УДК 539.3

В. В. Мелешко[1], А. А. Бондаренко[1], С. А. Довгий[2],
А. Н. Трофимчук[2], Г. Я. Ф. ван Хейст[3]

УПРУГИЕ ВОЛНОВОДЫ: ИСТОРИЯ И СОВРЕМЕННОСТЬ. I

В статье дан краткий обзор дисперсионных характеристик нормальных мод в упругом слое и цилиндре. Прослежены ключевые аспекты 125-летней истории проблемы и ее современное отражение в глобальном информационном пространстве.

> Предпринимая какое-либо отдельное исследование, мы должны сосредоточить все силы наши в строго ограниченном круге. Дело наше состоит не только в том, чтобы, подобно историку или филологу, собрать и просмотреть все книги, выискать все сведения о том, что другими уже сделано в области данного предмета; напротив, это только второстепенная часть нашей работы. Нам нужно овладеть самими предметами, причем каждый из них представляет свои новые и особые трудности совсем иного рода, чем те, с какими имеет дело ученый, черпающий из книг материал для своей работы. А то, чему посвящается больше всего времени и труда, является в большинстве случаев второстепенной вещью, находящуюся только в отдаленной связи с целью исследования.
>
> *Г. Гельмгольц* [7, с. 42]

1. Введение. Исходным пунктом при написании статьи, посвященной 80-летию со дня рождения замечательного украинского ученого в области механики и математики Я. С. Подстригача, послужило любопытное замечание в обзоре [14, с. 9] о том, что «*полезным упражнением для воображения была бы интересная попытка проанализировать впечатления авторов некоторых классических работ по волнам напряжений, которые оказались бы в современной лаборатории, занимающейся этим вопросом; их могла бы смутить сложность аппаратуры, однако они, без сомнения, были бы в состоянии активно участвовать в обсуждении результатов*». Из большого числа тем для обсуждения, могущих возникать при таком мысленном эксперименте, нам представилось интересным проследить за ключевыми моментами в более чем 125-летней захватывающей истории исследования процессов распространения гармонических волн в изотропных упругих волноводах. Зная о широком круге интересов Ярослава Степановича в области механики, прекрасно отраженном в книге [20] его избранных трудов, рискнем предположить, что эта тема его бы заинтересовала. Как вспоминает один из авторов данной статьи (А.Н.Т.), что в 1982 году он не представлял защиту своей кандидатской диссертации без помощи академика Я. С. Подстригача в Институте прикладных проблем механики и математики АН УССР во Львове, основателем и бессменным руководителем которого был Ярослав Степанович. Диссертационная работа была посвящена колебаниям сооружений, содержащих жидкость и расположенных на упругом полупространстве. Замечания Ярослава Степановича о необходимости сопоставления результатов по различным моделям позволило автору более полно показать закономерности распределения динамических контактных напряжений под сооружением, учитывая отток энергии в таком волноводе как упругом полупространстве.

В первой части статьи мы рассмотрим волноводы с поперечным сечением в виде полосы и круга (слой и цилиндр, для краткости) и обсудим свойства нормальных мод с комплексными постоянными распространения, присущие только упругим волноводам. Открытие существования таких мод, без сомнения, могло бы сильно удивить ученых, работавших в этой области до середины XX века. Мы также оценим характеристики нормальных мод с точки зрения традиционной дилеммы «приближенное решение точных уравнений или точное решение приближенных уравнений».

 ISSN 0130–9420. Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2008. – 51, № 2. – С. 86-104.

В апреле 1877 года лорд Рэлей писал в предисловии к первому тому первого издания своего трактата по акустике [29, с. 20]: «*Многие из наиболее ценных вкладов в науку сейчас можно найти только в журналах и в трудах научных обществ, изданных в различных частях света и на нескольких языках и часто практически недоступных тем, кто не живет в соседстве с большими публичными библиотеками. При таком положении вещей технические помехи изучению предмета требуют затраты излишнего труда и создают развитию науки препятствия, которые нельзя недооценивать*». (Возможно, это замечание было связано и с тем, что большую часть этой книги Рэлей написал во время длительного путешествия на плоту по Нилу в Египте, без доступа к каким-либо библиотекам.)

Современные возможности телекоммуникаций и глобального информационного пространства [16] в корне изменили эту оценку. Во-первых, практически все крупнейшие библиотеки мира, библиотеки университетов и институтов имеют электронные каталоги свободного доступа, что потенциально позволяет установить наличие необходимого научного источника. Многие из них содержат электронный свободный доступ к старым книгам, срок авторских прав (© – copyright) уже истек. Среди них можно указать, например, http://gallica.bnf.fr/ – Национальная (электронная) библиотека Франции; http://www.archive.org/ – *the Internet Archive digital library* и многие другие. Кроме того, существуют вебсайты, например, *EqWorld* – http://eqworld.ipmnet.ru/, которые дают свободный доступ к большому числу книг на русском языке по математике, механике и физике (в .PDF или .DJVU форматах).

Во-вторых, ведущие мировые научные издательства (например, American Institute of Physics, Cambridge University Press, Elsevier, Springer, Wiley и многие другие) создали цифровые архивы своих практически всех основных журналов, каждый из которых начинается с первого тома независимо от года выпуска (например, имеется выпуск журнала *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 1666 года!). Электронная подписка на эти журналы сейчас составляет основную долю затрат современных университетских и иных библиотек. В 1995 году была создан (коммерческий) *JSTOR archive* (http://www.jstor.org/), содержащий значительное количество оцифрованных старых журналов естественнонаучного и гуманитарного профиля независимо от издательств.

В-третьих, современные поисковые системы в Internet, прежде всего, *Google Scholar* (http://scholar.google.com/) с его привлекательным лозунгом «Stand on the shoulders of giants» (слова Ньютона «*Если я видел дальше других, то потому, что стоял на плечах гигантов*» из частного письма с намеком на небольшой рост его архиврага Гука), или *Science Direct* (http://www.sciencedirect.com/) позволяют в свободном доступе отыскивать статьи по фамилии автора, по названию, журналу, году публикации и т. д. При этом обеспечивается доступ к абстракту статьи, даются ссылки на родственные статьи по ключевым словам и «дерево» ссылок экспоненциально разрастается. Поэтому сейчас подготовить квалифицированный реферативный обзор для различных целей по выбранному направлению можно, не отходя от рабочего стола (или не выходя из дому) – нужен лишь прямой доступ к сети Internet (и, разумеется, компьютер).

Развитие глобального информационного пространства и возможности компьютерных технологий позволяют также косвенно оценить влияние публикации конкретного автора по количеству ссылок на нее за период последних 60 лет, установить и проследить динамику роста (или падения) Impact Factor научного журнала (Импакт-факторы всех журналов за 2005 и 2006 годы можно найти на вебстранице http://eqworld.ipmnet.ru/ru/info/sci-edu.htm.) и т. д. Мы приведем некоторые данные о ссылках на классические публикации в области упругого волноводного распространения из трех обширных мировых баз данных:

– коммерческой *ISI Web of Knowledge* (http://isiknowledge.com/), которая охватывает более 36 миллионов статей из более чем 6200 журналов естественнонаучного, экономического и социального профиля, опубликованных в период с января 1945 года по май 2008 года;

– коммерческой системы Scopus (http://www.scopus.com) издательства *Elsevier B. V.* (отметим, что рецензенты статей в научных журналах издательства получают бесплатный допуск к системе на срок 1 месяц) с 33 миллионами статей из 15 тысяч журналов от 4000 (!) издательств мира, опубликованных в период с января 1994 года по май 2008 года;

– свободной системе *Google Scholar* (http://scholar.google.com/) с ее разветвленной и удобной организацией поиска.

Кроме того, учитывая современный уровень комплектования отечественных научных библиотек ведущими зарубежными журналами и их электронными версиями, многие основополагающие публикации остаются практически недоступными широкому кругу украинских ученых. Поэтому в списке литературы мы отметили знаком (*) те статьи, PDF-файлы которых есть в распоряжении авторов благодаря доступу в обширную (около 4800 журналов) электронную библиотеку Technische Universiteit Eindhoven.

2. Дисперсионные уравнения. Задачи о направленном (волноводном) распространении гармонических волн в упругих протяженных телах различных конфигураций составляют предмет теоретических и экспериментальных исследований, ведущихся, начиная от классических работ Похгаммера [95], Кри [42], Рэлея [98, 99] и Лэмба [67], уже более 125 лет. Отметим, что часто цитируемый во многих публикациях обширный мемуар Кри [43] не содержит рассмотрения динамических задач. Иногда цитируемая статья Лэмба [65], хотя и содержит впервые выполненный краткий вывод дисперсионного уравнения для изгибных волн в тонкой полосе-пластине со свободными краями, посвящена, в основном, выяснению деталей спора Рэлея и Лява по вопросам теории пластин и оболочек. Не умаляя важности хронологически первой статьи Похгаммера [95] по данной проблеме, подчеркнем, что классическая работа Рэлея [98], доложенная на заседании Лондонского математического общества 12 ноября 1885 года, имела принципиальное значение. Пожалуй, трудно указать иную столь короткую (всего 7 полных журнальных страниц) статью, которая породила столь мощное научное и техническое направление, называемое ПАВ (или *SAW – surface acoustic waves*). При этом накопилась огромная литература, посвященная этой проблеме: можно указать на несколько десятков одних лишь монографий, тематических сборников и обзорных статей; волны Рэлея рассматриваются практически во всех стандартных учебниках по теории упругости. Обзор литературы увел бы нас слишком далеко от основного содержания этой работы; укажем лишь на статьи [38, 59] в сборнике, посвященном второму юбилею открытия рэлеевских волн, а также на интересное изложение [58] биографии Рэлея. (Отметим, что и в наше полностью компьютеризованное время идет интенсивная дискуссия [68, 104, 115] о точности аппроксимационных формул Бергмана [2, с. 344] – Викторова [6, с. 5] для зависимости скорости бездисперсионной волны Рэлея, определенной в [98] нужным решением бикубического уравнения, от коэффициента Пуассона изотропного упругого материала.)

