УДК 539.3

В. С. Саркисян, Э. К. Безоян

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ИЗУЧЕНИЮ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ВЯЗКОУПРУГИХ ОБОЛОЧЕК И ПЛАСТИН С УЧЕТОМ ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГА

На основе теории нелинейной вязкоупругости построена расчетная схема для определения напряженно-деформированного состояния тонких пологих оболочек и пластин с учетом поперечного сдвига и нормального напряжения.

Рассматривается прямоугольная в плане $(a \times b)$ постоянной толщины h тонкая пологая оболочка, загруженная равномерно распределенной нагрузкой q, нормальной к ее срединной поверхности. Материал оболочки подчиняется закономерностям нелинейной вязкоупругости (по теории Маслова – Арутюняна [2]).

Запишем соотношения нелинейной теории вязкоупругости для момента времени $t > t_0$ с учетом старения для случая пространственного напряженного состояния, полагая, что коэффициент Пуассона для упруго-мгновенной деформации $\nu_1(\tau)$ и деформации ползучести $\nu_2(t,\tau)$ постоянен, т.е. $\nu_1(\tau) = \nu_2(t,\tau) = \nu = \text{const}$. Тогда [2]

$$e_{ij} = (2-\delta_{ij})\left\{ \frac{(1+\nu)\sigma_{ij}(t) - \nu\delta_{ij}S(t)}{E(t)} - \int_{t_0}^{t} \left[(1+\nu)\sigma_{ij}(\tau) - \right.\right.$$
$$\left. - \nu\delta_{ij}S(\tau)\right] \frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{1}{E(\tau)}\right] d\tau - \int_{t_0}^{t} \left[(1+\nu)\sigma_{ij}(\tau) - \right.$$
$$\left.\left. - \nu\delta_{ij}S(\tau)\right] F[\sigma_0(\tau)] \frac{\partial}{\partial\tau} C(t,\tau)\, d\tau \right\}, \qquad i,j = x,y,z. \tag{1}$$

Здесь $F[\sigma_0(\tau)] = \alpha + \beta\sigma_0^{m-1}(\tau)$ – функция, характеризующая нелинейную зависимость между напряжениями и деформациями; α и β – положительные параметры, численные значения которых определяются на основании экспериментальных данных, причем $\alpha + \beta = 1$; $\beta = \beta_0 R_0^{-(m-1)}$; β_0 – малый безразмерный параметр; m – некоторый целочисленный параметр, $m = 3$; σ_0 – интенсивность напряжения:

$$\sigma_0(\tau) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left\{(\sigma_{xx}-\sigma_{yy})^2 + (\sigma_{xx}-\sigma_{zz})^2 + (\sigma_{yy}-\sigma_{zz})^2 + \right.$$
$$\left. + 6\left(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{xz}^2\right)\right\}^{1/2},$$
$$S(t) = \sigma_{xx}(t) + \sigma_{yy}(t) + \sigma_{zz}(t),$$

$E(t)$ – модуль упруго-мгновенной деформации; R_0 – предел прочности материала в момент времени t; $G(t,\tau)$ – мера ползучести материала, которая имеет вид

$$G(t,\tau) = \sum_{k=0}^{n} \varphi_k(\tau) f_k(t-\tau),$$

$\varphi_k(\tau)$ – функция, учитывающая процесс старения материала; $f_k(t-\tau)$ – функция, учитывающая длительность его загружения. Остальные обозначения общепринятые.

Решение задачи. Для получения разрешающих систем уравнений принимаем следующие предположения [1]:

а) нормальное к срединной поверхности оболочки перемещение u_z не зависит от координаты z , т. е.

$$e_{zz} = 0 \quad \Rightarrow \quad u_z = w(x, y, t), \qquad \sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}); \tag{2}$$

б) деформации сдвига e_{xz} и e_{yz} по толщине оболочки меняются по заданному закону:

$$e_{xz} = \xi_0(z)\,\varphi(x, y, t), \qquad e_{yz} = \xi_0(z)\,\psi(x, y, t)\,, \tag{3}$$

где $\varphi(x, y, t)$ и $\psi(x, y, t)$ – искомые функции деформации сдвига, а функция

$$\xi_0(z) = 1 - 4z^2/h^2$$

характеризует закон изменения деформации сдвига по толщине оболочки [1] и удовлетворяет условию $\xi_0(\pm h/2) = 0$;

в) интенсивность напряжения предполагается равной соответствующей средней интенсивности напряжений, найденной по теории линейно-вязкоупругих оболочек:

$$\sigma_0 = \frac{1}{abh}\int_0^a\int_0^b\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{0\wedge}(x, y, z, t)\,dx\,dy\,dz\,.$$

Здесь $\sigma_{0\wedge}(x, y, z, t)$ – интенсивность напряжения, найденная по теории линейной вязкоупругости.

