УДК 539.3

С. А. Амбарцумян, М. В. Белубекян, К. Б.Казарян

К ЗАДАЧЕ ОСЕВОГО РАСТЯЖЕНИЯ КРУГОВОЙ НЕОДНОРОДНОЙ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Рассматривается задача осевого растяжения продольными усилиями неоднородной круговой цилиндрической оболочки. Определение напряженного состояния оболочки проводится на основе уточненной теории. Обсуждаются вопросы возможности потери локальной устойчивости при осевом растяжении.

1. Пусть неоднородная трансверсально-изотропная (модуль упругости $E = E(s)$, модуль поперечного сдвига $G' = G'(s)$, коэффициенты Пуассона ν_i постоянные) круговая цилиндрическая оболочка (радиус кривизны R, толщина h, длина ℓ) растягивается продольными усилиями T_0, равномерно распределенными по торцам оболочки $s = 0, s = \ell$. Срединная поверхность определяется параметрами: радиусами кривизны $R_s = \infty, R_\beta = R$, коэффициентами квадратичной формы $A = B = 1$, координатами s, β, γ.

Для рассматриваемой осесимметричной задачи предполагаем [2, 3]:

– нормальные напряжения σ_γ пренебрежимо малы;

– нормальное перемещение по толщине оболочки остается постоянным, $u_\gamma = w(s)$;

– поперечное касательное напряжение по толщине оболочки изменяется по заданному закону

$$\tau_{s\gamma} = \frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{4} - \gamma^2\right)\varphi(s), \tag{1}$$

где $\varphi(s)$ – искомая функция.

Тогда для напряжений имеем [2, 3]

$$\sigma_s = B(e_s + \nu e_\beta), \qquad \sigma_\beta = B(e_\beta + \nu e_s), \qquad B = \frac{E(s)}{1-\nu^2},$$

$$\tau_{s\beta} = 0, \qquad \tau_{\beta\gamma} = 0, \qquad \tau_{s\gamma} = B_{55} e_{s\gamma}, \qquad B_{55} = \frac{1}{a_{55}(s)} = G'(s). \tag{2}$$

Компоненты деформаций определяются соотношениями

$$e_s = \frac{du_s}{ds}, \qquad e_\beta = \frac{u_\gamma}{R} = \frac{w}{R}, \qquad e_{s\gamma} = \frac{du_s}{d\gamma} + \frac{du_\gamma}{ds} = \frac{du_s}{d\gamma} + \frac{dw}{ds}. \tag{3}$$

Здесь $u_s(s,\gamma)$, $u_\gamma = w(s)$, $u_\beta = 0$ – компоненты перемещения.

Поступая стандартным образом [1–5], получим

$$u_s = u - \gamma\frac{dw}{ds} + \gamma\frac{a_{ss}}{2}\left(\frac{h^2}{4} - \frac{\gamma^2}{3}\right)\varphi, \tag{4}$$

где $u = u(s)$ – продольное перемещение срединной поверхности.

Для расчетных напряжений наряду с (1) имеем также

$$\sigma_s = B\left[\frac{du}{ds} - \gamma\frac{d^2w}{ds^2} + \gamma\frac{w}{R} + \frac{\gamma}{2}\left(\frac{h^2}{4} - \frac{\gamma^2}{3}\right)\left(a_{55}\frac{d\varphi}{ds} + \frac{da_{55}}{ds}\varphi\right)\right],$$

$$\sigma_\beta = B\left[\frac{w}{R} + \nu\frac{du}{ds} - \gamma\nu\frac{d^2w}{ds^2} + \nu\frac{\gamma}{2}\left(\frac{h^2}{4} - \frac{\gamma^2}{3}\right)\left(a_{55}\frac{d\varphi}{ds} + \frac{da_{55}}{ds}\varphi\right)\right]. \tag{5}$$

Далее, для внутренних усилий и моментов согласно известным процедурам [1–5] получим

$$T_s = C\left(\frac{du}{ds} + \nu\frac{w}{R}\right), \qquad T_\beta = C\left(\frac{w}{R} + \nu\frac{du}{ds}\right),$$

$$M_s = -D\frac{d^2w}{ds^2} + \frac{Dh^2}{10}\left(a_{55}\frac{d\varphi}{ds} + \frac{da_{55}}{ds}\varphi\right),$$

$$M_\beta = \nu M_s, \qquad N = \frac{h^3}{12}\varphi, \qquad C = Bh, \qquad D = \frac{Bh^3}{12}. \tag{6}$$

