

### НЕСУПЕРЕЧЛИВИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ ПРО ОДНОСТОРОННІЙ РОЗТЯГ ПРУЖНОЇ ПЛОЩИНИ З АСТРОЇДАЛЬНИМ ОТВОРОМ

Розглянуто напружено-деформований стан пружної площини з отвором у формі астроїди за умови одностороннього розтягу. Враховано контакт берегів отвору поблизу двох протилежних вершин астроїди, завдяки чому знято суперечність у класичному розв'язку щодо взаємного перекриття берегів отвору. Знайдено довжину областей контактної тиску та розподіл контактних напружень. Для двох вільних від контакту вершин отвору визначено коефіцієнт інтенсивності напружень.

При вивченні розподілу напружень у пружних тілах значний інтерес викликає дослідження напружено-деформованого стану в околах особливих точок контуру отвору, в яких порушується гладкість контуру. До таких точок відносять кутові точки, в яких кут нахилу дотичної до контуру отвору змінюється стрибком, так що в околі такої точки утворюється клиноподібний виріз, і точки звороту, в яких стрибок кута дотичної дорівнює  $\pi$ , а контур отвору в околі кожної такої точки переходить у береги розрізу. Напруження в однорідному пружному тілі в околах особливих точок при відповідному навантаженні стають необмеженими зі степеневою особливістю, показник якої менший ніж  $1/2$ , у випадку кутової точки з кутом вирізу, меншим ніж  $\pi$ , і кореневою особливістю у випадку точки звороту, так само, як і поблизу вершин тріщини.

**Постановка задачі.** Розглянемо пружну площину з отвором у формі астроїди

$$x = a \cos^3 \vartheta, \quad y = a \sin^3 \vartheta, \quad a > 0, \quad 0 \leq \vartheta < 2\pi, \quad (1)$$

яка має чотири точки звороту  $(\pm a, 0)$ ,  $(0, \pm a)$ , що співпадають з її вершинами (рис. 1). Контур  $L$  астроїдального отвору вільний від зовнішніх зусиль, а на нескінченності прикладені розтягуювальні напруження  $\sigma_y^\infty$  ( $\sigma_x^\infty = 0$ ,  $\tau_{xy}^\infty = 0$ ).

Розв'язок цієї задачі у потенціалах Колосова – Мусхелішвілі шляхом конформного перетворення зовнішності астроїди на півплощину отримано в [1]. У роботі [4] наведено детальний аналіз такого розв'язку, згідно з яким в умовах розтягу пружної площини дотичні до контуру  $L$  у точках  $(\pm a, 0)$ , так само, як і у випадку тріщини, повертаються на кут  $\pi/2$ , так що деформований контур отвору в точках  $(\pm a, 0)$  «роз-

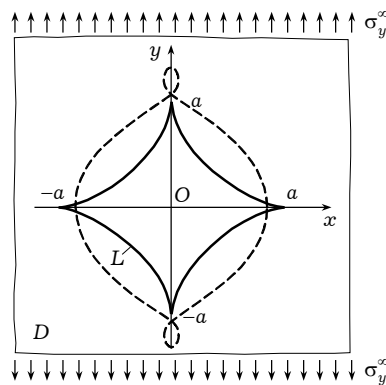


Рис. 1

кривається» і стає гладким з дотичною, перпендикулярною до осі  $Ox$ . Дотичні до контуру отвору у двох інших точках звороту  $(0, \pm a)$  теж повертаються на кут  $\pi/2$ , але таким чином, що береги контуру поблизу цих точок взаємно перекриваються. На рис. 1 деформований контур отвору показано пунктирною лінією. Для розглядуваної задачі у монографіях [7, 9] наведено значення коефіцієнтів інтенсивності напружень нормального відриву, які виявилися додатними у вершинах  $(\pm a, 0)$  і від'ємними – у вершинах  $(0, \pm a)$ , що вказує на необмежений стиск в околі точок  $(0, \pm a)$ .

Отже, за відсутності нормальних і дотичних напружень на контурі астроїдального отвору приходимо до фізично некоректного розв'язку. У роботі [4], зокрема, зазначається, що «виявлене явище накладання берегів, взагалі кажучи, неприпустиме і вказує на необхідність додаткового аналізу при постановці такого роду задач».

