповідних рівнянь є можливою побудова певних часткових розв'язків, то для ряду канонічних областей можливо утворити набори таких розв'язків, які задовольняють дві умови. По-перше, суперпозиція таких розв'язків з певними ваговими коефіцієнтами дозволяє в певному сенсі точно виконати граничні умови задачі. По-друге, при зміні граничних умов для даної області в розв'язку задачі зміняться лише значення числових коефіцієнтів. Ці досить загальні формулювання стають зовсім прозорими, якщо їх доповнити конкретним прикладом.

Розглянемо найпростішу двовимірну граничну задачу для рівняння Лапласа в крузі. Треба знайти значення функції  $\varphi(r, \theta)$ , яка задовольняє рівняння Лапласа в крузі  $r < r_0$  і приймає на границі наперед задані значення  $\varphi(r_0, \theta) = \Phi(\theta)$ . Для цього випадку можна вказати дійсно загальний розв'язок задачі у вигляді нескінченного ряду

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) r^n. \quad (1)$$

Довільні коефіцієнти  $A_n$  і  $B_n$  в цьому представленні легко визначаються

для заданої функції  $\Phi(\theta)$ . Загальність розв'язку розуміється в тому сенсі, що структура та функціональний склад виразу (1) не змінюється при зміні значення шуканої функції на границі круга. Та обставина, що при певних умовах деякі із коефіцієнтів в (1) можуть бути нулями не ставить під сумнів висловлене твердження.

Спираючись на власний досвід, читач може навести досить багато прикладів подібних за своєю сутністю представлень для фізичних полів різної природи. При цьому мова, звичайно, йде про такі канонічні форми областей, як сфера, циліндр, шар, еліпсоїд та ін. Фундаментальною основою для висновків про загальність розв'язків граничних задач в кожному конкретному випадку є властивості повноти відповідних систем власних функцій граничних задач Штурма – Ліувілля [7].

Важливим моментом при обговоренні ідеї введення поняття загального розв'язку граничної задачі є та обставина, що така ідея є досить конструктивною. Якби мова йшла лише про такі розв'язки, як наведений для прикладу вище, то від такого поняття було б мало користі. Однак виявляється, що загальні розв'язки граничних задач можуть бути побудовані для досить широкого кола неканонічних областей в різних розділах математичної фізики. Подальший виклад буде пов'язаний з ілюстрацією таких можливостей і специфічних проблем, що виникають при розв'язанні конкретних задач.

## 2. Приклад задачі з неповністю визначеними граничними умовами.

Характер задач, про які йде мова в статті, краще всього показати на конкретному прикладі. В математичній фізиці добре розвинені підходи до розв'язання граничних задач різного фізичного змісту для таких випадків, коли граничні умови формулюються на парі циліндрів (сфер) або на наборах таких поверхонь. Для того щоб відійти від необхідності обговорювати особливості формулювання плоских задач теорії потенціалу, розглянемо двовимірну задачу про випромінювання звуку системою двох циліндрів з довільним розподілом швидкості на поверхні за кутовою координатою. У цьому випадку шукана функція потенціалу швидкостей  $\varphi(r, \theta, \omega)$  задовольняє рівняння Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + k^2 \varphi = 0, \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (2)$$

Тут  $c$  – швидкість звуку в ідеальній стисливій рідині. Нормальна похідна шуканої функції задана на поверхнях циліндрів  $r = r_1$  та  $r = r_2$ . Причому відстань між осями циліндрів  $d$  є більшою, ніж сума величин радіусів:  $d > r_1 + r_2$ .

Якщо залежність характеристик поля від часу описується функцією  $e^{-i\omega t}$ , сформульована гранична задача має загальний розв'язок у вказаному вище сенсі. Цей розв'язок добре відомий [5]

$$\varphi(r, \theta, k) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m H_m^{(1)}(kr_1) \cos m\theta_1 + \sum_{n=0}^{\infty} B_n H_n^{(1)}(kr_2) \cos m\theta_2. \quad (3)$$

Тут введено локальні полярні координати  $(r_1, \theta_1)$  та  $(r_2, \theta_2)$  з центрами на осях циліндрів та використано загальноприйняті позначення для функцій Ганкеля першого роду  $H_j^{(1)}(kr)$ . Для простоти запису зроблено припущення про симетрію граничних значень і відповідно – всіх характеристик хвильового поля відносно спільної лінії відліку кутів  $\theta_1$  та  $\theta_2$  (рис. 1).