Уравнения равновесия в усилиях и моментах имеют вид

$$\frac{dT_s}{ds} = 0, \qquad \frac{dN}{ds} - \frac{T_\beta}{R} = 0, \qquad \frac{dM_s}{ds} - N = 0. \tag{7}$$

Граничные условия на торцах оболочки могут соответствовать различным способам закрепления [2, 3], в частности, они будут

при заделке:

$$w = 0, \qquad \frac{dw}{ds} = 0, \qquad T_s = T_0, \tag{8}$$

при шарнирном закреплении:

$$w = 0, \qquad \frac{d^2w}{ds^2} - \frac{h^2}{10G'}\frac{d\varphi}{ds} = 0, \qquad T_s = T_0. \tag{9}$$

Очевидно, что в рассматриваемой задаче $T_s = T_0$. Тогда согласно (6) для T_β имеем

$$T_\beta = Eh\frac{w}{R} + \nu T_0 \qquad \text{или} \qquad T_\beta = \frac{h^3R}{12}\frac{d\varphi}{ds}. \tag{10}$$

Заметим, что это условие является важным для изучения потери локальной устойчивости растянутой оболочки.

2. Подставляя значения T_s, T_β, N, M_s из (6) в уравнения равновесия (7), после элементарных преобразований получим следующую систему исходных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами $E(s)$, $a_{55}(s)$, $D(s)$:

$$\frac{d^3w}{ds^3} + \frac{1}{D}\frac{dD}{ds}\frac{d^2w}{ds^2} - \frac{h^2}{10}a_{55}\frac{d^2\varphi}{ds^2} - \frac{h^2}{10}\left(2\frac{da_{55}}{ds} + \frac{1}{D}\frac{dD}{ds}a_{55}\right)\frac{d\varphi}{ds} -$$

$$- \frac{h^2}{10}\left(\frac{d^2a_{55}}{ds^2} + \frac{1}{D}\frac{dD}{ds}\frac{da_{55}}{ds} - \frac{5}{6}\frac{h}{D}\right)\varphi = 0,$$

$$\frac{d\varphi}{ds} - \frac{12E}{h^2R^2}w = \frac{12\nu}{Rh^3}T_0. \tag{11}$$

В частности, полагая в (11) $E = E_0e^{k_1s}$, $G' = G_0e^{k_2s}$, получим

$$\frac{d^3w}{ds^3} + k_1\frac{d^2w}{ds^2} - \frac{h^2e^{-k_2s}}{10G_0}\frac{d^2\varphi}{ds^2} + \frac{h^2(2k_2 - k_1)e^{-k_2s}}{10\,G_0}\frac{d\varphi}{ds} +$$

$$+ \left(\frac{h^2k_2(k_1 - k_2)e^{-k_2s}}{10G_0} + \frac{(1 - \nu^2)e^{-k_1s}}{E_0}\right)\varphi = 0,$$

$$\frac{d\varphi}{ds} - \frac{12E_0e^{k_1s}}{h^2R^2}w = \frac{12\nu T_0}{Rh^3}. \tag{12}$$

Далее, полагая $k_1 = k_2 = 2k$, придем к следующим дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d^4\varphi}{ds^4} - 4k\frac{d^3\varphi}{ds^3} + \left(4k^2 - \frac{6E_0}{5R^2G_0}\right)\frac{d^2\varphi}{ds^2} - \frac{12E_0k}{5R^2G_0}\frac{d\varphi}{ds} + \frac{12(1-\nu^2)}{h^2R^2}\varphi = 0,$$

$$\frac{d\varphi}{ds} - \frac{12E_0e^{2ks}}{h^2R^2}w = \frac{12\nu T_0}{Rh^3}. \tag{13}$$

Первое из уравнений (13) можно привести к более компактному виду

$$\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{d^2\varphi}{ds^2} - 4k\frac{d\varphi}{ds} + 4k^2\varphi\right) - \frac{6E_0}{5G_0R^2}\frac{d}{ds}\left(\frac{d\varphi}{ds} - 2k\varphi\right) + \frac{12(1-\nu^2)}{R^2h^2}\varphi = 0. \tag{14}$$

Представляя решение (11) в виде $\varphi = Ce^{ps}$, получим следующее характеристическое уравнение:

$$p^2(p-2k)^2 - 2\xi p(p-2k) + 4\chi^4 = 0. \tag{15}$$

Уравнение четвертой степени (15) приводится к квадратному уравнению подстановкой $p(p-2k) = z$. В (15) приняты обозначения

$$\xi = \frac{3E_0}{5G_0R^2}, \qquad \chi^4 = \frac{3(1-\nu^2)}{R^2h^2}. \tag{16}$$