Компоненты деформации тонких оболочек с учетом (2) и (3) имеют вид

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} + (2 - \delta_{ij})\,z\,\chi_{ij} + \xi(z)\,\theta_{ij}, \qquad i, j = x, y\,, \tag{4}$$

где $\varepsilon_{xx} = u_{,x} - k_1 w$, $\varepsilon_{yy} = V_{,y} - k_2 w$, $\varepsilon_{xy} = u_{,y} + V_{,x}$ – деформации удлинения и сдвига срединной поверхности; k_1 , k_2 – кривизны срединной поверхности оболочки,

$$\theta_{xx} = \varphi_{,x}, \qquad \theta_{yy} = \psi_{,y}, \qquad \theta_{xy} = \varphi_{,y} + \psi_{,x}\,,$$

$$\chi_{xx} = -w_{,xx}, \quad \chi_{yy} = -w_{,yy}\,,$$

$$\chi_{xy} = -w_{,xy}, \qquad \xi(z) = z - 4z^3/3h^2 \qquad \left(\ell_{,x} = \frac{\partial \ell}{\partial x}\right).$$

Учитывая предположения ***а***), ***б***), ***в***), соотношение (1) запишем как

$$e_{ij} = \frac{(2 - \delta_{ij})(1 + \nu)}{E(t)}(I - K - \beta_0 K_1)(\sigma_{ij} - \nu\delta_{ij}\sigma)\,. \tag{5}$$

Здесь приняты следующие обозначения: $I(f) = f$ – единичный оператор,

$$K(f) = \int_{t_0}^{t} f(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{E(t)}{E(\tau)} + \alpha C(t, \tau)\right]d\tau\,,$$

$$K_1(f) = \int_{t_0}^{t} f(\tau)\,\bar{\sigma}_0(\tau)\,\frac{\partial}{\partial\tau}C(t, \tau)\,d\tau\,, \tag{6}$$

$$\bar{\sigma}_0(\tau) = \left(\sigma_0/R_0\right)^2.$$

Из уравнения (5), принимая во внимание соотношения (4), а также уравнения равновесия элемента оболочки [1] и вводя известную функцию напряжения $\Phi(x, y, t)$, получим следующую полную систему инегро-дифференциальных уравнений для определения внутренних усилий и перемещений оболочки с учётом нелинейной вязкоупругости материала:

$$(I - K - \beta_0 K_1)\nabla^4\Phi + B(t)\nabla_k^2 w = 0\,, \tag{7}$$

$$-(1-\nu)\nabla^2 w_{,x} + \frac{4}{5}\left((1-\nu)\varphi_{,xx} + \frac{1-2\nu}{2}\varphi_{,yy} + \frac{1}{2}\psi_{,xy}\right) = \frac{4(1-2\nu)}{h^2}\varphi\,, \tag{8}$$

$$-(1-\nu)\nabla^2 w_{,y} + \frac{4}{5}\left((1-\nu)\psi_{,yy} + \frac{1-2\nu}{2}\psi_{,xx} + \frac{1}{2}\varphi_{,xy}\right) = \frac{4(1-2\nu)}{h^2}\psi\,, \tag{9}$$

$$\frac{E(t)h}{3(1+\nu)}(\varphi_{,x} + \psi_{,y}) + (I - K - \beta_0 K_1)\left(\nabla_k^2\Phi + q\right) = 0\,, \tag{10}$$

$$B(t) = \frac{E(t)h}{1-\nu^2}\,, \qquad \nabla_k^2\Phi = k_1 w_{,yy} + k_2 w_{,xx}\,.$$

Преобразовав уравнения (8)–(10) и исключив φ и ψ, получим

$$D(t)\nabla^4 w + (I - K - \beta_0 K_1)\left(\nabla_h^2\nabla_k^2\Phi + q\right) = 0\,, \tag{11}$$

где

$$D(t) = \frac{E(t)h^3(1-\nu)}{12(1+\nu)(1-2\nu)}\,, \qquad \nabla_h^2 = \frac{h^2(1-\nu)}{5(1-2\nu)}\nabla^2 - 1\,.$$

Уравнения (7), (11), т. е.

$$B(t)\nabla_k^2 w + (I - K - \beta_0 K)\nabla^4\Phi = 0\,,$$

$$D(t)\nabla^4 w + (I - K - \beta_0 K_1)\left(\nabla_h^2\nabla_k^2\Phi + q\right) = 0 \tag{12}$$

образуют полную систему уравнений для определения двух неизвестных функций w, Φ.