На цьому рисунку вже зображено частковий випадок, коли відстань між

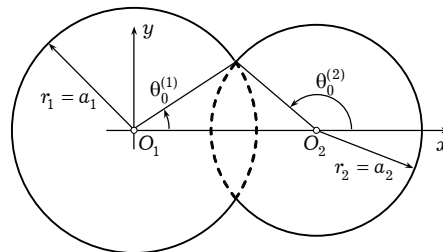


Рис. 1

осями циліндрів менша, ніж сума довжин їх радіусів. Саме цей випадок ми маємо обговорити далі.

Наведений для загального випадку розв'язок (3) дає можливість задовольнити довільні граничні умови на поверхнях рознесених циліндрів. Процедура виконання граничних умов базується на використанні теорем додавання для функцій Бесселя [1]. Використання властивостей повноти та ортогональності тригонометричних функцій для цілих  $m$  та  $n$  на поверхні циліндрів  $0 \leq \theta_1 \leq 2\pi$  та  $0 \leq \theta_2 \leq 2\pi$  зводить задачу відшукування значень коефіцієнтів  $A_m$  та  $B_m$  до розв'язання нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь [5].

Для загального розв'язку граничної задачі (3) виконуються дві важливі умови: умова випромінювання на нескінченності та умова періодичності поля по будь-якій кривій, що охоплює два циліндра. Ці дві умови мають виконуватися і в тому випадку, коли випромінювання хвиль здійснюється з поверхні, що утворена циліндрами, які перетинаються (рис. 1). Однак тепер граничні умови можуть бути задані лише на частинах циліндричних поверхонь, які показані суцільними дугами на рис. 1. Повні системи тригонометричних функцій на цих поверхнях можуть бути легко побудовані при заміні цілих чисел  $m$  та  $n$  в (3) на відповідні дробові. При цьому вираз (3) задовольняє рівняння Гельмгольца та умови випромінювання. Однак при цьому не виконуються вказані вище умови періодичності. Таким чином, при розгляді задачі з геометрією випромінювача, показаною на рис. 1, ми маємо використовувати вирази (3) з цілими  $m$  та  $n$ . Однак граничні умови на штрихових частинах поверхонь тепер не задані. Саме таку задачу визначимо як задачу з неповністю визначеними граничними умовами. Для визначення методу розв'язання таких задач повернемося знову до розгляду дуже простої задачі теорії потенціалу.

### 3. Задача теорії потенціалу для внутрішньої області прямокутника.

Для ілюстрації можливих шляхів використання загальних розв'язків граничних задач у випадках, подібних до наведеного вище, розглянемо досить просту задачу теорії потенціалу. Треба знайти значення гармонічної функції  $\varphi(x, y)$  у прямокутнику  $x \leq a$ ,  $y \leq b$ , показаному суцільними лініями на рис. 2. Граничні значення шуканої функції задамо рівностями

$$\varphi(\pm a, y) = 0, \quad \varphi(x, \pm b) = \cos \frac{\pi x}{2a}. \quad (4)$$

Очевидно, що шукана функція визначається рівністю

$$\varphi(x, y) = \cos \frac{\pi x}{2a} \cdot \frac{\cosh \frac{\pi y}{2a}}{\cosh \frac{\pi b}{2a}}. \quad (5)$$

Для того щоб пов'язати розглядувану задачу з описаною вище задачею для циліндрів, що перетинаються, дещо змінимо геометрію заданого прямокутника. Розглянемо прямокутну область  $-\ell \leq x \leq \ell$ ,  $-b \leq y \leq b$ , яка включає в себе початково заданий прямокутник. Для цієї нової області легко побудувати загальний розв'язок граничної задачі теорії потенціалу. Обмежуючись симетричним відносно обох осей випадком, такий розв'язок подамо у вигляді

$$\varphi(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} B_m \cos \gamma_m y \frac{\cosh \gamma_m x}{\cosh \gamma_m \ell} + \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos \delta_k x \frac{\cosh \delta_k y}{\cosh \delta_k b}. \quad (6)$$