Корни уравнения (15) определяются следующим образом:

$$p_1 = -q + i\beta, \quad p_2 = -q - i\beta, \quad p_3 = \tilde{q} + i\beta, \quad p_4 = \tilde{q} - i\beta, \tag{17}$$

где

$$q = \alpha - k > 0, \qquad \tilde{q} = \alpha + k > 0,$$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{k^2 + \xi + \sqrt{k^4 + 2k^2\xi + 4\chi^4}},$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-k^2 - \xi + \sqrt{k^4 + 2k^2\xi + 4\chi^4}}.$$

Нетрудно проверить, что корни (17) удовлетворяют условиям

$$\operatorname{Re} p_1 < 0, \quad \operatorname{Re} p_2 < 0, \quad \operatorname{Re} p_3 > 0, \quad \operatorname{Re} p_4 > 0.$$

Следовательно, общее решение уравнения (11) можно записать в виде

$$\varphi = e^{-qs}(C_1\cos\beta s + C_2\sin\beta s) + e^{\tilde{q}s}(C_3\cos\beta s + C_4\sin\beta s). \tag{18}$$

3. Для исследования напряженно-деформированного состояния вблизи торца $s = 0$ оболочки достаточно использовать известные [7, 8] приближенные выражения для искомой функции

$$\varphi = e^{-qs}(C_1\cos\beta s + C_2\sin\beta s). \tag{19}$$

В случае закрепленного торца оболочки, т. е. при условиях

$$w = 0, \qquad \frac{dw}{ds} = 0,$$

произвольные постоянные в (19) будут

$$C_1 = -\frac{24\nu T_0 q}{h^3R(\beta^2 + q^2)}, \qquad C_2 = -\frac{12\nu T_0(q^2 - \beta^2)}{h^3R(\beta^2 + q^2)\beta}.$$

Тогда для функций $\varphi(s)$, $w(s)$ имеем

$$\varphi = -\frac{12\nu T_0e^{-qs}}{h^3R\beta(\beta^2 + q^2)}\left[(q^2 - \beta^2)\sin\beta s + 2\beta q\cos\beta s\right],$$

$$w = \frac{\nu RT_0e^{-(2k+q)s}}{hE_0}\left(-e^{qs} + \frac{q}{\beta}\sin\beta s + \cos\beta s\right).$$

Для окружного усилия $T_\beta(s)$ согласно (10) получаем выражение

$$T_\beta = \nu T_0 e^{-qs}\left(\frac{q}{\beta}\sin\beta s + \cos\beta s\right). \qquad (20)$$

Нетрудно заметить, что $T_\beta(s)$ − знакопеременная функция (при растяжении оболочки усилиями T_0 появляются отрицательные усилия T_β, которые, вообще говоря, могут привести к локальной потери устойчивости оболочки по несимметричной форме).

Функция T_β свое наибольшее отрицательное значение $T_{\beta 0}$, равное

$$T_{\beta 0} = -\nu T_0 \exp\left(-\frac{\pi q}{\beta}\right), \qquad (21)$$

достигает в точке $\beta s = \pi$. Значения T_β в интервалах, расположенных дальше от края, будут мало отличаться от нуля в силу наличия множителя $\exp(-qs)$.

В табл. 1 приведены численные значения $\tilde{T} = \left|T_{\beta 0}/\nu T_0\right|$ в зависимости от физико-механических и геометрических параметров оболочки R/h, E/G, kR.

Таблица 1

R/h	E/G / kR	0	0.5	1	2
		$\tilde{T}$	$\tilde{T}$	$\tilde{T}$	$\tilde{T}$
50	-1	0.014	0.013	0.013	0.012
	0	**0.04321**	0.041	0.039	0.036
	0.5	0.066	0.064	0.061	0.056
	1	**0.096**	0.093	0.089	0.083
100	-1	0.018	0.017	0.016	0.015
	0	**0.04321**	0.042	0.040	0.038
	0.5	0.062	0.060	0.058	0.055
	1	0.086	0.084	0.081	0.077
200	-1	0.021	0.020	0.019	0.018
	0	**0.04321**	0.042	0.414	0.039
	0.5	0.059	0.057	0.056	0.0544
	1	0.078	0.076	0.075	0.072

Из табл. 1 следует , что учет поперечных сдвигов $\xi \neq 0$ приводит к незначительному уменьшению влияния отрицательных усилий T_β на напряженно-деформированное состояние оболочки. С другой стороны, фактор неоднородности имеет существенное влияние, приводя к увеличению отрицательного усилия при $k > 0$ и уменьшению − при $k < 0$.

