УДК 539.3

С. А. Калоеров, А. В. Петренко

ДВУМЕРНАЯ ЗАДАЧА ЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГОСТИ ДЛЯ МНОГОСВЯЗНЫХ СРЕД

Предложен метод решения связанных двумерных и плоских задач электромагнитоупругости для многосвязных областей. Получены основные соотношения двумерной и плоской задач, введены и исследованы обобщенные комплексные потенциалы электромагнитоупругости, получены граничные условия для их определения, выражения через них основных характеристик электромагнитоупругого состояния (напряжений, перемещений, векторов напряженности и индукции, потенциалов электрического и магнитного полей). Приведено решение задачи для пластинки с эллиптическим отверстием или трещиной.

В связи с широким применением в различных областях техники пьезоэлектрических и пьезомагнитных материалов в последние десятилетия значительно усилился интерес к вопросам исследования упругого равновесия тел из таких материалов под действием механических сил и электромагнитных полей, решению различных задач инженерной практики [1, 2, 12–15]. Зачастую элементы реальных конструкций современной техники имеют отверстия, инородные включения и трещины. В связи с этим необходимо разработать методы исследования электромагнитоупругого состояния тел в случае многосвязных областей. Для таких тел в статьях [8, 16] предложены методы решения двумерных и плоских задач электроупругости, а в работах [6, 7] – задач магнитоупругости. В предлагаемой статье указанные подходы распространены на случай электромагнитоупругости, когда в уравнениях электромагнитоупругого состояния учтены как электрические, так и магнитные свойства материала.

1. Постановка задачи. Рассмотрим анизотропное цилиндрическое тело из пьезоматериала, ослабленное L продольными полостями с образующими, параллельными оси цилиндра. Пусть тело под действием внешних механических усилий и электромагнитного поля находится в условиях двумерного электромагнитоупругого состояния, которое не меняется вдоль оси цилиндра, принимаемой за ось Oz прямоугольной системы координат $Oxyz$. Объемные силы, электрические заряды и начальная намагниченность отсутствуют. К цилиндрическим поверхностям приложены распределенные силовые, электрические и магнитные воздействия, не меняющиеся вдоль оси Oz; вдоль внутренних линий, параллельных оси Oz, действуют сосредоточенные силы, электрические заряды и намагниченности.

Решение задачи об определении электромагнитоупругого состояния рассматриваемого тела сводится к интегрированию системы уравнений [3–9, 11, 13, 16], состоящей из

– *уравнений равновесия*:

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}=0\,; \tag{1}$$

– *уравнений электромагнитостатики*:

$$\frac{\partial D_x}{\partial x}+\frac{\partial D_y}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial E_x}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial x}=0\,, \tag{2}$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial H_x}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial x}=0\,; \tag{3}$$

– *уравнений электромагнитоупругого состояния*:

$$\varepsilon_x=s_{11}^{DB}\sigma_x+s_{12}^{DB}\sigma_y+s_{13}^{DB}\sigma_z+s_{14}^{DB}\tau_{yz}+s_{15}^{DB}\tau_{xz}+s_{16}^{DB}\tau_{xy}+$$

$$+ g_{11}^{\sigma,D} D_x + g_{21}^{\sigma,D} D_y + g_{31}^{\sigma,D} D_z + p_{11}^{\sigma,B} B_x + p_{21}^{\sigma,B} B_y + p_{31}^{\sigma,B} B_z ,$$

$$\varepsilon_y = s_{12}^{DB}\sigma_x + s_{22}^{DB}\sigma_y + s_{23}^{DB}\sigma_z + s_{24}^{DB}\tau_{yz} + s_{25}^{DB}\tau_{xz} + s_{26}^{DB}\tau_{xy} +$$

$$+ g_{12}^{\sigma,D} D_x + g_{22}^{\sigma,D} D_y + g_{32}^{\sigma,D} D_z + p_{12}^{\sigma,B} B_x + p_{22}^{\sigma,B} B_y + p_{32}^{\sigma,B} B_z ,$$

$$\varepsilon_z = s_{13}^{DB}\sigma_x + s_{23}^{DB}\sigma_y + s_{33}^{DB}\sigma_z + s_{34}^{DB}\tau_{yz} + s_{35}^{DB}\tau_{xz} + s_{36}^{DB}\tau_{xy} +$$

$$+ g_{13}^{\sigma,D} D_x + g_{23}^{\sigma,D} D_y + g_{33}^{\sigma,D} D_z + p_{13}^{\sigma,B} B_x + p_{23}^{\sigma,B} B_y + p_{33}^{\sigma,B} B_z ,$$