Тут прийнято позначення

$$\gamma_m = \frac{(2m+1)\pi}{2b}, \quad \delta_k = \frac{(2k+1)\pi}{2\ell}. \quad (7)$$

Виконання граничних умов на сторонах прямокутника зводиться, по суті, до знаходження коефіцієнтів Фур'є  $B_m$ ,  $A_k$ . Однак згадаємо, що початкову граничну задачу сформульовано для прямокутника, показаного суцільними лініями на рис. 2. Тому децю модифікуємо вираз (6) так, щоб зберегти загальність розв'язку і залишити ситуацію подібною до ситуації з двома циліндрами, що перетинаються. Введемо в розгляд замість (6) такий вираз:

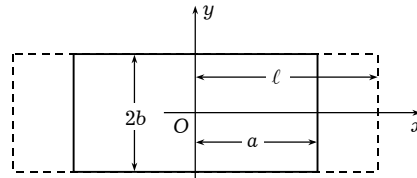


Рис. 2

$$\varphi(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} B_m \cos \gamma_m y \frac{\cosh \gamma_m x}{\cosh \gamma_m a} + \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos \delta_k x \frac{\cosh \delta_k y}{\cosh \delta_k b}. \quad (8)$$

Ця функція, очевидно, є гармонічною. На сторонах прямокутника  $-a \leq x \leq a$ ,  $-b \leq y \leq b$  маємо повні системи тригонометричних функцій. Однак, подібно до задачі для циліндрів, тут також система функцій  $\cos \delta_k x$  не є ортогональною на відрізку  $-a \leq x \leq a$ , на якому задано граничні умови. Розглянемо можливість використання виразу для гармонічної функції (8) для виконання граничних умов (4). Розглянемо спочатку граничні умови на сторонах  $y = \pm b$ . При такому виборі значень параметрів  $\gamma_m$ ,  $\delta_k$  одержуємо функціональне рівняння

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos \delta_k x = \cos \alpha_0 x, \quad \alpha_0 = \frac{\pi}{2a}, \quad -a \leq x \leq a. \quad (9)$$

Система тригонометричних функцій  $\cos \delta_k x$  не є ортогональною на відрізку  $-a \leq x \leq a$ , але напевно є повною. Можна вказати декілька способів зведення цього рівняння до алгебраїчного. Одним із них може бути, наприклад, мінімізація інтегралу по вказаному інтервалу середньоквадратичного відхилення значення нескінченного ряду зліва від значення тригонометричної функції справа в рівнянні (9). Саме така процедура приводить до визначення коефіцієнтів Фур'є в класичному випадку, коли  $\delta_k = \frac{(2k+1)\pi}{2a}$ . При цьому визначення невідомих коефіцієнтів приводить до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Маючи на увазі розв'язання граничної задачі для прямокутної області, запропонуємо інший підхід до визначення невідомих у (9). Замінімо функціональне рівняння (9) таким:

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos \delta_k x = \begin{cases} \cos \alpha_0 x, & |x| \leq a, \\ \xi(x), & a < |x| \leq l. \end{cases} \quad (10)$$

Тут  $\xi(x)$  – довільна інтегровна функція. Тепер коефіцієнти  $A_k$  знаходяться дуже просто:

$$A_k = \frac{2\alpha_0 \cos \delta_k a}{\ell(\alpha_0^2 - \delta_k^2)} + \xi_k, \quad (11)$$

де

$$\xi_k = \frac{2}{\ell} \int_a^l \xi(x) \cos \delta_k x dx. \quad (12)$$

Використовуючи представлення гіперболічних функцій рядами Фур'є

$$\frac{\cosh \delta_k y}{\cosh \delta_k b} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2(-1)^m \gamma_m}{b(\gamma_m^2 + \delta_k^2)} \cos \gamma_m y, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (13)$$

знаходимо із граничних умов на сторонах  $x = \pm a$  значення коефіцієнтів  $B_m$  у виразі (6):

$$B_m = - \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos \delta_k a \frac{2(-1)^m \gamma_m}{b(\gamma_m^2 + \delta_k^2)}. \quad (14)$$