Дисперсионные уравнения получаются на основе аналитического представления решений уравнения движения Ламе в области и выполнения соответствующих нулевых условий в напряжениях на границах волновода. Характерной особенностью упругих волноводов в виде цилиндра и слоя есть то, что их граница образована одной или двумя однотипными координатными плоскостями. Это позволяет построить такие аналитические представления для компонент вектора перемещений, которые дают возможность сравнительно легко выполнить все граничные условия и получить соответствующие дисперсионные уравнения.

Задача об отыскании системы нормальных мод в упругом слое $|x| \le \infty$, $|y| \le b$, $|z| \le \infty$ со свободными гранями и компонентами вектора перемещений $u_x = 0$, $u_y = V(y)e^{i(\gamma z - \omega t)}$, $u_z = W(y)e^{i(\gamma z - \omega t)}$ сводится к отысканию решений уравнений Ламе с нулевыми граничными условиями в напряжениях. В силу наличия плоскости $y = 0$ симметрии слоя все возможные нормальные моды в нем удобно разделить на продольные L-моды (longitudinal modes), для которых компонента $W(y)$ является четной функцией от y, и изгибные F-моды (flexural modes), для которых компонента $W(y)$ является нечетной функцией по y.

Дисперсионные уравнения Рэлея − Лэмба

$$(\gamma^2 - \beta^2)^2 \cos\alpha b \sin\beta b + 4\gamma^2\alpha\beta \sin\alpha b \cos\beta b = 0\,, \tag{1}$$

$$(\gamma^2 - \beta^2)^2 \sin\alpha b \cos\beta b + 4\gamma^2\alpha\beta \cos\alpha b \sin\beta b = 0 \tag{2}$$

для продольных и изгибных мод связывают частоту ω и допустимую постоянную распространения γ нормальных волн в слое. В этих и последующих уравнениях

$$\alpha^2 + \gamma^2 = \frac{\omega^2}{c_1^2}\,, \qquad \beta^2 + \gamma^2 = \frac{\omega^2}{c_2^2}\,, \tag{3}$$

где c_1 и c_2 − скорости продольных и сдвиговых волн в упругом материале среды.

Аналогично, уравнение Похгаммера − Кри

$$\frac{2\alpha}{a}(\beta^2+\gamma^2)J_1(\alpha a)J_1(\beta a)-(\beta^2-\gamma^2)^2 J_0(\alpha a)J_1(\beta a)-4\gamma^2\alpha\beta J_1(\alpha a)J_0(\beta a)=0 \tag{4}$$

для осесимметричных продольных нормальных волн в бесконечном цилиндре $0 \le r \le a$, $0 \le \theta \le 2\pi$, $|z| \le \infty$ с компонентами вектора перемещений $u_r = U(r)e^{i(\gamma z-\omega t)}$, $u_\theta = 0$, $u_z = W(r)e^{i(\gamma z-\omega t)}$ связывают частоту ω и допустимую постоянную распространения γ нормальных волн в круглом цилиндрическом изотропном упругом волноводе со свободной от напряжений границей.

В цилиндре также могут распространяться неосесимметричные волны с отличными от нуля компонентами вектора перемещений $u_r = U_n(r)\cos n\theta\, e^{i(\gamma z-\omega t)}$, $u_\theta = V_n(r)\sin n\theta e^{i(\gamma z-\omega t)}$, $u_r = U_n(r)\cos n\theta\, e^{i(\gamma z-\omega t)}$. (Как отметил еще Похгаммер [107], случай $n = 1$ имеет тесную аналогию с изгибными волнами в тонком стержне, уравнение движения которых было получено одновременно и независимо Д. Бернулли и Эйлером еще в 1735 г.) Дисперсионное уравнение для n-го семейства имеет вид равенства нулю определителя третьего порядка, элементы которого довольно громоздким образом явно выражаются через n, ω, γ, α и β. Такое уравнение приведено, например, в статье [117], обзоре [73, уравнение (2.68)] и книге [12, с. 147].

Кроме этих основных волн, в слое и цилиндре существуют соответственно так называемые сдвиговые (SH) и крутильные (T) осесимметричные волны.

Дисперсионные уравнения для таких типов волн имеют значительно более простой вид:

$$\sin\beta b = 0 \tag{5}$$

с компонентами вектора перемещений $u_x = \cos\beta y\, e^{i(\gamma z-\omega t)}$, $u_y = 0$, $u_z = 0$, и

$$\cos\beta b = 0 \tag{6}$$

с компонентами вектора перемещений $u_x = \sin\beta y\, e^{i(\gamma z-\omega t)}$, $u_y = 0$, $u_z = 0$, соответственно для симметричных и антисимметричных относительно срединной плоскости $y = 0$ типов движений в слое, а также в цилиндре

$$\beta a J_0(\beta a) - 2J_1(\beta a) = 0 \tag{7}$$

с компонентами вектора перемещений $u_r = 0$, $u_\theta = J_1(\beta r)\, e^{i(\gamma z-\omega t)}$, $u_z = 0$.

Уравнения (5)−(7) имеют лишь вещественные (в том числе и нулевой) корни β. Поэтому для фиксированного значения частоты ω в таких волноводах существует *конечное* число распространяющихся (или бегущих) волн с *действительными* значениями постоянной распространения γ и *бесконечное* число нераспространяющихся мод с *чисто мнимыми* значениями γ. Важно отметить, что распределение перемещений по сечению волновода для каждой нормальной моды *не* зависит от частоты. Совокупность всех нормальных мод образует полную систему в том смысле, что произвольно заданную либо объемную нагрузку, либо нагрузку на торце полубесконечного волновода можно однозначно представить в виде бесконечного ряда по этим модам. Ситуация здесь полностью схожа с акустическими или электромагнитными волноводами. Отметим также, что в пионерских работах [42, 67, 95, 99] такие решения не рассматривались.

Активный интерес к анализу дисперсионных уравнений Рэлея – Лэмба (1), (2) и Похгаммера – Кри (4) возник в начале 1930-х годов в тесной связи с созданием различных методик возбуждения и приема ультразвуковых колебаний в упругих телах. При этом накоплено огромное количество аналитических, численных и экспериментальных данных, относящихся к свойствам распространяющихся волн. Работы немецких [54, 102, 106], американских [39, 60, 108], канадских [48–51] и английских [45] авторов 1930-х–1940-х годов, относящиеся к анализу фазовых $c_p = \frac{\omega}{\gamma}$ и групповых $c_g = \frac{d\omega}{d\gamma}$ скоростей распространяющихся волн, детально проанализированы в классических ранних монографиях [2, 17] и обзоре [16]. Особенно интересно в этих статьях почувствовать то удивление, которое высказывалось при открытии существования нескольких нормальных мод: традиционные представления об одномерных продольных и изгибных волнах в слое или цилиндре основываются лишь на одной волне. Теория Гибе и Блехшмидта [54] связанных мод колебаний и «мертвой зоны» прекрасно характеризует этот этап первоначального накопления знаний. Тем не менее, этими и последующими работами были установлены такие интересные особенности распространяющихся мод в цилиндре и слое:

– в низкочастотном длинноволновом пределе первая продольная волна является бездисперсионной с одинаковыми значениями фазовой и групповой скоростей $c_p = c_g = c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ для цилиндра и $c_p = c_g = c_L = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}$ для слоя соответственно. Здесь и всюду в дальнейшем ρ, E и ν обозначают плотность, модуль Юнга и коэффициент Пуассона изотропной упругой среды. Учет дисперсии волн в цилиндрическом стержне приводит к так называемой «поправке Рэлея» на инерцию поперечного движения, что дает приближенное дисперсионное уравнение

$$\omega = c_0\gamma\left(1 - \frac{1}{4}\nu^2\gamma^2a^2\right) \tag{8}$$

и дисперсионные зависимости

$$c_p = c_0\left(1 - \frac{1}{4}\nu^2\gamma^2a^2\right), \qquad c_g = c_0\left(1 - \frac{3}{4}\nu^2\gamma^2a^2\right). \tag{9}$$

Сам Рэлей во втором издании (1894) классического трактата [29, §157] отметил, что этот результат был получен Похгаммером [95] на основе разложения дисперсионного уравнения (4) в ряд при малых γa;

– в низкочастотном длинноволновом пределе первая изгибная нормальная волна представляется дисперсионной изгибной стержневой или пластиночной модой, например, для слоя такая зависимость имеет вид

$$\omega = \gamma^2 b\sqrt{\frac{E}{3\rho(1-\nu^2)}}, \tag{10}$$

что приводит к дисперсии фазовой и групповой скоростей нормальной изгибной моды даже при малых значениях γb:

$$c_p = \gamma b\sqrt{\frac{E}{3\rho(1-\nu^2)}}, \qquad c_g = 2\gamma b\sqrt{\frac{E}{3\rho(1-\nu^2)}} \tag{11}$$

с интересным соотношением $c_g = 2c_p$;

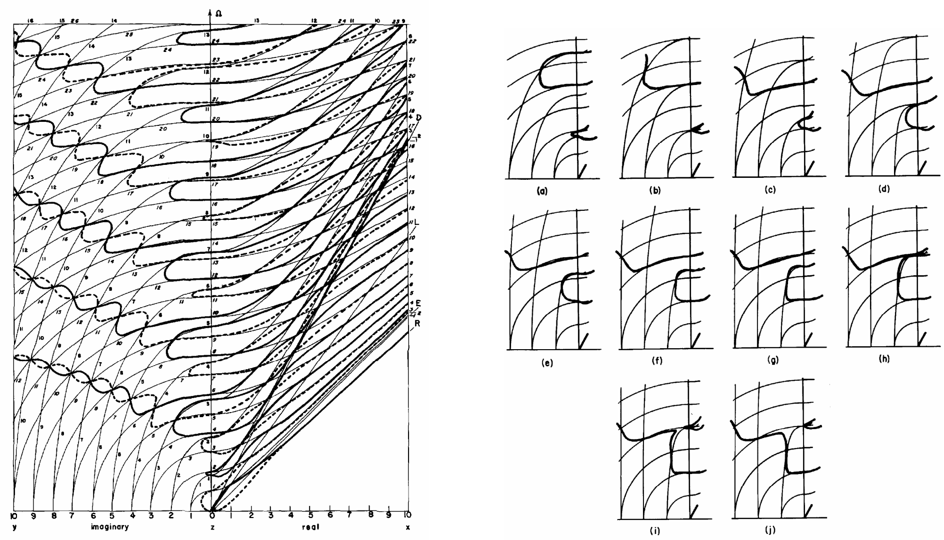
– в высокочастотном коротковолновом пределе первая нормальная волна переходит в поверхностную волну Рэлея независимо от типа симметрии движений с фазовой и групповой скоростью c_R;

– в высокочастотном коротковолновом пределе вторая и последующие нормальные волны независимо от типа симметрии движений имеют фазовую и групповую скорость, равную скорости c_2 сдвиговых упругих волн в безграничном пространстве.