Аналогічна ситуація у лінійній теорії пружності спостерігається при дослідженні рівноваги пружних кусково-однорідних тіл з тріщинами на межі розділу різнорідних матеріалів. Розв'язок задачі за умови, що на берегах міжфазної тріщини напруження відсутні, теж є фізично неприйнятним, оскільки поблизу вершин тріщини переміщення та напруження виявляються осцилюючими, що приводить до взаємного перекриття її берегів [10]. Фізично коректна постановка задачі про міжфазну тріщину належить М. Комніноу і полягає у введенні областей контакту берегів тріщини поблизу вершин [2].

Так само, як і у задачах про міжфазні тріщини, будемо вважати, що при односторонньому розтязі пружної площини з астроїдальним отвором поблизу двох протилежних вершин астроїди  $(0, a)$  і  $(0, -a)$  виникають області  $a - d \leq y \leq a$  і  $-a \leq y \leq -a + d$  контактної тиску берегів отвору, розмір  $d$  яких заздалегідь невідомий і має бути визначений за розв'язком задачі (рис. 2).

Змішані крайові умови на контурі  $L$  отвору запишемо у вигляді  $(t = x + iy \in L)$

$$\sigma_n = 0, \quad 0 < |y| < a - d, \quad \tau_{ns} = 0, \quad 0 < |y| < a, \quad (2)$$

$$u_x = -x, \quad a - d \leq |y| \leq a, \quad (3)$$

де  $\mathbf{n} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$  – одиничний вектор зовнішньої нормалі;  $s$  – дугова координата контуру  $L$  ( $s = 0$  відповідає вершині  $(a, 0)$ ).

**Розв'язування першої крайової задачі для площини з астроїдальним отвором.** Здійснимо конформне відображення області  $D$ , яка лежить поза астроїдою, на зовнішність одиничного круга  $|\zeta| > 1$ :

$$z = \omega(\zeta) = \frac{3a}{4} \left( \zeta + \frac{1}{3\zeta^3} \right), \quad z = x + iy, \quad \zeta = \rho e^{i\theta}. \quad (4)$$

Напруження, переміщення та похідні від функції Ері  $U(x, y)$ ,  $\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$ ,  $\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$ ,  $\sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ , подамо через комплексні потенціали Колосова – Мусхелішвілі [5]:

$$\begin{aligned} \sigma_y - i\tau_{\rho\theta} &= \Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)} + \frac{\bar{\zeta}}{\zeta\omega'(\zeta)} \left[ \omega(\zeta)\overline{\Phi'(\zeta)} + \overline{\omega'(\zeta)}\overline{\Psi(\zeta)} \right], \\ 2G(u_x + iu_y) &= \alpha\varphi(\zeta) - \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \overline{\varphi'(\zeta)} - \overline{\psi(\zeta)}, \quad \alpha = 3 - 4\nu, \\ \frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y} &= \varphi(\zeta) + \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \overline{\varphi'(\zeta)} + \overline{\psi(\zeta)}, \end{aligned} \quad (5)$$

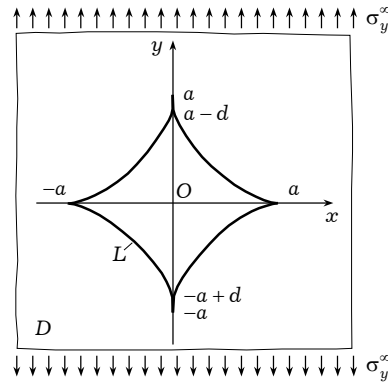


Рис. 2

де  $G$  – модуль зсуву;  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона. Потенціали  $\Phi(\zeta) = \frac{\phi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}$ ,  $\Psi(\zeta) = \frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}$  – функції, аналітичні в області  $|\zeta| > 1$ , причому на нескінченності мають місце розвинення

$$\phi(\zeta) = \frac{3a}{16} \sigma_y^\infty \zeta + a_0 + \frac{a_1}{\zeta} + \frac{a_2}{\zeta^2} + \dots, \quad \psi(\zeta) = \frac{3a}{8} \sigma_y^\infty \zeta + a'_0 + \frac{a'_1}{\zeta} + \dots \quad (6)$$