Таким чином, для сформульованої граничної задачі теорії потенціалу (4) одержано два розв'язки (5) і (6). Обидва вирази задовольняють гармонічне рівняння і граничні умови на сторонах прямокутника. Отже, згідно з властивістю єдиності розв'язку задачі Діріхле для рівняння Лапласа ці два вирази (5) і (6) мають бути тотожно рівними для всіх точок всередині прямокутника  $-a \leq x \leq a$ ,  $-b \leq y \leq b$ . Таке твердження виглядає дещо дивним, якщо врахувати, що вирази для коефіцієнтів рядів у (6) включають довільні величини  $\xi_k$ . Сформульована задача цікава тим, що таке твердження можна перевірити досить загальним способом. Для цього ми використали розвинення обох виразів (5) і (6) у подвійний ряд Фур'є в прямокутнику  $-a \leq x \leq a$ ,  $-b \leq y \leq b$ . Після досить громіздких викладок встановлено тотожність коефіцієнтів Фур'є при довільних значеннях  $\xi_k$ . При спробі повторити викладки слід звернути особливу увагу на відому властивість рядів Фур'є: у точці розриву функції ряд Фур'є дає половину різниці значення функції зліва та справа від точки розриву.

**4. Задача випромінювання звуку двома циліндрами, що перетинаються.** Одержаний результат дозволяє з оптимізмом повернутися до задачі випромінювання звуку двома циліндрами, яка була сформульована вище. Поверхня випромінювача утворена частинами циліндричних поверхонь, показаних на рис. 1 суцільними лініями. На цих поверхнях задано нормальні до них складові векторів швидкості

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(a_1, \theta_1)}{\partial r_1} &= F_1(\theta_1), & \theta_0^{(1)} \leq \theta_1 \leq 2\pi - \theta_0^{(1)}, \\ \frac{\partial \varphi(a_2, \theta_2)}{\partial r_2} &= F_2(\theta_2), & \theta_0^{(2)} \leq \theta_2 \leq \theta_0^{(2)} - \pi. \end{aligned} \quad (15)$$

При побудові виразу (3) враховано припущення

$$F_1(\theta_1) = F_1(-\theta_1), \quad F_2(\theta_2) = F_2(-\theta_2).$$

Загальний розв'язок цієї граничної задачі представлено виразом (3). У випадку випромінювача, в якому поверхні циліндрів не перетинаються, нескінченні алгебраїчні системи для визначення коефіцієнтів  $A_m$  і  $B_n$  формуються безпосередньо на основі теорем додавання для функцій Бесселя [4, 5]. Для геометрії, поданої на рис. 1, для переходу від координат  $(r_1, \theta_1)$  до координат  $(r_2, \theta_2)$  маємо співвідношення

$$H_m^{(1)}(kr_1) \cos m\theta_1 = \sum_{q=-\infty}^{\infty} (-1)^q H_{m+q}^{(1)}(kd) J_q(kr_2) \cos q\theta_2, \quad d = |O_1 O_2|. \quad (16)$$

Однак при прямому використанні теорем додавання в розглядуваному випадку циліндрів, що перетинаються, стикаємося з ситуацією, яка подібна до описаної у випадку прямокутника. Виконання граничних умов породжує пару функціональних рівнянь типу (9), коли права частина задана не на повному інтервалі ортогональності тригонометричних функцій.

Базуючись на результатах дослідження задачі для прямокутника можна висловити припущення, що граничні умови (15) можуть бути доповнені довільними симетричними значеннями на штрихових ділянках циліндричних поверхонь на рис. 1. Тепер граничні умови можна подати у вигляді

$$\frac{\partial \varphi(a_1, \theta_1)}{\partial r_1} = \begin{cases} F_1(\theta_1), & \theta_0^{(1)} \leq \theta_1 \leq 2\pi - \theta_0^{(1)}, \\ \xi_1(\theta_1), & -\theta_0^{(1)} \leq \theta_1 \leq \theta_0^{(1)}, \end{cases}$$

$$\frac{\partial \varphi(a_2, \theta_2)}{\partial r_2} = \begin{cases} F_2(\theta_2), & \theta_0^{(2)} \leq \theta_2 \leq \theta_0^{(2)} - \pi, \\ \xi_1(\theta_2), & \pi - \theta_0^{(1)} \leq \theta_2 \leq \pi + \theta_0^{(1)}. \end{cases} \quad (17)$$

Тут  $\xi_1(\theta_1)$  та  $\xi_2(\theta_2)$  – довільні інтегровні функції.