(Позднее, в работах [61, 101, 112] было дано разъяснение кажущегося парадоксальным, на основе анализа лишь первых двух нормальных мод, утверждения [17, с. 65] о том, что энергия по стержню не может переноситься со скоростью, большей чем c_0, что меньше скорости c_1 продольных упругих волн в безграничном пространстве.)

В середине 1950-х годов в работе [112] было численно предсказано явление «обратной» волны, т. е. существование в некотором диапазоне частот у третьей распространяющейся моды разных знаков фазовой и групповой скоростей. Хотя на принципиальную возможность существования такого явления у некоторых гипотетических волноведущих систем указывал еще Лэмб [66], это интересное свойство у реальных волноводов получило экспериментальное подтверждение [75] лишь в середине 1960-х годов. В нашей стране «обратные» волны в слое были независимо переоткрыты в статье [3] исследователей из Киевского университета. Детальный обзор столетнего периода изучения данного явления для волноводов различной конфигурации и физической природы проведен в [4].

Примерно в то же время в статье [35] были приведены найденные численно чисто мнимые корни дисперсионного уравнения Рэлея − Лэмба (1) в виде небольшой петли, соединяющей вторую и третью распространяющиеся нормальные моды. Это открытие получило детальное обсуждение и развитие в работах Миндлина [83] (опубликованной первоначально как *Final Report,* 1955*, Signal Corps Contract DA-36-039-SC-56772*) и [79]. Со второй публикацией вышло некоторое недоразумение, кратко упомянутое Оное [88] много лет спустя: эта работа была сделана Миндлиным совместно с его молодыми учениками Оное и Медиком, но в силу не совсем ясных причин, она появилась в трудах престижного Симпозиума лишь под одним именем. В последующих публикациях Миндлина, например [53], ссылки давались на эту же работу, но уже с тремя авторами!

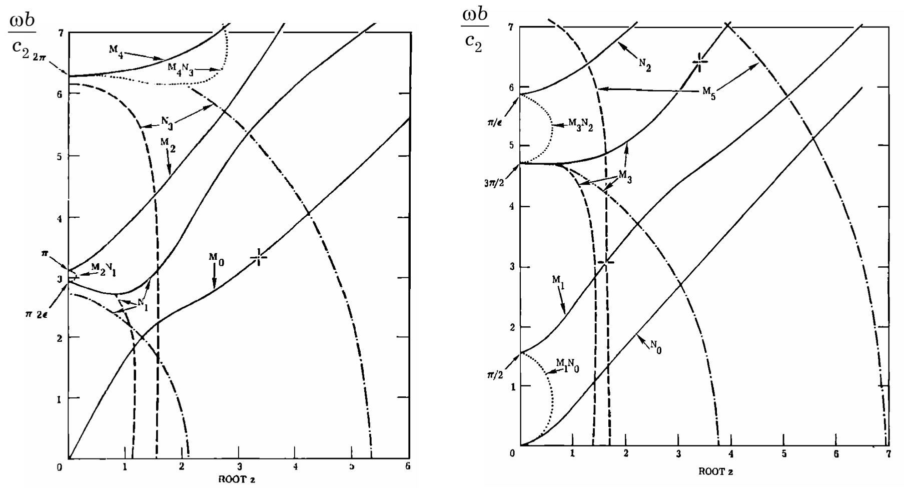


а) *б*)

Рис. 1. «Решетка Миндлина» [79]: схематичный рисунок поведения действительных и чисто мнимых ветвей дисперсионных кривых для продольных (сплошные кривые) и изгибных (штриховые кривые) нормальных мод Рэлея − Лэмба в слое; безразмерные величины: $\Omega = 2\omega b/\pi c_2$, $x = \mathrm{Re}(\gamma b)$, $y = \mathrm{Im}(\gamma b)$; *а*) коэффициент Пуассона 0.31; тонкие прямые с индексами **R**, **E**, **D** соответствуют наклонам скоростей рэлеевской, эквиволюмиальной и продольных волн в материале; прямая **L** отвечает моде Ламе; *б*) изменение чисто мнимых и действительных петель продольных мод при изменении коэффициента Пуассона в интервале от 0 до 0.47.

Опираясь на методику, предложенную в статье [56], Миндлин построил с помощью так называемой «решетки (Миндлина)» весьма полную картину действительных и чисто мнимых корней дисперсионных уравнений Рэлея − Лэмба в виде зависимости безразмерных корней $\mathrm{Re}(\gamma b)$ и $\mathrm{Im}(\gamma b)$ от безразмерной частоты $\Omega = \dfrac{2}{\pi}\dfrac{\omega b}{c_2}$ при фиксированном значении коэффициента Пуассона ν. Эти кривые неоднократно воспроизводились в различных последующих публикациях, например в [12, рис. 39, 42], [73, Fig. 2], в том числе и самого Миндлина [81]. Не устояли и мы против соблазна привести на рис. 1*а* это, в некотором смысле, произведение искусства, основанное не на расчетах на ЭВМ, а на глубоком понимании структуры уравнений и на ряде вспомогательных расчетов по простым аналитическим формулам. На рис. 1*б* показана сложная зависимость поведения чисто мнимой петли продольной моды в окрестности частот запирания от коэффициента Пуассона.

Данные такого качественного анализа полностью подтверждаются результатами (рис. 2) непосредственного численного решения [97] уравнений Рэлея – Лэмба.



а) *б*)

Рис. 2. Продольные (*а*) и изгибные (*б*) моды в слое; коэффициент Пуассона 0.3; сплошные линии соответствуют действительным ветвям; точечные – чисто мнимым ветвям; штриховые – действительной части комплексной ветви; штрихпунктирные – мнимой части комплексной ветви [*согласно* ***Potter, Leedham*** (1967) [97]].

Рис. 2*а* показывает, что для фиксированной частоты ω дисперсионные уравнения Рэлея – Лэмба имеют лишь *конечное* число действительных и чисто мнимых корней γ. Это естественным образом ставит математическую задачу о полноте системы таких нормальных мод и возможности представления любой нагрузки на торце $z = 0$ по такой системе. Если наличие чисто мнимых корней γ не явилось, в принципе, большой неожиданностью (давно и хорошо было известно о существовании бесконечного набора нераспространяющихся нормальных мод в акустическом слое с мягкими или жесткими границами, необходимых для полноты системы и аккуратного выполнения граничных условий на торце полубесконечного волновода), то открытие Миндлиным [79] (и его учениками Медиком, Оное и Пао) комплексных корней γ уравнений Рэлея – Лэмба было весьма неожиданным. Многие исследователи того времени отрицали возможность существования распространяющихся затухающих нормальных волн, ошибочно полагая, что такие волны невозможны в среде без потерь. Однако непосредственный расчет среднего за период потока энергии через поперечное сечение волновода для таких нормальных волн показал, что этот поток всегда равен нулю и, следовательно, никакая энергия по волноводу просто не переносится.

В работе [79] было также установлено, что при $\omega = 0$ дисперсионные уравнения Рэлея – Лэмба (1) и (2) переходят в независящие от коэффициента Пуассона трансцендентные уравнения

$$\sinh 2\gamma b + 2\gamma b = 0 \qquad \text{и} \qquad \sinh 2\gamma b - 2\gamma b = 0. \tag{12}$$

Был проведен краткий анализ методики определения положений симметричных четверок этих корней на комплексной плоскости γ. По всей видимости, Миндлин не знал, что уравнения (12) были впервые выведены и тщательно проанализированы в классическом мемуаре Дуголла [46] по статическим задачам для упругого слоя. Асимптотическое поведение корней этих уравнений в первом квадранте при больших номерах m дается формулами

$$\gamma_m b = \frac{1}{2}\ln(4m-1)\pi + i\left(m - \frac{1}{4}\right)\pi \qquad \text{и} \qquad \gamma_m b = \frac{1}{2}\ln(4m+1)\pi + i\left(m + \frac{1}{4}\right)\pi .$$

Доказанная в ряде работ полнота системы однородных решений при $\omega = 0$ служит основой для уверенности [63] в полноте системы нормальных мод в слое на произвольной частоте.

Наличие бесконечного набора комплексных корней дисперсионных уравнений Рэлея – Лэмба позволяет единым образом описать q-ю дисперсионную кривую, обычно обозначаемую через $L(q)$ для продольных симметричных движений и через $F(q)$ – для изгибных антисимметричных движений в слое. Каждая такая кривая простирается от нулевой до бесконечной частоты и состоит, в общем случае, из частей действительных (имеющих одинаковый знак групповой скорости), чисто мнимых и комплексных ветвей. На рис. 3*а* воспроизведен классический график для трех первых дисперсионных ветвей продольных мод.