Введемо невідому функцію контактних напружень  $\sigma(\vartheta)$ ,  $\pi/2 - \varepsilon \leq \vartheta \leq \pi/2$  і подамо нормальні напруження на контурі отвору у вигляді

$$\sigma_n = \begin{cases} \sigma(\vartheta), & \pi/2 - \varepsilon \leq \vartheta \leq \pi/2, \\ \sigma(\pi - \vartheta), & \pi/2 < \vartheta \leq \pi/2 + \varepsilon, \\ \sigma(-\vartheta), & -\pi/2 \leq \vartheta \leq -\pi/2 + \varepsilon, \\ \sigma(\vartheta + \pi), & -\pi/2 - \varepsilon \leq \vartheta < -\pi/2, \\ 0, & 0 \leq |\vartheta| < \pi/2 - \varepsilon, \pi/2 + \varepsilon < |\vartheta| \leq \pi. \end{cases} \quad (7)$$

Тут значення  $\vartheta = \pi/2 \mp \varepsilon$  відповідають граничним точкам області контакту ( $y = a - d$ ) біля вершини астроида  $(0, a)$ , тобто  $\text{Im } \omega(e^{i(\pi/2 \mp \varepsilon)}) = a - d$ ,  $\rho = 1$ . Запишемо також декартові компоненти вектора напружень на контурі  $L$  ( $\tau_{ns} = 0$ ):

$$X_n = \sigma_n \cos \alpha, \quad Y_n = \sigma_n \sin \alpha. \quad (8)$$

Інтегрування напружень на контурі  $L$  за дуговою координатою з використанням останньої формули з (5) приводить до крайової умови для визначення аналітичних в області  $D$  функцій  $\phi(\zeta)$  і  $\psi(\zeta)$ :

$$\phi(\tau) + \frac{\omega(\tau)}{\omega'(\tau)} \overline{\phi'(\tau)} + \overline{\psi(\tau)} = f(\tau) + C, \quad \tau \in \gamma, \quad (9)$$

$$f(\tau) = f_1(\tau) + if_2(\tau) = i \int_a^t (X_n + iY_n) ds, \quad t = \omega(\tau) \in L,$$

де  $\gamma$  – коло  $|\zeta| = 1$ ;  $C$  – довільна стала.

Щоб визначити функцію  $\phi(\zeta)$ , помножимо крайову умову (9) на  $\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\tau - \zeta}$ , де  $|\zeta| > 1$ , і зінтегрувавши отриману рівність уздовж  $\gamma$  за  $\tau$ , одержимо

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \left( \phi(\tau) + \frac{\omega(\tau)}{\omega'(\tau)} \overline{\phi'(\tau)} + \overline{\psi(\tau)} - f(\tau) - C \right) \frac{d\tau}{\tau - \zeta} = 0, \quad |\zeta| > 1. \quad (10)$$

Використовуючи значення інтеграла Коші, теорему Коші про лишки, розвинення (6) і співвідношення  $\bar{\tau} = \frac{1}{\tau}$ , маємо

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\phi(\tau) d\tau}{\tau - \zeta} &= \frac{3a}{16} \sigma_y^\infty \zeta + a_0 - \phi(\zeta), \\ \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\omega(\tau)}{\omega'(\tau)} \overline{\phi'(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - \zeta} &= \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\omega(\tau)}{\omega'(\frac{1}{\tau})} \overline{\phi'(\frac{1}{\tau})} \frac{d\tau}{\tau - \zeta} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\tau^4 + \frac{1}{3}}{\tau^3(1 - \tau^4)} \overline{\phi'(\frac{1}{\tau})} \frac{d\tau}{\tau - \zeta}, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\overline{\psi(\tau)} d\tau}{\tau - \zeta} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \overline{\psi\left(\frac{1}{\tau}\right)} \frac{d\tau}{\tau - \zeta} = -\frac{3a}{8} \sigma_y^{\infty} \frac{1}{\zeta},$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{d\tau}{\tau - \zeta} = 0, \quad |\zeta| > 1. \quad (11)$$

У другому інтегралі підінтегральна функція має прості полюси  $\tau = \pm 1$ ,  $\tau = \pm i$  на контурі  $\gamma$ . Тому подальше обчислення цього інтеграла приводить до невідомих значень  $\overline{\varphi'(\pm 1)}$ ,  $\overline{\varphi'(\pm i)}$ .

Оберемо більш простий шлях побудови розв'язку. Астроїду розглянемо як граничний випадок (при  $k \rightarrow 1$ ) гіпотрохоїди з відповідною функцією конформного відображення

$$z = \omega_k(\zeta) = \frac{3a}{4} \left( \zeta + \frac{k}{3\zeta^3} \right), \quad 0 < k < 1, \quad \omega_1(\zeta) \equiv \omega(\zeta).$$

Тоді розв'язок задачі для астроїдального отвору у площині отримаємо граничним переходом (при  $k \rightarrow 1$ ) із розв'язку задачі для гіпотрохоїдального отвору.