З використанням граничних умов (17) загальний розв'язок (3) породжує нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь з певними довільними складовими в правих частинах. Загальні міркування стосовно єдиності розв'язку граничної задачі та наведений вище конкретний приклад дають підстави сподіватися на одержання кількісних оцінок характеристик поля, незалежних від вибору введених довільних функцій. Однак зрозуміло, що ефективність обчислювальних процедур буде залежати від конкретного вигляду цих функцій. Із загальних властивостей рядів Фур'є відомо, що поява розриву в функції, що розкладається в ряд, призводить до уповільнення збіжності розкладу. Тому певні аспекти практичного застосування методики слід розглянути на конкретних прикладах.

Розглянемо задачу випромінювання звуку двома циліндрами з однаковими хвильовими розмірами  $a_1/\lambda = a_2/\lambda = 1.2$ ,  $\lambda = 2\pi/k$ . Відносна відстань між осями циліндрів дорівнює  $d/\lambda = 1.8$ . При цьому  $\theta_0^{(1)} = 41/4^\circ$ . На випромінюючих поверхнях задано рівномірно розподілені нормальні швидкості  $F_1(\theta_1) = F_2(\theta_2) = F_0$ . У подальшому викладі  $M$  та  $N$  позначають число невідомих в алгебраїчних системах, які утримуються при редукції нескінченних систем. Розрахунки виконано для двох випадків, коли на штрихових частинах границі задаються нульові значення швидкості або ті ж самі значення, що й на випромінюючих поверхнях (неперервне продовження граничних умов).

На рис. 3 і 4 наведено результати обчислень для нормованих величин швидкості (дійсна,  $\text{Re } v$ , та уявна,  $\text{Im } v$ , частини) відповідно для неперервного та розривного продовження граничних умов на нефізичні (штрихові) частини границі випромінювача. Обчислення виконано при  $M = N = 20$ . Значення тиску нормовані на величину  $\rho c F_0$ . Тут  $\rho$  – густина рідини,  $c$  – швидкість звуку в ній.

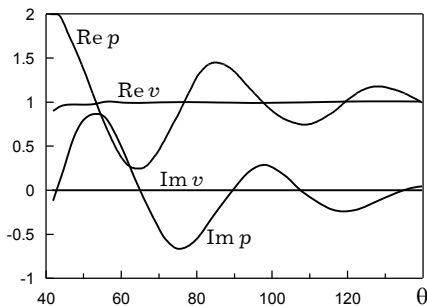


Рис. 3

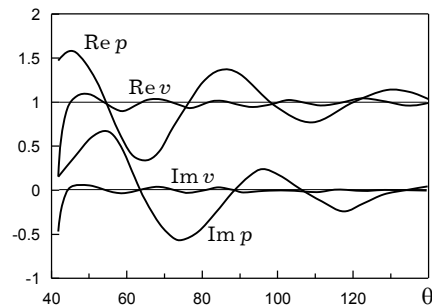


Рис. 4

Як видно з наведених даних, при вибраній кількості коефіцієнтів в нескінченних рядах (3) у випадку неперервного продовження граничних умов одержано практично точний розв'язок задачі. Розрив у граничних умовах при вибраних значеннях  $M = N = 20$  зумовлює певну «хвилястість» (відхилення від одиниці) в розподілі швидкості на рис. 4 та чітко виражені наслідки ефекту Гіббса поблизу точок розриву. Однак з ростом порядку скін-

ченної системи при редукції нескінченної вказана «хвилястість» швидко зникає. Слід також відмітити, що значення тиску на випромінюючій поверхні для двох випадків практично не відрізняються.

Додаткові дані про вплив способу продовження граничних умов на нефізичні частини границі можна отримати при аналізі кількісних оцінок енергії випромінювання. Нижче наведено нормовані на величину  $\rho c F_0^2 a$  оцінки загальної енергії випромінювання. Зрозуміло, що кількісні оцінки в цих випадках будуть функціями характеру продовження граничних умов і кількості коефіцієнтів, утриманих при редукції нескінченних систем. Обчислення для різного порядку скінченних систем характеризують характер збіжності послідовності наближених розв'язків.