Задача расчета пологой нелинейно-вязкоупругой оболочки сводится к нахождению решения системы интегро-дифференциальных уравнений четвертого порядка (12), удовлетворяющего на контуре граничным и начальным условиям.

Для решения системы уравнений (12) принимаем, что материал оболочки обладает слабой нелинейностью, т. е. $\left|\beta_0\bar{\sigma}_0\right| < 1$.

Неизвестные функции (Φ, w) представим в виде ряда по степеням малого параметра β_0 [3]:

$$(\Phi, w) = \sum_{n=0}^{\infty}\beta_0^n(\Phi_n, w_n)\,. \tag{13}$$

Подставляя (13) в (12) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях параметра β_0, получим следующие рекуррентные разрешающие системы интегро-дифференциальных уравнений:

$$(I - K)\nabla^4\Phi_n + B(t)\nabla_k^2 w_n = K_1\nabla^4\Phi_{n-1}\,,$$

$$(I - K)\left(\nabla_h^2\nabla_k^2\Phi_n + q_n\right) + D(t)\nabla^4 w_n = K_1\nabla_h^2\nabla_k^2\Phi_{n-1}\,, \tag{14}$$

где

$$q_n = \begin{cases} q, & n = 0, \\ 0, & n = 1, 2, 3, \ldots, \end{cases} \qquad \Phi_{-1} = w_{-1} = 0\,.$$

Таким образом, полученная разрешающая рекуррентная система уравнений (14) с учетом граничных и начальных условий представляет полную систему интегро-дифференциальных уравнений для определения напряженно-деформированного состояния нелинейно-вязкоупругих тонких пологих оболочек и пластин с учетом поперечного сдвига и нормального напряжения σ_{zz}.

Численный пример. Рассмотрена прямоугольная в плане ($a \times a$) шарнирно опертая по контуру пологая вязкоупругая оболочка со следующими физическими и геометрическими характеристиками:

$$q_0 = qa^4/Eh^4 = 80, \qquad K_0 = (a^2 + b^2)/Rh = 2a^2/Rh = 48\,,$$

$$C(t,\tau) = \varphi(\tau)f(t-\tau), \qquad \varphi(\tau) = C + Ae^{-\beta\tau}, \qquad f(t-\tau) = 1 - e^{-\gamma(t-\tau)}\,,$$

$$\beta_0 = 0.004, \qquad \nu = 0.25, \qquad E = 2 \cdot 10^4, \qquad h/a = 0.2\,,$$

$$\gamma = 0.026 \cdot 30 = 0.78, \qquad C_0E = 1.8, \qquad AE = 9.84\,.$$

Для решения системы уравнений (14) используется метод Бубнова – Галеркина.

В результате вычислений получены значения перемещений и напряжений при длительном действии нагрузки (в течение двух лет). Анализ результатов показывает, что учет нелинейной вязкоупругости на приращение перемещений (по сравнению с линейной вязкоупругостью) составляет 18–28%. В случае же поперечного сдвига при прочих неизменных параметрах получено, что учет нелинейной вязкоупругости на приращение перемещений (по сравнению с линейной вязкоупругостью) составляет 25–30%.

1. *Амбарцумян С. А.* Общая теория анизотропных оболочек. – Москва: Наука, 1974. – 448 с.
2. *Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Б.* Теория ползучести неоднородных тел. – Москва: Наука, 1983. – 336 с.
3. *Саркисян В. С., Безоян Э. К., Григорян М. Г., Белубекян И. А.* Некоторые вопросы теории неоднородных вязкоупругих тел // Межвуз. сб. ЕГУ. Механика. – 1991. – № 8. – С. 154–169.

ПРО ОДИН ПІДХІД ДО ВИВЧЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ НЕЛІНІЙНИХ В'ЯЗКОПРУЖНИХ ОБОЛОНОК І ПЛАСТИН З УРАХУВАННЯМ ПОПЕРЕЧНОГО ЗСУВУ

На основі теорії нелінійної в'язкопружності побудовано розрахункову схему для визначення напружено-деформованого стану тонких пологих оболонок і пластин з урахуванням поперечного зсуву та нормального напруження.

ON ONE APPROACH TO ANALYSIS OF STRESS-STRAIN STATE OF NONLINEAR VISCOELASTIC SHELLS AND PLATES WITH TAKING INTO ACCOUNT SHEAR STRESS

On the base of nonlinear viscoelasticity theory the calculation apparatus for determination of stress-strain state of thin shells and plates with taking into account shear stress and normal stress is constructed.

Ереван. гос. ун-т, Ереван, Армения

Получено
21.03.08