Для другого інтеграла з (11) маємо

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\omega_k(\tau)}{\omega_k'(\tau)} \overline{\varphi'(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - \zeta} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\tau^4 + \frac{k}{3}}{\tau^3(1 - k\tau^4)} \overline{\varphi'\left(\frac{1}{\tau}\right)} \frac{d\tau}{\tau - \zeta} =$$

$$= \frac{k}{3} \left( \frac{\overline{a_1}}{\zeta} - \frac{3a}{16} \sigma_y^{\infty} \frac{1}{\zeta^3} \right), \quad |\zeta| > 1. \quad (12)$$

Із функціонального рівняння (10) з використанням значень інтегралів із (11) і (12) при  $k \rightarrow 1$  знаходимо

$$\varphi(\zeta) = \frac{3a}{16} \sigma_y^{\infty} \zeta + a_0 + \left( \frac{\overline{a_1}}{3} - \frac{3a}{8} \sigma_y^{\infty} \right) \frac{1}{\zeta} - \frac{a}{16} \sigma_y^{\infty} \frac{1}{\zeta^3} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\tau) d\tau}{\tau - \zeta}. \quad (13)$$

Стала  $a_0$  залишається невизначеною. Для визначення  $a_1$  з урахуванням (6) маємо рівність

$$a_1 = \frac{\overline{a_1}}{3} - \frac{3a}{8} \sigma_y^{\infty} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\tau) d\tau,$$

з якої знаходимо

$$a_1 = -\frac{9a}{16} \sigma_y^{\infty} + \frac{3}{4\pi i} \int_{\gamma} f(\tau) d\tau, \quad \text{Im } a_1 = 0. \quad (14)$$

При цьому використано тотожні рівності

$$f_1(\tau) \equiv f_1(\overline{\tau}), \quad f_2(\tau) \equiv f_2(-\overline{\tau}) \equiv -f_2(-\tau). \quad (15)$$

На підставі властивостей (15) інтеграл із (14) приймає уявні значення, тому стала  $a_1$  є дійсною.

Щоб визначити функцію  $\psi(\zeta)$ , помножимо комплексно-спряжену крайову умову (9) на  $\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\tau - \zeta}$  при  $|\zeta| > 1$  і зінтегруємо її за  $\tau$  уздовж кола  $\gamma$ :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left( \overline{\varphi(\tau)} + \frac{\overline{\omega(\tau)}}{\omega'(\tau)} \varphi'(\tau) + \psi(\tau) - \overline{f(\tau)} - \overline{C} \right) \frac{d\tau}{\tau - \zeta} = 0, \quad |\zeta| > 1. \quad (16)$$

Аналогічно до (11), (12) знаходимо

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\overline{\varphi(\tau)} d\tau}{\tau - \zeta} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \overline{\varphi\left(\frac{1}{\tau}\right)} \frac{d\tau}{\tau - \zeta} = -\frac{3a}{16} \sigma_y^{\infty} \frac{1}{\zeta}, \\
\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\overline{\omega_k(\tau)} \varphi'(\tau) d\tau}{\omega_k'(\tau) \tau - \zeta} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\omega_k\left(\frac{1}{\tau}\right) \varphi'(\tau) d\tau}{\omega'(\tau) \tau - \zeta} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\tau^3 \left(1 + \frac{k}{3} \tau^4\right) \varphi'(\tau) d\tau}{\tau^4 - k} = \\
&= \frac{k}{3} \left( \frac{3a}{16} \sigma_y^{\infty} \zeta^3 - a_1 \zeta - 2a_2 \right) - \frac{\zeta^3 \left(1 + \frac{k}{3} \zeta^4\right)}{\zeta^4 - k} \varphi'(\zeta), \\
\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\overline{\psi(\tau)} d\tau}{\tau - \zeta} &= \frac{3a}{8} \sigma_y^{\infty} \zeta + a_0' - \psi(\zeta), \quad |\zeta| > 1. \tag{17}
\end{aligned}$$

При обчисленні другого інтеграла використано асимптотичну формулу

$$\frac{\zeta^3 \left(1 + \frac{k}{3} \zeta^4\right)}{\zeta^4 - k} \varphi'(\zeta) = \frac{k}{3} \left( \frac{3a}{16} \sigma_y^{\infty} \zeta^3 - a_1 \zeta - 2a_2 \right) + O\left(\frac{1}{\zeta}\right), \quad |\zeta| \rightarrow \infty,$$

яка випливає з першого розвинення (6).