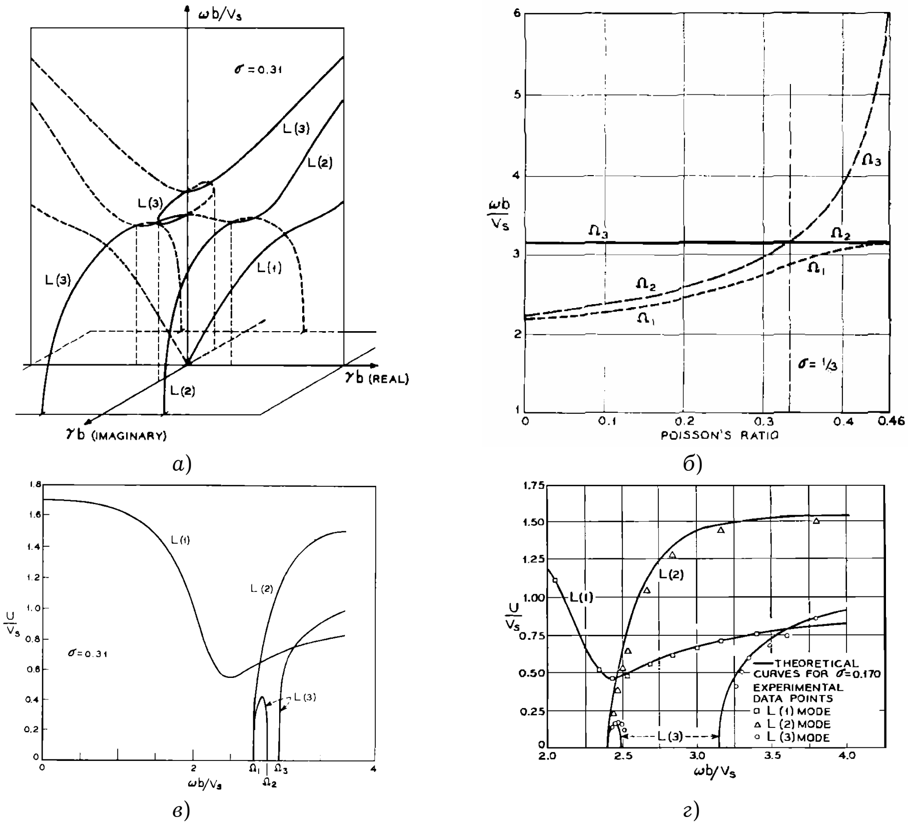
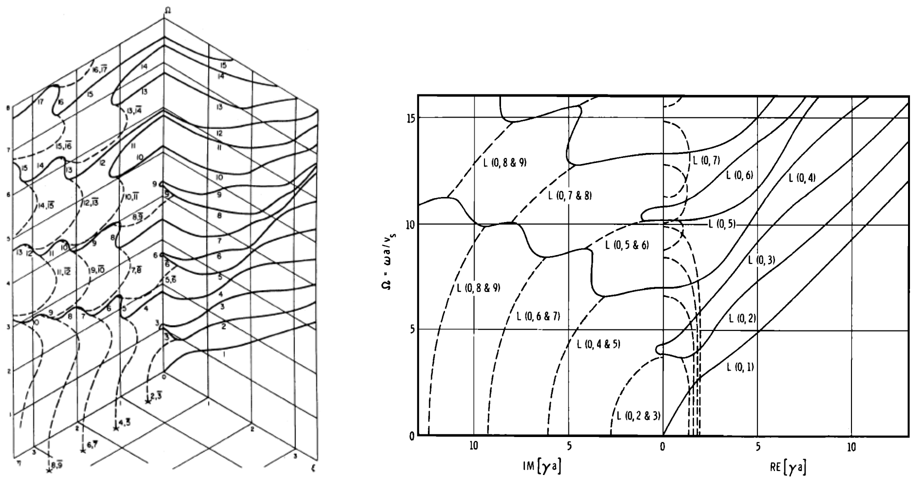


Рис. 3. Продольные моды в слое (через V_S обозначена скорость сдвиговых волн в материале): *а*) общая схема дисперсионных кривых трех первых мод; *б*) зависимость частот запирания от коэффициента Пуассона; *в*) групповые скорости трех первых мод – расчет; *г*) групповые скорости трех первых мод – эксперимент [*согласно* ***Meitzler*** (1965) [75]].

Миндлин [79] также показал, что количественное поведение этих ветвей (мнимая петля и тип движений на частотах запирания Ω_1, Ω_2 и Ω_3 при $\gamma = 0$) существенно различается при $0 \le \nu \le \frac{1}{3}$, $\nu = \frac{1}{3}$ и $\frac{1}{3} < \nu < \frac{1}{2}$. Зависимость этих частот от коэффициента Пуассона показана на рис. 1*б* и рис. 3*б*. (Интересным является вопрос о поведении дисперсионных кривых при отрицательных значениях $-1 \le \nu \le 0$, допускаемых в некоторых так называемых ауксетичных материалах [116] типа пиролитического графита.) На рис. 3*в*, *г* представлены расчетные и экспериментальные данные [75] о зависимости групповых скоростей первых трех продольных мод от частоты. В эксперименте четко прослеживается наличие обратной волны у $L(3)$ моды.

Достигнутое понимание свойств нормальных мод в слое естественным образом облегчило полное исследование дисперсионного уравнения Похгаммера – Кри (4) для гармонических волн в изотропном упругом цилиндре. Дополнительные, однако, не принципиальные трудности состоят в (квази)трехмерном характере задачи, хотя геометрия области допускает раздельное рассмотрение осесимметричных (продольных, обозначаемых $L(q)$, и крутильных, обозначаемых $T(q)$) мод и неосесимметричных (обозначаемых $F(n,q)$) мод, существующих в круговом цилиндре. Обзор большого числа публикаций 1950-х–1960-х годов, в которых была окончательно прояснена структура дисперсионного спектра нормальных мод в цилиндре, приведен в статьях [70, 73, 109, 110]. Среди оригинальных работ, внесших определяющий вклад в решение этой проблемы, следует выделить работы учеников Миндлина: МакНивена, Онoе [89] и Пао [91, 94], а также Земанека [117]. Любопытно отметить, что последняя из этих статей была вначале представлена в апреле 1962 года как диссертация на физическом факультете Университета Калифорнии в Лос Анжелесе и была опубликована лишь 10 лет спустя.

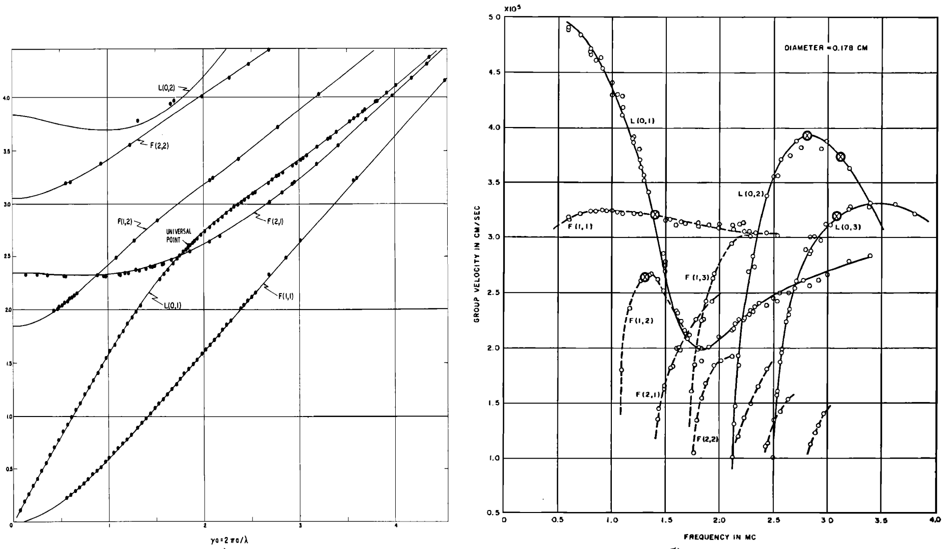
Картина сложного поведения дисперсионных кривых $L(q)$ продольных осесимметричных мод, пронумерованных в порядке возрастания номера q (черта над номером означает зеркальное отражение комплексного участка кривой относительно плоскости $\mathrm{Re}(\gamma a) = 0$), воспроизведена на рис. 4. Видно, что для фиксированной частоты дисперсионное уравнение (4) имеет *конечное* число действительных (распространяющиеся моды) и чисто мнимых корней, а также *бесконечное* число комплексных корней, отвечающих нераспространяющимся модам.



а) *б*)

Рис. 4. Дисперсионные кривые осесимметричных нормальных мод в цилиндрическом волноводе; сплошные линии – действительные и чисто мнимые корни; штриховые – комплексные корни: *а*) коэффициент Пуассона $\nu = 0.31$ [*согласно* ***Onoe, McNiven, Mindlin*** (1962) [89]]; *б*) коэффициент Пуассона $\nu = 0.3317$ [*согласно* ***Zemanek*** (1972) [117]].

На такое обстоятельство для цилиндра было впервые обращено внимание в работе Адема [34]. (Отметим как некий курьез, что в этой статье полностью отсутствуют ссылки на другие публикации, что не удивительно для тогда молодого мексиканского океанолога, совершившего первое и, как показал анализ его последующих публикаций, последнее вторжение в новую область.) Экспериментальные данные о фазовых и групповых скоростях продольных мод, приведенные на рис. 5, прекрасно согласуются с расчетными. Отметим, что получение таких данных, особенно для групповой скорости, и сегодня представляет непростую задачу.



а) *б*)

Рис. 5. Экспериментальные данные измеренных дисперсионных зависимостей продольных и изгибных мод в цилиндре: *а*) алюминий, $\nu = 0.3317$ [*согласно* ***Zemanek*** (1972) [117]]; *б*) групповые скорости мод, $\nu = 0.17$ [*согласно* ***Meitzler*** (1961) [74]].

Для неосимметричных волн $F(1,q)$ трехмерная картина дисперсионных кривых спектра приведена в работе Пао [91]. Отметим также, что вторая распространяющаяся изгибная мода была экспериментально обнаружена Куртисом [44] и лишь потом установлена [32] численно! До публикации этих работ на основе детальных (и как оказалось, все же неполных) расчетов Хадсона [60] считалось, что уравнение Похгаммера – Кри для изгибных мод в цилиндре имеет лишь один действительный корень.