В случай однородной оболочки ($k = 0$) имеем

$$T_{\beta 0} = -\nu T_0 \exp\left(-\frac{\pi\sqrt{2\chi^2+\xi}}{\sqrt{2\chi^2-\xi}}\right) \le -\nu T_0 \exp(-\pi), \qquad (22)$$

а при $\xi = 0$ имеем

$$T^*_{\beta 0} = -\nu T_0 \exp(-\pi) \approx -0.04321\nu T_0. \qquad (23)$$

4. Для оценки влияния знакопеременного усилия T_β на локальную устойчивость оболочки при шарнирном закреплении рассмотрим модельную задачу. Пусть круговая цилиндрическая оболочка длиной L равномерно растягивается вдоль образующих усилием T_0. На оболочку действует также постоянное сжимающее усилие $T^*_{\beta 0}$, определяемое формулой (23). В этом случае, полагая, что по образующей имеется только одна мода, т. е. $m = 1$, согласно [7] критическая сила определяется следующей формулой:

$$\frac{T_0}{EL}\left(0.043\nu - \frac{\pi^2 R}{n^2 L}\right) = \frac{n^2 h^2}{12(1-\nu^2)R^2} + \frac{\pi^4 R^4}{n^6 L^4}. \qquad (24)$$

Отсюда следует, что оболочка может потерять устойчивость при условии

$$0.043\nu - \frac{\pi^2 R}{n^2 L} > 0\,. \tag{25}$$

Условие (25) выполняется при больших n. В частности, например, если $\nu = 0.5$, $L = R$, то $n > 15$, или если $L = \pi^2 R$, $\nu = 0.5$, то $n > 4$ и т. д.

Для больших n и при условии (25) критическую нагрузку согласно (24) можно представить формулой

$$T_0 = \frac{ELn^2}{12(1-\nu^2)}\frac{h^2}{R^2}\left(0.043\nu - \frac{\pi^2 R}{n^2 L}\right)^{-1}. \tag{26}$$

Из равенства нулю производной выражения (26) по n^2 определим n, при котором T_0 достигает минимума:

$$n^2 = \frac{\pi^2 R}{0.0215\nu L}\,. \tag{27}$$

Подставляя (27) в (26), получим соответствующее этому n минимальное значение критической нагрузки

$$\frac{T_{\text{кр}}}{Eh} = \frac{\pi^2 h}{12(1-\nu^2)(0.0215\nu)^2 R}\,. \tag{28}$$

Полученные здесь результаты могут быть использованы при рассмотрении напряженно-деформированного состояния очень тонких оболочечных структур, встречающихся при реализации некоторых нанотехнических процессов. В этих случаях представляют также интерес микрополярные явления [1].

1. *Амбарцумян С. А.* Микрополярная теория оболочек и пластин. – Ереван, 1999. – 214 с.
2. *Амбарцумян С. А.* Общая теория анизотропных оболочек. – Москва: Наука, 1974. – 446 с.
3. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных оболочек. – Москва: Физматгиз, 1961. – 384 с.
4. *Григоренко Я. М., Влайков Г. Г., Григоренко А. Я.* Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей. – Киев: Академпериодика, 2006. – 472 с.
5. *Пикуль В. В.* К теории устойчивости оболочек // Докл. РАН. – 2007. – **416**, № 3. – С. 341–343.
6. *Подстригач Я. С., Бурак Я. М., Гачкевич А. Р., Чернявская Л. В.* Термоупругость электропроводных тел. – Киев: Наук. думка, 1977. – 248 с.
7. *Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. – Москва: Физматгиз, 1963. – 635 с.
8. *Флюгге В.* Статика и динамика оболочек. – Москва: Госстройиздат, 1961. – 306 с.

ДО ЗАДАЧІ ОСЬОВОГО РОЗТЯГУ КРУГОВОЇ НЕОДНОРІДНОЇ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ

Розглядається задача про осьовий розтяг поздовжніми зусиллями неоднорідної кругової циліндричної оболонки. Визначення напруженого стану оболонки проводиться на основі уточненої теорії. Обговорюються питання можливості втрати локальної стійкості при осьовому розтязі.

ON AXIAL TENSION PROBLEM OF CIRCULAR INHOMOGENEOUS TRANSVERSAL ISOTROPIC CYLINDRICAL SHELL

A problem of axial tension is considered for a cylindrical non-homogeneous shell. The shell stress state is considered basing on the refined theory. The possibility of local stability loss is discussed in the case of axial tension load.

Ин-т механики НАН Армении, Ереван

Получено
17.03.08