За допомогою знайдених у (17) значень інтегралів при  $k \rightarrow 1$  із функціонального рівняння (16) отримуємо

$$\begin{aligned}
\psi(\zeta) &= \frac{3a}{8} \sigma_y^{\infty} \zeta + a_0' + \frac{3a}{16} \sigma_y^{\infty} \frac{1}{\zeta} + \frac{1}{3} \left( \frac{3a}{16} \sigma_y^{\infty} \zeta^3 - a_1 \zeta - 2a_2 \right) - \\
&\quad - \frac{\zeta^3 \left(1 + \frac{1}{3} \zeta^4\right)}{\zeta^4 - 1} \varphi'(\zeta) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\overline{f(\tau)} d\tau}{\tau - \zeta}. \tag{18}
\end{aligned}$$

Стала  $a_0'$  приймає довільні комплексні значення, а для сталої  $a_2$  отримуємо дійсне значення

$$a_2 = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \tau \overline{f(\tau)} d\tau. \tag{19}$$

Формули (5), (13), (18) визначають розв'язок першої крайової задачі для пружної площини з астроїдальним (гіпотрохоїдальним) отвором. У випадку відсутності напружень на контурі отвору побудований розв'язок співпадає з відомим для астроїдального [1] і гіпотрохоїдального [3] отворів.

**Розв'язування контактної задачі.** Визначимо тепер функцію  $f(\tau)$ , пов'язану з функцією контактних напружень  $\sigma(\vartheta)$  рівняннями (7)–(9). З крайової умови (3) за допомогою другого співвідношення (5) і з урахуванням (4) і (9) отримуємо рівняння

$$\operatorname{Re} [4(1 - \nu)\varphi(\tau) - f(\tau) + 2G\omega(\tau) - C] = 0, \quad \tau \in \gamma_{\varepsilon}, \tag{20}$$

де  $\gamma_{\varepsilon} = \gamma_{\varepsilon}^+ \cup \gamma_{\varepsilon}^-$ , а  $\gamma_{\varepsilon}^+$  і  $\gamma_{\varepsilon}^-$  – дуги кола  $|\zeta| = 1$ , для яких  $\pi/2 - \varepsilon \leq \vartheta \leq \pi/2 + \varepsilon$  і  $-\pi/2 - \varepsilon \leq \vartheta \leq -\pi/2 + \varepsilon$ , відповідно. Використовуючи вираз (13) для  $\varphi(\zeta)$ , рівняння (20) запишемо у вигляді

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\varepsilon}} \frac{f(\lambda) d\lambda}{\lambda - \tau} - \frac{3a}{4} p\tau - a_0 + \frac{C}{4(1 - \nu)} - \left( \frac{a_1}{3} - \frac{3a}{2} p \right) \frac{1}{\tau} + \right. \\
\left. + \frac{ap}{4\tau^3} + \frac{G}{2(1 - \nu)} \omega(\tau) \right] = 0, \quad \tau \in \gamma_{\varepsilon}, \tag{21}
\end{aligned}$$

тут  $p = \frac{1}{4} \sigma_y^{\infty}$ .

З огляду на малість областей контакту сингулярне інтегральне рівняння (21) допускає асимптотичне спрощення при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Нехтуючи взаємодією областей контакту, інтеграл уздовж  $\gamma_\varepsilon$  у (21) замінимо відповідним інтегралом уздовж дуги  $\gamma_\varepsilon^+$ , яка переходить у прямолінійний відрізок довжини  $2\varepsilon$ . При цьому  $\tau, \lambda \in \gamma_\varepsilon^+$  так, що

$$\tau = \xi + i, \quad \lambda = \eta + i, \quad -\varepsilon \leq \xi, \eta \leq \varepsilon.$$

Вектор нормалі  $\mathbf{n}$  до контуру  $L$  в області контакту  $a - d \leq y \leq a$  стає колінеарним до осі  $Ox$ . Тоді з (8) і (9) маємо

$$X_n = -\operatorname{sgn} \xi \cdot \sigma_n, \quad Y_n = 0, \quad f(\tau) = if_2(\tau) = i \int_a^\tau X_n ds, \quad f_1(\tau) \equiv 0. \quad (22)$$