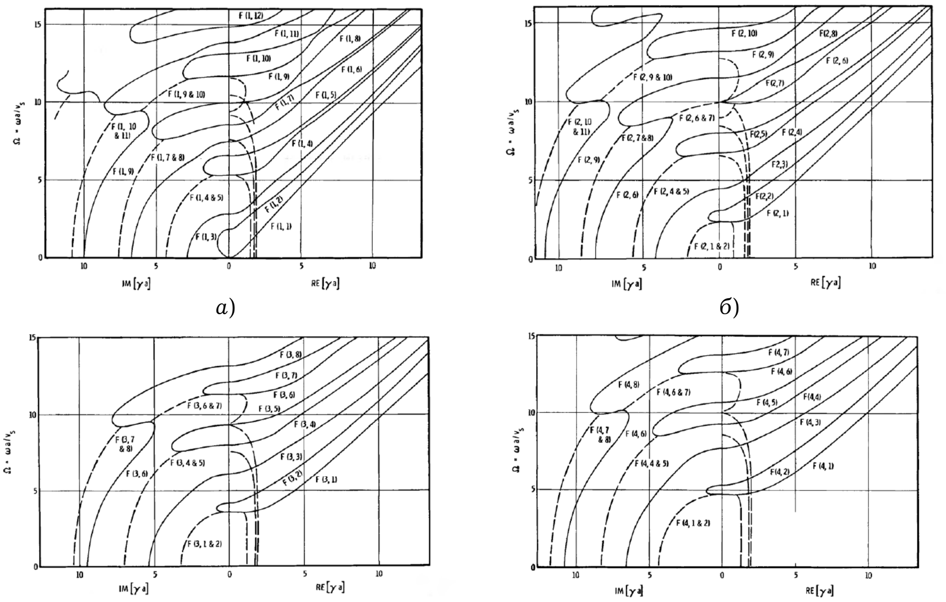
Земанек [117] привел детальное обсуждение поведения комплексных корней, которые располагаются на плоскости $\mathrm{Re}(\gamma a) + i\,\mathrm{Im}(\gamma a)$ симметричными четверками в силу структуры дисперсионных уравнений, и указал на их важную роль при решении задач об отражении и возбуждении нормальных мод в полубесконечном цилиндре, а также при формировании особой краевой моды (*end resonance*) в конечном длинном цилиндре, впервые обнаруженной экспериментально в работе Оливера [86]. (Аналогичная краевая мода, *edge mode*, в толстом круглом диске была обнаружена и детально описана в замечательной статье Шоу [107], для тонкой прямоугольной пластинки аналогичная мода была отмечена Оное [87]. Обзор всех результатов увел бы нас слишком далеко от предмета данной статьи.)

Расположение комплексных корней уравнения Похгаммера – Кри на плоскости $\omega = 0$ определяется трансцендентным уравнением

$$(\gamma a)^2 \left[J_0^2(i\gamma a) + J_1^2(i\gamma a) \right] + 2(1-\nu) J_1^2(i\gamma a) = 0\,, \tag{13}$$

которое получается из (4) предельным переходом при $\omega \to 0$. Это уравнение, естественно, совпадает с уравнением для однородных статических решений для упругого цилиндра, впервые полученным штатным преподавателем Михайловской артиллерийской академии в Санкт-Петербурге Шиффом [105] и позднее детально рассмотренным Дуголлом [47]. Отметим, что уравнение (13) не имеет чисто мнимых корней, а его комплексные корни, в отличие от уравнений (12), зависят от коэффициента Пуассона ν. Асимптотика корней $\gamma_m a$ в первом квадранте при больших m определяется приближенным соотношением $\gamma_m a \approx \frac{1}{2}\ln 4m\pi + im\pi$ и не зависит от ν.

Картины дисперсионных кривых для неосесимметричных ($n \geq 1$) нормальных мод в цилиндре представлены на рис. 6 для значения $\nu = 0.3317$ (алюминий). Здесь следует обратить внимание на два обстоятельства: во-первых, для любого n на фиксированной частоте имеется *бесконечное* число чисто мнимых корней и, во-вторых, при $n \geq 2$ упругий волновод *не имеет* распространяющихся мод.



а) б) в) г)

Рис. 6. Дисперсионные кривые неосесимметричных нормальных мод в цилиндрическом волноводе при $\nu = 0.3317$ [*согласно* ***Zemanek*** (1972) [117]]; сплошные линии – действительные и чисто мнимые участки ветвей, штриховые – комплексные участки ветвей: *а*) $n = 1$; *б*) $n = 2$; *в*) $n = 3$; *г*) $n = 4$.

Низкочастотное поведение дисперсионных кривых для $n = 1$ («изгибные» моды), представленное на рис. 6*а*, несколько схоже с изгибными нормальными модами в слое (рис. 2*б*). Одно из интересных различий в этих картинах состоит в том, что для цилиндра некоторые из мнимых участков ветвей идут к нулевому значению частоты.

Роль комплексных и чисто мнимых корней дисперсионного уравнения в задачах о распространении волн в бесконечных упругих волноводах ограничивается обеспечением полноты получаемого решения на любой частоте. Однако эта роль становится определяющей при рассмотрении вынужденных колебаний конечных или полубесконечных тел и, в частности, при трактовке необычного явления краевого резонанса на нераспространяющихся модах в полубесконечных слое [10, 11, 90, 103, 118] и цилиндре [13, 57], когда волновод является запертым для распространяющихся мод, уносящих подводимую с торца энергию на бесконечность.

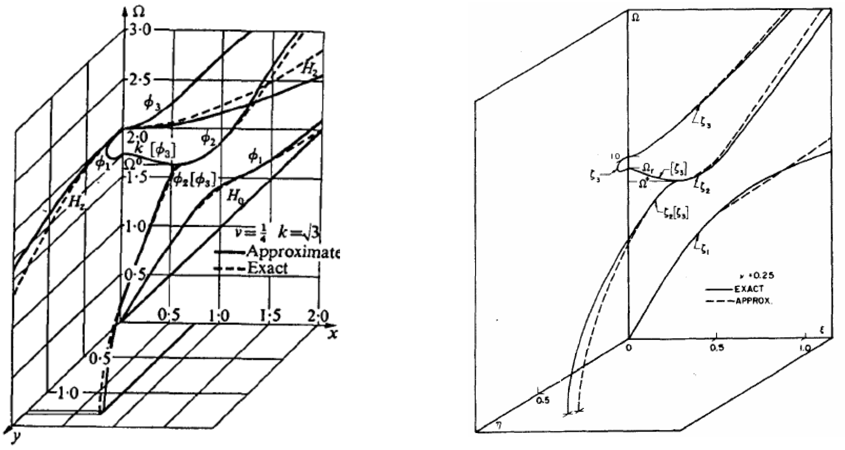
Подводя итог, можно утверждать, что к настоящему времени характеристики кругового (цилиндр) и плоского (слой) упругих изотропных волноводов получены и систематизированы исчерпывающим образом. Эти результаты систематизированы и представлены с различной степенью полноты в общих обзорах [36, 76, 109, 110] и обзорах, написанных непосредственными участниками событий [38, 70, 73, 81, 88, 92, 93], а также в учебниках и монографиях [1, 2, 6, 12, 17, 28, 31, 33, 37, 55, 77, 100].

3. Приближенные теории распространения волн в упругих волноводах. Трудности в построении и анализе решений дисперсионных уравнений Рэлея – Лэмба и Похгаммера – Кри для изотропного упругого слоя и цилиндра приводили к естественному желанию построить некоторые приближенные теории, адекватно описывающие процессы волноводного распространения в таких телах. Нужно сразу сказать, что подобные теории создавались еще задолго до введения модели упругого тела: для продольных и изгибных колебаний и волн в одномерных стержнях такие теории были развиты еще Я. Бернулли и Эйлером [113] и были широко известны в акустике XIX века [29]. Аналогичные одномерные теории планарных (симметричных относительно срединной поверхности) и изгибных колебаний в пластинке были предметом пристального внимания выдающихся ученых первой половины XIX века − Коши [41], Пуассона [96] и Кирхгоффа [62]. Широко известная история о роли французского императора Наполеона, немецкого акустика Хладни и премии французской Академии Наук в начальном толчке для создания мадемуазель Софи Жермен и Лагранжем теории тонких пластин вряд ли требует специального упоминания, за исключением как всегда эмоционально насыщенной и глубоко оригинальной статьи Трусделла [114]. Исторический обзор в капитальном трактате Лява [19] и замечательная книга Тимошенко [30] помогут составить четкое представление о характере вводимых гипотез и тех трудностях, которые приходилось преодолевать на ранних этапах.

Следует отметить, что все такие приближенные теории пластин и стержней позволяли описывать лишь одну низшую моду в таких одномерных волноводах. При этом продольные моды в стержне и пластинке были бездисперсионными с типичной зависимостью $\omega^2 = A\gamma^2$, а низшая изгибная мода стержня имела дисперсионное соотношение вида $\omega^2 = B\gamma^4$, что приводило к нефизическим результатам для фазовых и групповых скоростей на высоких частотах и коротких волнах. Пионерская работа Тимошенко [111], которая ввела знаменитые теперь поправки на сдвиг и инерцию изгибных мод в слое, породила огромную литературу. (Миндлин в небольшом, но чрезвычайно емком обзоре [82] утверждал, что такое уравнение было впервые выведено в 1859 году Брессом [40] и оставалось незамеченным длительное время. Тимошенко [30] дает лишь краткое упоминание об этом.) Идейно аналогичная работа Миндлина [78] имела такое же влияние на последующие исследования в рамках уточненной теории пластин. Сводка основных результатов исчерпывающе представлена в замечательных обзорах Григолюка и Селезова [9] и МакНивена [69].

Однако в этих классических работах все же не удавалось учесть должным образом наличие нескольких распространяющихся мод в слое. Наиболее совершенная приближенная теория продольных движений в слое, позволяющая учесть не только первые три распространяющиеся моды, но и первую комплексную ветвь и чисто мнимую петлю, была создана Миндлиным и Медиком [85]. В этой теории компоненты вектора перемещений представлялись в виде суммы нескольких полиномов Лежандра по толщинной координате, и в результате трансцендентное дисперсионное уравнение Рэлея − Лэмба было заменено бикубическим уравнением относительно величин ω^2 и γ^2 с набором ряда поправочных коэффициентов для согласования частот запирания дисперсионных кривых точного и приближенного решений и наклонов длинноволновых участков этих кривых. Не входя в интереснейшие детали этой теории «второго порядка» (так названной авторами), отметим, что такая теория дает надежное качественное, а во многих аспектах − и количественное согласование поведения дисперсионных кривых в слое (рис. 7*а*). При этом полностью согласуются частоты запирания второй и третьей распространяющихся мод, а также практически совпадает положение частотного минимума на второй/третьей ветви, связанного с участком обратной волны. Поведение комплексной ветви второй и третьей моды аппроксимируется хуже и этим, по-видимому, можно объяснить заниженное на 13% по сравнению с экспериментом значение частоты краевого резонанса для толстого круглого диска [53] и тонкой прямоугольной пластинки [72].