Для випадку неперервного продовження граничних умов маємо такі оцінки величин випроміненої енергії, обчисленої з утриманням п'ятнадцяти і двадцяти членів рядів в (3):  $W(15,15) = 115.3$ ;  $W(20,20) = 115.4$ . Як бачимо, значення практично співпадають. При використанні розривного продовження граничних умов знаходимо такі оцінки:  $W(10,10) = 109.2$ ;  $W(15,15) = 111.1$ ;  $W(20,20) = 112.0$ . Видно, що використання розривних продовжень вимагає більшого об'єму обчислень. Одночасно слід відмітити досить незначну різницю в оцінках, одержаних у двох підходах. Зрозуміло, що з ростом числа обчислених коефіцієнтів рядів у (3) такі оцінки будуть зближуватися, підтверджуючи висновок про можливість довільного продовження граничних умов на нефізичну частину поверхні випромінювача.

**5. Висновки.** Підсумовуючи виклад матеріалу статті слід відзначити, що вибір матеріалу та характер викладу визначалися бажанням проілюструвати два важливих аспекти загальної проблеми розвитку аналітичних методів розв'язання граничних задач математичної фізики. Перш за все, хотілося звернути увагу на конструктивність введеного поняття загального розв'язку граничної задачі. Використання закладеної в ньому ідеї дає можливість суттєво розширити коло задач, для яких такі аналітичні розв'язки можна побудувати. Певне уявлення про можливість підходу можна скласти на основі численних прикладів, наведених у [2, 3]. З другого боку, практичне використання методу суперпозиції загальних розв'язків канонічних задач при побудові розв'язків задач неканонічних, призвело до необхідності розглянути досить специфічну проблему довізначення граничних умов на певних нефізичних поверхнях для одержання більш простих співвідношень для шуканих величин. У роботі показано можливість використання дещо нетрадиційного підходу до цієї проблеми. Одержані при цьому результати досить цікаві також з точки зору ілюстрації можливості побудови єдиних, по суті, розв'язків граничних задач у різних формах.

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. – Т. 2. – Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. – Москва: Наука, 1974. – 295 с.
2. Гринченко В. Т., Вовк И. В. Волновые задачи рассеяния звука на упругих оболочках. – Киев: Наук. думка, 1986. – 240 с.
3. Гринченко В. Т., Вовк И. В., Мацура В. Т. Основы акустики. – Київ: Наук. думка, 2007. – 639 с.
4. Ерофеев В. Т. Теоремы сложения. – Минск: Наука и техника, 1989. – 225 с.
5. Иванов Е. А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. – Минск: Наука и техника, 1968. – 584 с.
6. Підстригач Я. С. Вибрані праці. – Київ: Наукова думка, 1995. – 459 с.
7. Titchmarsh E. C. Eigenfunction expansions associated with second-order differential equations. Part 1. – Oxvord: Oxvord Univ. Press, 1962. – 203 p.

## **ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ С НЕПОЛНОСТЬЮ ОПРЕДЕЛЕННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ**

*Возможность построения аналитических решений граничных задач математической физики для неканонических областей важна с точки зрения развития эффективных алгоритмов количественной оценки характеристик исследуемых полей. Использование метода суперпозиции дает возможность рассмотреть широкий круг проблем с использованием введенного понятия общего решения граничной задачи. Однако при этом могут возникать трудности при построении алгоритмов расчета, связанные с неполной определенностью граничных условий на интервалах ортогональности функций, входящих в общее решение. В работе даны примеры задач, в которых такие трудности возникают, исследуется их природа и методы преодоления. Приведены количественные оценки точности построенных решений.*

## **PROBLEMS OF MATHEMATICAL PHYSICS WITH BOUNDARY CONDITIONS INCOMPLETELY DEFINED**

*Possibility of constructing the analytical solutions to the boundary-value problems of mathematical physics for non-classical regions is important from the point of view of efficient algorithms development to estimate quantitatively the characteristics of the fields studied. The use of superposition method permits to analyze a wide class of concrete problems applying the introduced notion of general solution to the boundary-value problem. However, in so doing the difficulties may arise when constructing the algorithms of calculation, connected with boundary conditions incompletely defined on the intervals of functions' orthogonality contained in the general solution. The examples of the problems where such difficulties arise are presented, their nature and methods of overcoming are studied. The quantitative estimates of exactness of constructed solutions are given.*

Ин-т гідромеханіки НАН України, Київ

Одержано  
18.04.07