Таким чином, при  $\varepsilon \rightarrow 0$  із (21) для нової невідомої функції

$$g(\xi) = \frac{1}{2G} f_2(\xi + i), \quad -\varepsilon \leq \xi \leq \varepsilon, \quad (23)$$

отримуємо сингулярне інтегральне рівняння з ядром Коші:

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{g(\eta) d\eta}{\eta - \xi} = \pi h(\xi), \quad -\varepsilon < \xi < \varepsilon, \quad (24)$$

$$h(\xi) = \frac{C}{4(1-\nu)G} - \frac{a_0}{G} + (g_* + 3aq)\xi - \left( \frac{a}{2(1-\nu)} - 2aq \right) \xi^3,$$

де

$$g_* = \frac{1}{\pi} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} g(\xi) d\xi, \quad q = \frac{p}{2G} = \frac{1}{8G} \sigma_y^\infty. \quad (25)$$

Розв'язок рівняння (24), обмежений на кінцях відрізка  $-\varepsilon \leq \xi \leq \varepsilon$ , має вигляд [6]

$$g(\xi) = -\frac{1}{\pi} \sqrt{\varepsilon^2 - \xi^2} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{h(\eta) d\eta}{\sqrt{\varepsilon^2 - \eta^2} (\eta - \xi)} \quad (26)$$

за додаткової умови

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{h(\eta) d\eta}{\sqrt{\varepsilon^2 - \eta^2}} = 0,$$

яка виконується, якщо  $C - 4(1-\nu)a_0 = 0$ . Обчислюючи інтеграл із (26), знаходимо

$$g(\xi) = -\sqrt{\varepsilon^2 - \xi^2} \left[ g_* + \frac{3}{2}aq - a \left( \frac{1}{4(1-\nu)} - q \right) (\varepsilon^2 + 2\xi^2) \right]. \quad (27)$$

Для визначення сталої  $g_*$  згідно з (25) зінтегруємо (27) за  $\xi$  у межах від  $-\varepsilon$  до  $\varepsilon$ , внаслідок чого маємо

$$g_* = \frac{3a\varepsilon^2}{2(2 + \varepsilon^2)} \left[ \left( \frac{1}{4(1-\nu)} - q \right) \varepsilon^2 - q \right]. \quad (28)$$

З умови обмеженості (перетворення у нуль) контактних напружень у кінцевих точках області контакту

$$g'(\varepsilon) = 0,$$

отримуємо

$$g_* = 3a \left[ \left( \frac{1}{4(1-\nu)} - q \right) \varepsilon^2 - \frac{q}{2} \right], \quad (29)$$

$$g(\xi) = -2a \left( \frac{1}{4(1-\nu)} - q \right) \sqrt{(\varepsilon^2 - \xi^2)^3}. \quad (30)$$

**Довжина областей контакту.** Із рівностей (28), (29) знаходимо параметр довжини  $d = a(1 - \sqrt{(1 - \varepsilon^2)^3})$  областей контакту:

$$\varepsilon^2 = 2 \left( \sqrt{1 + \frac{2(1-\nu)q}{1-4(1-\nu)q}} - 1 \right).$$

Оцінимо величину  $q$  із (25). Як зазначено у [8], відносно видовження  $\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E}$  (де  $E = 2G(1 + \nu)$  – модуль пружності при розтязі) є дуже малою величиною (наприклад, для конструкційних сталей воно зазвичай менше від 0.001). Тому будемо вважати, що

$$q = \frac{1 + \nu}{4} \frac{\sigma_y^\infty}{E} \leq \frac{1 + \nu}{4} \cdot 10^{-3}. \quad (31)$$

Наприклад, якщо  $\nu = 0.3$ , то  $q \leq 3.25 \cdot 10^{-3}$ ,  $\varepsilon^2 \leq 4.2 \cdot 10^{-4}$ ,  $\varepsilon \leq 0.020$ ,  $d \leq 6.3 \cdot 10^{-4} a$ . Таким чином, завдяки оцінці (31) похибка при асимптотичному спрощенні інтегрального рівняння (21) є дуже малою величиною (порядку  $\varepsilon^2$ ), а точність розв'язку (30) є достатньо високою.