Аналогичная приближенная теория «второго порядка» для продольных мод в стержне была разработана Миндлиным и МакНивеном [84] с привлечением полиномов Якоби для описания радиальной зависимости вектора перемещений. И в этом случае бикубическое уравнение давало отличное согласование действительных ветвей, описывало комплексный участок и частотный минимум с обратной волной (рис. 7*б*). Согласование комплексного участка второй и третьей моды с точным решением было несколько хуже, что приводило к тому же 13% занижению частоты краевого резонанса [86] при расчетах [71] по этой теории.



а) б)

Рис. 7. Дисперсионные кривые для низших продольных мод для слоя и цилиндра согласно теории «второго порядка» и точным решениям уравнений Рэлея − Лэмба и Похгаммера − Кри при $\nu = 0.25$: *а*) слой [*согласно* ***Mindlin, Medick*** (1959) [85]]; *б*) цилиндр [*согласно* ***Mindlin, McNiven*** (1960) [84]].

4. «Стоя на плечах гигантов». Заканчивая наш, неизбежно краткий, обзор основных результатов для упругих волноводов, полученных на протяжении длительного этапа развития теории упругости, приведем некоторые данные, путем количества ссылок косвенно показывающие влияние основных классических работ по упругим волноводам на современное состояние исследований (табл. 1). Учитывая «возраст» статей, возможность самоцитирования здесь практически исключена. (Отметим, что ссылки в *Google Scholar* относятся не только к приведенным в статьях, но и в книгах, патентах, диссертациях. При этом ссылки на одну и ту же статью с различным сокращением названия журнала или инициалов автора даются раздельно.)

Таблица 1

	ISI Web of Science: 1945 − май 2008	*Scopus*: 1994 − май 2008	*Google Scholar*
Pochhammer (1876) [95] − дисперсионное уравнение продольных и изгибных мод в цилиндрическом волноводе (цилиндре, для краткости)	258	128	104
Chree (1886) [42] − дисперсионное уравнение продольных мод в цилиндре	37	15	21
Rayleigh (1888/1889) [99] − дисперсионное уравнение в плоском слое	45	37	48
Chree (1889) [43] − «дисперсионное уравнение в цилиндре»	175	105	116
Lamb (1890) [65] − дисперсионное уравнение в тонкой пластинке	16	17	17
Lamb (1917) [67] − первая ветвь продольных и изгибных мод в слое	284	164	222
Timoshenko (1922) [111] − поправка на сдвиг и инерцию поперечного движения в слое	225	101	120
Bancroft (1941) [39] − продольная мода в цилиндре − расчет	186	52	83
Hudson (1943) [66] − изгибная (одна!) мода в цилиндре − расчет	86	13	39
Davies (1948) [45] − продольные моды в цилиндре − расчет и измерения	265	127	178
Mindlin (1951) [78] − поправка на сдвиг и инерцию поперечного движения в пластине	1515	795	974
Mindlin (1955/2006) [83] − общая теория нормальных мод в слое	−	56	88
Mindlin (1957) [79] − «решетка Миндлина»	2	7	16

Shaw (1956) [107] – краевая мода (edge mode) в толстом диске	132	49	48
Tolstoy & Usdin (1957) [112] – «обратная волна» в слое – расчет	58	19	29
Oliver (1957) [86] – концевой резонанс (end resonance) в длинном цилиндре	58	15	19
Mindlin & Medick (1959) [85] – теория «второго порядка» для слоя	99	36	53
Mindlin & McNiven (1960) [84] – теория «второго порядка» для цилиндра	68	25	26
Onoe, McNiven & Mindlin (1962) [89] – дисперсионное уравнение продольных мод в цилиндре – расчет	62	35	36
Meitzler (1965) [75] – «обратная волна» в слое – измерения	40	26	23
Zemanek (1972) [117] – дисперсионное уравнение всех типов мод в цилиндре – расчет	92	75	63

Эти данные в совокупности показывают хорошую корреляцию между всеми тремя системами с явным преобладанием результатов (и это лишь по статьям) в первой поисковой системе. Видно, что наибольшей популярностью у последующих поколений исследователей пользовались две классические работы [78, 111] по приближенной теории стержней и пластин.

5. Заключительные замечания. Авторы, работая над этой статьей, постоянно помнили об одном из четырех правил великого философа и математика Декарта [15, с. 23]: «*делать всюду настолько полные перечни и такие общие обзоры, чтобы быть уверенным, что ничего не пропущено*». (Как считал академик А. Н. Крылов в малоизвестной в настоящее время статье [18, с. 62], этим правилам истинного понимания всякого дела следовала в целом Германия, готовясь к первой мировой войне.)

С другой стороны, знаменитый немецкий математик Вейерштрасс, вступая 15 октября 1873 года в должность ректора Берлинского университета в своей речи [5, с. 1327] передал слушателям совет другого великого немецкого математика – Якоби: «*Сесть и пожелать делать открытия не есть путь для проникновения в науку; уяснять себе все уже известные частности до полной отчетливости, заниматься задачами, каковы бы они не были все равно, — вот путь, следуя которому можно встретить истинные задачи науки и начала, приводящие к открытиям*» и далее уже от себя продолжал: «*Другим можно лучше рекомендовать другой путь, следуя которому и сам Якоби, как известно, находил повод ко многим из своих работ. В старинных мало читаемых сборниках научных учреждений, а также в обширной научной переписке ученых прежних времен заключается громадное количество научного материала, из которого всякий, кто сумеет, может вычитать многое побуждающее к собственной работе, попутно может и научиться многому полезному*».

Мы старались следовать всем этим указаниям и полагаем, что почти 125-летняя история исследования направленного распространения волн в упругих волноводах различной конфигурации представляет и сегодня немалый научный и практический интерес.

Словами Гельмгольца мы начали эту статью, его же словами мы и закончим. На общем заседании всех секций собрания немецких естествоиспытателей и врачей в Инсбруке в 1869 году Гельмгольц зачитал обширный доклад «О цели и об успехах естествознания», в котором он четко сказал [7, с. 44]: «*Конечно, при отдельных исследованиях обычно не приходится заранее ожидать от них непосредственной практической пользы, хотя практическими применениями результатов естествознания преобразована вся жизнь современного человечества. Но обыкновенно возможность этих применений обнаруживается случайно там, где это меньше всего предполагали; погоня же за ними не приводит обыкновенно ни к какой цели, если заранее не иметь для этого очень надежной близкой точки опоры, благодаря которой все дело сводится лишь к устранению отдельных препятствий к практическому их выполнению. Рассматривая историю важнейших изобретений, мы видим, что они были сделаны, особенно в древнейшее время, или работниками и ремесленни-*

ками, которые, занимаясь в продолжение всей своей жизни работой только одного рода, то благодаря счастливой случайности, то ощупью сотни раз повторяя один и тот же опыт, находили новые, лучшие приемы в своей работе. Или, – и это собственно имело место в большинстве случаев при новейших изобретениях, – они являются плодом глубокого научного знакомства с соответствующим предметом, причем знакомство это приобреталось всегда не в расчете на возможную практическую его пользу, а ради достижения научной полноты в области общего познания».

В своих глубоких и разнообразных исследованиях академик Я. С. Подстригач всегда умело сочетал такую научную полноту [21, 22, 25, 27] с практической пользой [8, 23, 24, 26]. Многочисленные труды львовской школы механиков, созданной Ярославом Степановичем совместно с коллегами и учениками, были и остаются ярким примерами творческого отношения к актуальным проблемам современной Механики.

1. *Белл Дж. Ф.* Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. Часть I. Малые деформации. – Москва: Наука, 1984. – 597 с.
2. *Бергман Л.* Ультразвук. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1957. – 726 с.
3. *Бурлий П. В., Кучеров И. Я.* Обратные упругие волны в пластинах // Письма в ЖЭТФ. – 1977. – **26**, № 9. – С. 644–647.
4. *Быpдин В. М.* Обратные волны: столетие первой работы, истоки и развитие обратноволновой механики и электродинамики // Радиотехника и электроника. – 2005. – **50**, № 12. – С. 1413–1438.
5. *Вейерштрасс К.* Речь, произнесенная при вступлении в должность ректора Берлинского университета 15 октября 1873 года // Успехи физ. наук. – 1999. – **169**, № 12. – С. 1325–1328.
6. *Викторов И. А.* Физические основы применения ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба в технике. – Москва: Наука, 1966. – 168 с.
7. *Гельмголь[т]ц Г.* О цели и об успехах естествознания // Философия науки. Естественно-научные основы материализма. Часть I. Физика. Вып. I. – Москва–Петроград: Госиздат, 1923. – С. 42–66.
   То же: *Гельмгольц Г.* Популярные речи. Часть I. – Санкт-Петербург: Изд-во К. Риккера, 1896. – С. 81–105.
8. *Григолюк Э. И., Подстригач Я. С., Бурак Я. И.* Оптимизация нагрева оболочек и пластин. – Киев: Наук. думка, 1979. – 364 с.
9. *Григолюк Э. И., Селезов И. Т.* Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек // Итоги науки и техники. Механика деформируемых твердых тел. – Т. 5. – Москва: ВИНИТИ, 1973. – 272 с.
10. *Гринченко В. Т.* О локализации волновых полей в упругих волноводах // Прикл. механика. – 2005. – **41**, № 9. – С. 38–45.
11. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* О резонансе в полубесконечной упругой полосе // Прикл. механика. – 1980. – **16**, № 2. – С. 58–63.
12. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. – Киев: Наук. думка, 1981. – 284 с.
13. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Особенности волнового поля в полубесконечном упругом цилиндре (краевой резонанс) // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1982. – № 6. – С. 81–89.
14. *Дейвис Р. М.* Волны напряжений в твердых телах. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1961. – 104 с.
15. *Декарт Р.* Рассуждение о методе с приложениями: Диоптрика, Метеоры, Геометрия. – Москва: Изд-во АН СССР, 1953. – 656 с.
    То же: *Декарт Р.* Рассуждение о методе, чтобы верно направлять свой разум и отыскивать истину в науках // Сочинения в 2 томах. – Т. 1. – Москва: Мысль, 1989. – С. 250–296.
16. *Довгий С. О., Ліфанов І. К.* Метод сингулярних інтегральних рівнянь. Теорія та застосування. – Київ: Наук. думка, 2004. – 510 с.
17. *Кольский Г.* Волны напряжений в твердых телах. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1955. – 192 с.
18. *Крылов А. Н.* О некоторых современных научно-технических вопросах // Изв. Российской АН (VI сер.). Отд. физ.-мат. наук. – 1920. – **14**, № 10. – С. 62–71.
    То же: *Крылов А. Н.* Воспоминания и очерки. – Москва: Изд-во АН СССР, 1956. – С. 565–575.
19. *Ляв А.* Математическая теория упругости. – Москва–Ленинград: ОНТИ НКТП, 1935. – 674 с.
20. *Підстригач Я. С.* Вибрані праці. – Киев: Наук. думка, 1995. – 461 с.
21. *Подстригач Я. С., Бурак Я. И., Гачкевич А. Р., Чернявская Л. В.* Термоупругость электропроводных тел. – Киев: Наук. думка, 1977. – 247 с.

22. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М.* Обобщенная термомеханика. – Киев: Наук. думка, 1976. – 311 с.
23. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М., Семерак М. М.* Температурные поля и напряжения в элементах электровакуумных приборов. – Киев: Наук. думка, 1981. – 342 с.
24. *Подстригач Я. С., Осадчук В. А., Марголин А. М.* Остаточные напряжения, длительная прочность и надежность стеклоконструкций. – Киев: Наук. думка, 1991. – 290 с.
25. *Подстригач Я. С., Повстенко Ю. З.* Введение в механику поверхностных явлений в деформируемых твердых телах. – Киев: Наук. думка, 1985. – 200 с.
26. *Подстригач Я. С., Поддубняк А. П.* Рассеяние звуковых пучков на упругих телах сферической и цилиндрической формы. – Киев: Наук. думка, 1986. – 264 с.
27. *Подстригач Я. С., Швец Р. Н.* Термоупругость тонких оболочек. – Киев: Наук. думка, 1978. – 343 с.
28. *Сеймов В. М., Трофимчук А. Н., Савицкий О. А.* Колебания и волны в слоистых средах. – Киев: Наук. думка, 1990. – 222 с.
29. *Стретт Дж. В. (Лорд Рэлей)* Теория звука. – Т. I. – Москва: Гостехтеоретиздат, 1955. – 504 с.
30. *Тимошенко С. П.* История науки о сопротивлении материалов, с краткими сведениями из теории упругости и теории сооружений. – Москва: Гостехтеоретиздат, 1957. – 536 с.
31. *Трофимчук А. Н., Гомилко А. М., Савицкий О. А.* Динамика пористоупругих насыщенных жидкостью сред. – Киев: Наук. думка, 2003. – 232 с.
32. *Abramson H. N.* Flexural waves in elastic beams of circular cross section // J. Acoust. Soc. Amer. – 1957. – **29**. – P. 1284–1286. (*)
33. *Achenbach J. D.* Wave propagation in elastic solids. – Amsterdam: North-Holland, 1984. – 425 p.
34. *Adem J.* On the axially-symmetric steady wave propagation in elastic circular rods // Quart. Appl. Math. – 1954. – **12**. – P. 261–275.
35. *Aggarwal R. R., Shaw E. A. G.* Axially symmetric vibrations of a finite isotropic disk. IV // J. Acoust. Soc. Amer. – 1954. – **26**. – P. 341–342.(*)
36. *Al-Mousawi M. M.* On experimental studies of longitudinal and flexural wave propagation: an annotated bibliography // Appl. Mech. Reviews. – 1986. – **39**. – P. 853–864.
37. *Auld B. A.* Acoustic fields and waves in solids. – New York: Wiley, 1973. – Vol. 2. – 415 p.
38. *Auld B. A.* Rayleigh wave propagation // Rayleigh-Wave Theory and Application. Proceedings of an International Symposium at the Royal Institution (London, 15–17 July 1985). – Berlin: Springer, 1985. – P. 12–28.
39. *Bancroft D.* The velocity of longitudinal waves in cylindrical bars // Phys. Rev. – 1941. – **59**. – P. 588–593. (*)
40. *Bresse J. A. C.* Cours de mécanique appliquée. Partie I. – Paris: Mallet-Bachelier, 1859. – 352 p.
41. *Cauchy A. L.* Sur l'équilibre et le mouvement d'une lame solide // Exercises Math. – 1828. – **3**. – P. 245–326.

    То же: // Œuvres complétes d'Augustin Cauchy (II série). – Paris: Gauthier-Villars, 1890. – **VIII**. – P. 288–380. (*)
42. *Chree C.* Longitudinal vibrations of a circular bar // Quart. J. Pure Appl. Math. – 1886. – **21**. – P. 287–298.
43. *Chree C.* The equations of an isotropic elastic solid in polar and cylindrical coordinates, their solutions and applications // Trans. Cambridge Philos. Soc. – 1889. – **14**. – P. 250–309.
44. *Curtis C. W.* Second mode vibrations of the Pochhammer – Chree frequency equation // J. Appl. Phys. – 1954. – **25**. – P. 928. (*)
45. *Davies R. M.* A critical study of the Hopkinson pressure bar // Philos. Trans. Roy. Soc. London. – 1948. – A**240**. – P. 375–457. (*)
46. *Dougall J.* An analytical theory of the equilibrium of an isotropic elastic plate // Trans. Roy. Soc. Edinburgh. – 1904. – **41**. – P. 129–228.
47. *Dougall J.* An analytical theory of the equilibrium of an isotropic elastic rod of circular section // Trans. Roy. Soc. Edinburgh. – 1914. – **49**. – P. 895–978.
48. *Field G. S.* Velocity of sound in cylindrical rods // Canadian J. Research. – 1931. – **5**. – P. 619–624.
49. *Field G. S.* Vibrations in solid rods // Nature. – 1932. – **130**. – P. 130–131.
50. *Field G. S.* Vibrations in solid rods and disks // Canadian J. Research. – 1933. – **8**. – P. 563–574.
51. *Field G. S.* Longitudinal waves in cylinders of liquid, in hollow tubes and in solid rods // Canadian J. Research. – 1934. – **11**. – P. 254–263.

52. *Field G. S.* Dispersion of supersonic waves in cylindrical rods // Phys. Rev. – 1940. – **57**. – P. 1188. (*)
53. *Gazis D. C., Mindlin R. D.* Extensional vibrations and waves in a circular disk and a semi-infinite plate // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1960. – 27. – P. 541–547.
54. *Giebe E., Blechschmidt E.* Experimentelle und theoretische Untersuchungen über Dehnungseigenschwingungen von Stäben und Rohren. I // Ann. Physik (5. Folge) – 1933. – **18**. – S. 417–456. (*)
55. *Graff K. F.* Wave motion in elastic solids. – New York: Dover, 1991. – 692 p.
56. *Holden A. H.* Longitudinal modes of elastic waves in isotropic cylinders and slabs // Bell System Tech. J. – 1951. – **30**. – P. 956–969.
57. *Holst A., Vassiliev D.* Edge resonance in an elastic semi-infinite cylinder // Appl. Analysis. – 2000. – **74**. – P. 479–495. (*)
58. *Howard J. N.* John William Strutt, third Baron Rayleigh // Appl. Optics. – 1964. – **3**. – P. 1091–1101. (*)
    То же: *Говард Дж.* Джон Уильям Стрэтт (лорд Рэлей) // Успехи физ. наук. – 1966. – **88**, № 1. – С. 149–160.
59. *Howard J. N.* Some sketches of Rayleigh // Rayleigh-Wave Theory and Application. Proceedings of an International Symposium at the Royal Institution (London, 15–17 July 1985). – Berlin: Springer, 1985. – P. 2–9.
60. *Hudson G. E.* Dispersion of elastic waves in solid circular cylinders // Phys. Rev. – 1943. – **63**. – P. 46–51. (*)
61. *Hutchinson J. R., Percival C. M.* Higher modes of longitudinal wave propagation in thin rod // J. Acoust. Soc. Amer. – 1968. – **44**. – P. 1204–1210. (*)
62. *Kirchhoff G. R.* Ueber das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe // J. Reine Angew. Math. – 1850. – **40**. – S. 51–88.
63. *Kirrmann P.* On the completeness of Lamb modes // J. Elasticity. – 1994. – **37**. – P. 39–69. (*)
64. *Kolsky H.* Stress waves in solids // J. Sound Vibr. – 1964. – **1**. – P. 88–110. (*)
65. *Lamb H.* On the flexure of an elastic plate // Proc. London Math. Soc. – 1889. – **21**. – P. 70–90. (*)
66. *Lamb H.* On group velocity // Proc. London Math. Soc. (Ser. 2). – 1904. – **1**. – P. 473–479. (*)
67. *Lamb H.* On waves in an elastic plate // Proc. Roy. Soc. London. – 1917. – A**93**. – P. 114–128. (*)
68. *Malischewsky P. G.* Comparison of approximated solutions for the phase velocity of Rayleigh waves (Comment on ‘Characterization of surface damage via surface acoustic waves’) // Nanotechnology. – 2005. – **16**. – P. 995–996. (*)
69. *McNiven H. D.* Literature review: approximate theories governing axisymmetric wave propagation in elastic rods // Shock Vibr. Digest. – 1975. – **7**. – P. 90–96.
70. *McNiven H. D., McCoy J. J.* Vibration and wave propagation in rods // R. D. Mindlin and applied mechanics. – New York: Pergamon, 1974. – P. 197–225.
71. *McNiven H. D., Perry D. C.* Axially symmetric waves infinite, elastic rods // J. Acoust. Soc. Amer. – 1962. – **34**. – P. 433–437. (*)
72. *Medick M. A., Pao Y.-H.* Extensional vibrations of thin rectangular plate // J. Acoust. Soc. Amer. – 1965. – **37**. – P. 59–65. (*)
73. *Meeker T. R., Meitzler A. H.* Guided wave propagation in elongated cylinders and plates // Physical acoustics. Principles and methods. – New York: Acad. Press., 1964. – **1A**. – P. 111–167.
    То же: *Микер Т., Мейтцлер А.* Волноводное распространение в протяженных цилиндрах и пластинках пластинках // Физ. акустика: Приборы и методы ультразвуковых исследований. – Москва: Мир, 1966. – **1А**. – С. 140–203.
74. *Meitzler A. H.* Mode coupling occurring in the propagation of elastic pulses in wires // J. Acoust. Soc. Amer. – 1961. – **33**. – P. 435–445. (*)
75. *Meitzler A. H.* Backward-wave transmission of stress pulses in elastic cylinders and plates // J. Acoust. Soc. Amer. – 1965. – **38**. – P. 835–842. (*)
76. *Miklowitz J.* Recent developments in elastic wave propagation // Appl. Mech. Reviews. – 1960. – **13**. – P. 865–878.
77. *Miklowitz J.* The theory of elastic wave and waveguides. – Amsterdam: North-Holland, 1978. – 618 p.
78. *Mindlin R. D.* Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1951. – **18**. – P. 31–38.
79. *Mindlin R. D. [Onoe M., Medick M. A.]* Mathematical theory of vibrations of elastic plates // Proc. 11th Annual Symp. on Frequency Control (Fort Monmouth, N.J., 7–9 May 1957). – Fort Monmouth, N.J.: U. S. Army Signal Engineering Laboratories, 1957. – P. 1–40. (*)