Остаточне значення параметра  $\varepsilon$  визначається виразом

$$\varepsilon = \sqrt{2(1-\nu)q},$$

а довжина кожної із областей контакту є такою:

$$d = \frac{3}{2} a \varepsilon^2 = 3(1-\nu)qa, \quad q = \frac{1}{8G} \sigma_y^\infty.$$

Порівняємо довжину  $d$  областей контакту з довжиною зон перекриття берегів астроїдального отвору за умови нехтування контактом. Із (13), (14) при  $f(\tau) \equiv 0$  маємо

$$\varphi(\zeta) = a_0 + \frac{3a}{4} p \left( \zeta - \frac{3}{\zeta} - \frac{1}{3\zeta^3} \right), \quad p = 2Gq.$$

Абсцису  $x_* = a \cos^3 \vartheta_*$  точки  $(x_*, y_*)$  перетину берегів астроїди поблизу вершини  $(0, a)$  визначаємо з умови

$$u_x|_L = 4(1-\nu) \operatorname{Re} \varphi(\tau) = -3a(1-\nu)q \left( \xi_* + \frac{4}{3} \xi_*^3 \right) = -x_*,$$

$$\xi_* = \cos \vartheta_*, \quad a_0 = 0,$$

звідки

$$\cos \vartheta_* = \sqrt{3(1-\nu)q}, \quad d_* = a(1 - y_*) = \frac{3}{2} a \cos^2 \vartheta_* = \frac{9}{2} (1-\nu)qa.$$

Тобто зона перекриття берегів астроїдального отвору (за формальним розв'язком без урахування контакту берегів) у півтора рази більша від істинної області контакту.

**Контактні напруження.** Визначимо розподіл нормальних напружень в області контакту біля вершини  $(0, a)$  астроїдального отвору. Із (22), (23) маємо

$$\frac{1}{2G} \sigma_n |\omega'(\tau)| = -\operatorname{sgn} \xi \cdot g'(\xi) \sin \vartheta. \quad (32)$$

Враховуючи, що

$$\omega'(\tau) = \frac{3a}{4} \left(1 - \frac{1}{\tau^4}\right) = \frac{3a}{4} (1 - e^{4i(\pi/2 - \vartheta)}) = -3ai \left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right),$$

$$|\omega'(\tau)| = 3a |\xi|, \quad \sin \vartheta = 1, \quad \xi = \cos \vartheta = \operatorname{sgn} x \cdot \sqrt{\frac{2}{3} \left(1 - \frac{y}{a}\right)},$$

$$\pi/2 - \varepsilon \leq \vartheta \leq \pi/2 + \varepsilon, \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

із (32) і (30) отримуємо явний вираз для контактних напружень:

$$\sigma_n = -\frac{G}{1-\nu} \sqrt{\varepsilon^2 - \frac{2}{3} \left(1 - \frac{y}{a}\right)}, \quad a \left(1 - \frac{3}{2} \varepsilon^2\right) \leq y \leq a.$$

У вершині  $(0, a)$  астроида контактні напруження приймають найбільше за абсолютною величиною значення

$$\sigma_n|_{y=a} = -\frac{1}{2} \sqrt{\sigma_y^\infty \frac{G}{1-\nu}}.$$

Це достатньо велике (за модулем) значення порівняно із заданим напруженням  $\sigma_y^\infty$ . Так, при  $\nu = 0.3$  і  $\sigma_y^\infty \cdot \frac{1}{E} = 10^{-3}$ , маємо  $|\sigma_n|_{y=a} \cdot \frac{1}{\sigma_y^\infty} \approx 8$ . Зі

зменшенням  $\sigma_y^\infty$  зазначене відношення напружень збільшується пропорцій-

но до  $\sqrt{\frac{\sigma_y^\infty}{G}}$ .

**Коефіцієнт інтенсивності напружень.** В околах вільних від контакту вершин  $(\pm a, 0)$  астроидального отвору визначимо сингулярне поле напружень. Нехтуючи впливом областей контактного тиску ( $f(\tau) \equiv 0$ ) при вершинах  $(0, \pm a)$ , з першого зі співвідношень (5) з урахуванням (13), (14), (18) знаходимо

$$\sigma_y|_{y=0} = \sigma_y^\infty \left[ \frac{1}{\xi^4 - 1} \left( \frac{2}{3} \xi^2 + \frac{5}{2} - \frac{5\xi^2 + 3}{3(\xi^2 + 1)^2} \right) + 1 \right]. \quad (33)$$

На підставі асимптотичної формули

$$\xi - 1 \sim \sqrt{\frac{2}{3} \left(\frac{x}{a} - 1\right)}, \quad x \rightarrow a + 0,$$

із (33) дістаємо поведінку розривних напружень в околі вершини  $(a, 0)$  астроида:

$$\sigma_y|_{y=0} \sim \frac{5}{8} \sqrt{\frac{3}{2}} \sigma_y^\infty \left(\frac{x}{a} - 1\right)^{-1/2}, \quad x \rightarrow a + 0, \quad (34)$$

та визначаємо коефіцієнт інтенсивності напружень

$$K_I = \lim_{x \rightarrow a+0} \sqrt{2\pi(x-a)} \sigma_y|_{y=0} = \frac{5}{8} \sigma_y^\infty \sqrt{3\pi a}, \quad (35)$$

значення якого співпадає з наведеним у [7, 9].

Оцінимо вплив областей контактного тиску берегів отвору біля вершин  $(0, \pm a)$  на сингулярне поле напружень поблизу вершин  $(\pm a, 0)$ . Якщо функцію контактних напружень (22), (23), (30) підставити у формули (13), (14), (18), (19), то з (5) знайдемо поправку у розподілі напружень (33), яка має порядок величини  $\varepsilon^2$  і регулярна у точках  $\xi = \pm 1$ ,  $x = \pm a$ . Отже, врахування контакту берегів астроидального отвору не змінює значення коефіцієнта інтенсивності напружень (35).



**Висновки.** Завдяки врахуванню контакту берегів астроїдального отвору знято суперечність щодо перекриття берегів у класичному розв'язку. Показано, що від'ємне значення коефіцієнта інтенсивності напружень у відповідних вершинах астроїди не має місця, замість чого в зонах контакту стискувальні напруження обмежені, а додатне значення коефіцієнта інтенсивності розривних напружень у двох інших вершинах астроїди, отримане у класичному розв'язку, є правильним.

1. Белоносов С. М. Основные плоские статические задачи теории упругости для односвязных и двусвязных областей. – Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962. – 232 с.
2. Дундурс Я., Комниноу М. Обзор и перспективы исследования межфазной трещины // Разрушение композитных материалов. – Рига: Зинатне, 1979. – С. 78–87.
3. Лурье А. И. Теория упругости. – Москва: Наука, 1970. – 940 с.
4. Морозов Н. Ф. Математические вопросы теории трещин. – Москва: Наука, 1984. – 256 с.
5. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – Москва: Наука, 1966. – 707 с.
6. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. – Москва: Физматгиз, 1962. – 600 с.
7. Панасюк В. В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1968. – 246 с.
8. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. – Москва: Наука, 1979. – 560 с.
9. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. – Москва: Наука, 1974. – 640 с.
10. Williams M. L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1952. – 19, No. 4. – P. 526–535.

#### НЕПРОТИВОРЕЧИВОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ОДНОСТОРОННЕМ РАСТЯЖЕНИИ УПРУГОЙ ПЛОСКОСТИ С АСТРОИДАЛЬНЫМ ОТВЕРСТИЕМ

*Рассмотрено напряженно-деформированное состояние упругой плоскости с отверстием в форме астроиды в условиях одностороннего растяжения. Учен контакт берегов отверстия вблизи двух противоположных вершин астроиды, благодаря чему снято противоречие в классическом решении относительно взаимного перекрытия берегов отверстия. Найдены длина областей контактного давления и распределение контактных напряжений. Для двух свободных от контакта вершин отверстия определен коэффициент интенсивности напряжений.*

#### CONSISTENT SOLUTION OF PROBLEM ABOUT ONE-SIDED TENSION OF ELASTIC PLANE WITH ASTROIDAL OPENING

*The stress-strain state of elastic plane with a hole in the form of astroid under one-sided tension is studied. The hole edges contact near the opposite tips of astroid is considered. This permits to remove contradiction in the classical solution as to mutual overlapping of the hole edges. The size of the contact domains and the distribution of contact stresses are found. The stress intensity factor for two contact-free tips of the hole is determined.*

<sup>1</sup> Київ. нац. ун-т ім. Тараса Шевченка, Київ,

Одержано

<sup>2</sup> Ін-т прикл. фізики НАН України, Суми

27.12.07