80. *Mindlin R. D.* Mathematical theory of vibrations of elastic plates and bars // Proc. 12th Annual Symp. on Frequency Control (Fort Monmouth, N.J., 6–8 May 1958). – Fort Monmouth, N.J.: U. S. Army Signal Research and Development Laboratories, 1958. – P. 1–8. (*)
81. *Mindlin R. D.* Waves and vibrations in isotropic elastic plates // Proc. 1st Symp. on Naval Structural Mechanics (Stanford Univ., 16–20 July 1958). – New York: Pergamon, 1960. – P. 199–232.
82. *Mindlin R. D.* The sesquicentennial of the first crystal plate equations // Proc. the 33rd Annual Symp. on Frequency Control (Atlantic City, N.J., 30 May – 1 June 1979). – Fort Monmouth, N.J.: U. S. Army Electronics Research and Development Command, 1979. – P. 1–3. (*)
83. *Mindlin R. D.* An introduction to the mathematical theory of vibrations of elastic plates. – Singapore: World Scientific, 2006. – 190 p.
84. *Mindlin R. D., McNiven H. D.* Axially symmetric waves in elastic rods // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1960. – **27**. – P. 145–151.
85. *Mindlin R. D., Medick M. A.* Extensional vibrations of elastic plates // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1959. – **26**. – P. 561–569.
86. *Oliver J.* Elastic wave dispersion in a cylindrical rod by a wide-band, short-duration pulse technique // J. Acoust. Soc. Amer. – 1957. – **29**. – P. 189–194. (*)
87. *Onoe M.* Contour vibrations of thin rectangular plates // J. Acoust. Soc. Amer. – 1958. – **30**. – P. 1159–1162. (*)
88. *Onoe M.* Complex branches of dispersion equations and Mindlin's angle for titled edges // Proc. 2006 IEEE Int. Frequency Control Symp. and Exposition (Miami, 5–7 June 2006). – 2006. – P. 723–731. (*)
89. *Onoe M., McNiven H. D., Mindlin R. D.* Dispersion of axially symmetric waves in elastic rods // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1962. – **29**. – P. 729–734.
То же: *Оное М., МакНивен Х., Миндлин Р.* Дисперсия осесимметричных волн в упругих стержнях // Тр. амер. об-ва инж.-механиков. Прикл. механика. – 1962. – **29**, № 4. – С. 139–145.
90. *Pagneux V.* Revisiting the edge resonance for Lamb waves in a semi-infinite plate // J. Acoust. Soc. Amer. – 2006. – **120**. – P. 649–656. (*)
91. *Pao Y.-H.* The dispersion of flexural waves in an elastic, circular cylinder // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1962. – **29**. – P. 61–64.
То же: *Пао У.-Х.*, Дисперсия изгибных волн в упругом круговом цилиндре // Тр. амер. об-ва инж.-механиков. Прикл. механика. – 1962. – **29**, № 1. – С. 102–106.
92. *Pao Y.-H.* Elastic waves in solids // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1983. – **50**. – P. 1152–1164.
93. *Pao Y.-H., Kaul R. K.* Waves and vibration in isotropic and anisotropic plates // R. D. Mindlin and applied mechanics. – New York: Pergamon, 1974. – P. 149–195.
94. *Pao Y.-H., Mindlin R. D.* Dispersion of flexural waves in an elastic, circular cylinder // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1960. – **27**. – P. 513–520.
95. *Pochhammer L.* Ueber die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten kleiner Schwingungen in einem unbegrenzten isotropen Kreiscylinder // J. Reine Angew. Math. – 1876. – **81**. – S. 324–336.
96. *Poisson S. D.* Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques // Mém. Acad. Sci. Inst. France (ser. 2). – 1829. – **8**. – P. 357–570.
97. *Potter D. S., Leedham C D.* Normalized numerical solutions for Rayleigh's frequency equation // J. Acoust. Soc. Amer. – 1967. – **41**. – P. 148–153. (*)
98. *Rayleigh, Lord.* On waves propagated along the plane surfaces of an elastic solid // Proc. London Math. Soc. – 1885. – **17**. – P. 4–11. (*)
То же: // Scientific Papers by John William Strutt, Baron Rayleigh, D. Sc., F.R.S., Honorary Fellow of Trinity College, Cambridge, Professor of Natural Philosophy in the Royal Institution. – Cambridge: Cambridge University Press, 1900. – **II**. – P. 441–447.
99. *Rayleigh, Lord.* On the free vibrations of an infinite plate of homogeneous isotropic elastic matter // Proc. London Math. Soc. – 1889. – **20**. – P. 225–234. (*)
То же: // Scientific Papers by John William Strutt, Baron Rayleigh, D. Sc., F.R.S., Honorary Fellow of Trinity College, Cambridge, Professor of Natural Philosophy in the Royal Institution. – Cambridge: Cambridge University Press, 1902. – **III**. – P. 249–257.
100. *Redwood M.* Mechanical waveguides. – London: Pergamon, 1960. – 300 p.
101. *Redwood M., Lamb J.* On propagation of high frequency compressional waves in isotropic cylinders // Proc. Phys. Soc. London. – 1957. – B**70**. – P. 136–143.
102. *Röhrich K.* Ausbrietungsgesschwindigkeit ultraakustischer Schwingungen in zylindrischen Stäben // Z. Phys. – 1932. – **73**. – S. 813–832. (*)
103. *Roitberg I., Vassiliev D., Weidl T.* Edge resonance in an elastic semi-strip // Quart. J. Mech. Appl. Math. – 1998. – **51**. – P. 1–13. (*)

104. *Royer D., Clorennec D.* An improved approximation for the Rayleigh wave equation // Ultrasonics. – 2007. – **46**. – P. 23–24. (*)
105. *Schiff P. A.* Sur l'équilibre d'un cylindre élastique // J. Math. Pures Appl. (Ser. 3) – 1883. – **9**. – P. 407–421. (*)
106. *Schoeneck H.* Experimentelle Untersuchungen der Schwingungen zylindrischer Einzelkristalle bei hohen elastischen Frequenzen // Z. Phys. – 1934. – **92**. – S. 390–406. (*)
107. *Shaw E. A. G.* On the resonant vibrations of thick barium titanate disks // J. Acoust. Soc. Amer. – 1956. – **28**. – P. 38–50. (*)
108. *Shear S. K., Focke A. B.* The dispersion of supersonic waves in cylindrical rods of polycrystalline silver, nickel, and magnesium // Phys. Rev. – 1940. – **57**. – P. 532–537. (*)
109. *Thurston R. N.* Elastic waves in rods and clad rods // J. Acoust. Soc. Amer. – 1978. – **64**. – P. 1–37. (*)
110. *Thurston R. N.* Elastic waves in rods and optical fibers // J. Sound Vibr. – 1992. – **159**. – P. 441–467. (*)
111. *Timoshenko S.* On the transverse vibrations of bars of uniform cross-section // Philos. Mag. (Ser. 6). – 1922. – **43**. – P. 125–131.
    То же: *Тимошенко С. П.* О поперечных колебаниях балок постоянного поперечного сечения // Статические и динамические проблемы теории упругости. – Киев: Наук. думка, 1975. – С. 62–65.
112. *Tolstoy I., Usdin E.* Wave propagation in elastic plates: Low and high mode dispersion // J. Acoust. Soc. Amer. – 1957. – **29**. – P. 37–42. (*)
113. *Truesdell C.* Outline of the history of flexible or elastic bodies to 1788 // J. Acoust. Soc. Amer. – 1960. – **32**. – P. 1647–1656. (*)
114. *Truesdell C.* Sophie Germain: fame earned by stubborn error // Boll. Storia Sci. Mat. – 1991. – **11**, № 2. – P. 3–24. (*)
115. *Vinh P. C., Malischewsky P. G.* An approach for obtaining approximate formulas for the Rayleigh wave velocity // Wave Motion. – 2007. – **44**. – P. 549–562. (*)
116. *Yang W., Li Z.-M., Shi W. Xie B.-H., Yang M.-B.* On auxetic materials // J. Mater. Sci. – 2004. – **39**. – P. 3269–3279. (*)
117. *Zemanek J.* An experimental and theoretical investigation of elastic wave propagation in a cylinder // J. Acoust. Soc. Amer. – 1972. – **51**. – P. 265–283. (*)
118. *Zernov V., Pichugin A. V., Kaplunov J.* Eigenvalue of a semi-infinite elastic strip // Proc. Roy. Soc. London. – 2006. – A**462**. – P. 1255–1270. (*)

ПРУЖНІ ХВИЛЕВОДИ: ІСТОРІЯ І СУЧАСНІСТЬ. I

Наведено стислий огляд дисперсійних характеристик нормальних мод пружних хвилеводів постійного поперечного перетину. Досліджено ключові аспекти 125-річної історії проблеми і її сучасне відображення у глобальному інформаційному просторі.

ELASTIC WAVEGUIDES: HISTORY AND THE STATE-OF-ART. I

This paper presents a brief review of dispersion characteristics of normal modes for elastic waveguides with constant cross sections. Key topics in the 125 years history of the problem and its modern reflection in the global information space are elucidated.

[1] Киев. нац. ун-т им. Тараса Шевченко, Киев,
[2] Ин-т телекоммуник. и глобального информ. пространства
НАН Украины, Киев,
[3] Эйндховенский технолог. ун-т, Эйндховен, Нидерланды

Получено
08.05.08