$$\gamma_{yz} = s_{14}^{DB}\sigma_x + s_{24}^{DB}\sigma_y + s_{34}^{DB}\sigma_z + s_{44}^{DB}\tau_{yz} + s_{45}^{DB}\tau_{xz} + s_{46}^{DB}\tau_{xy} +$$

$$+ g_{14}^{\sigma,D} D_x + g_{24}^{\sigma,D} D_y + g_{34}^{\sigma,D} D_z + p_{14}^{\sigma,B} B_x + p_{24}^{\sigma,B} B_y + p_{34}^{\sigma,B} B_z ,$$

$$\gamma_{xz} = s_{15}^{DB}\sigma_x + s_{25}^{DB}\sigma_y + s_{35}^{DB}\sigma_z + s_{45}^{DB}\tau_{yz} + s_{55}^{DB}\tau_{xz} + s_{56}^{DB}\tau_{xy} +$$

$$+ g_{15}^{\sigma,D} D_x + g_{25}^{\sigma,D} D_y + g_{35}^{\sigma,D} D_z + p_{15}^{\sigma,B} B_x + p_{25}^{\sigma,B} B_y + p_{35}^{\sigma,B} B_z ,$$

$$\gamma_{xy} = s_{16}^{DB}\sigma_x + s_{26}^{DB}\sigma_y + s_{36}^{DB}\sigma_z + s_{46}^{DB}\tau_{yz} + s_{56}^{DB}\tau_{xz} + s_{66}^{DB}\tau_{xy} +$$

$$+ g_{16}^{\sigma,D} D_x + g_{26}^{\sigma,D} D_y + g_{36}^{\sigma,D} D_z + p_{16}^{\sigma,B} B_x + p_{26}^{\sigma,B} B_y + p_{36}^{\sigma,B} B_z ,$$

$$E_x = -g_{11}^{\sigma,D}\sigma_x - g_{12}^{\sigma,D}\sigma_y - g_{13}^{\sigma,D}\sigma_z - g_{14}^{\sigma,D}\tau_{yz} - g_{15}^{\sigma,D}\tau_{xz} -$$

$$- g_{16}^{\sigma,D}\tau_{xy} + \beta_{11}^{\sigma} D_x + \beta_{12}^{\sigma} D_y + \beta_{13}^{\sigma} D_z + \nu_{11}^{\sigma} B_x + \nu_{12}^{\sigma} B_y + \nu_{13}^{\sigma} B_z ,$$

$$E_y = -g_{21}^{\sigma,D}\sigma_x - g_{22}^{\sigma,D}\sigma_y - g_{23}^{\sigma,D}\sigma_z - g_{24}^{\sigma,D}\tau_{yz} - g_{25}^{\sigma,D}\tau_{xz} -$$

$$- g_{26}^{\sigma,D}\tau_{xy} + \beta_{12}^{\sigma} D_x + \beta_{22}^{\sigma} D_y + \beta_{23}^{\sigma} D_z + \nu_{12}^{\sigma} B_x + \nu_{22}^{\sigma} B_y + \nu_{23}^{\sigma} B_z ,$$

$$E_z = -g_{31}^{\sigma,D}\sigma_x - g_{32}^{\sigma,D}\sigma_y - g_{33}^{\sigma,D}\sigma_z - g_{34}^{\sigma,D}\tau_{yz} - g_{35}^{\sigma,D}\tau_{xz} -$$

$$- g_{36}^{\sigma,D}\tau_{xy} + \beta_{13}^{\sigma} D_x + \beta_{23}^{\sigma} D_y + \beta_{33}^{\sigma} D_z + \nu_{13}^{\sigma} B_x + \nu_{23}^{\sigma} B_y + \nu_{33}^{\sigma} B_z ,$$

$$H_x = -p_{11}^{\sigma,B}\sigma_x - p_{12}^{\sigma,B}\sigma_y - p_{13}^{\sigma,B}\sigma_z - p_{14}^{\sigma,B}\tau_{yz} - p_{15}^{\sigma,B}\tau_{xz} -$$

$$- p_{16}^{\sigma,B}\tau_{xy} + \nu_{11}^{\sigma} D_x + \nu_{12}^{\sigma} D_y + \nu_{13}^{\sigma} D_z + \chi_{11}^{\sigma} B_x + \chi_{12}^{\sigma} B_y + \chi_{13}^{\sigma} B_z ,$$

$$H_y = -p_{21}^{\sigma,B}\sigma_x - p_{22}^{\sigma,B}\sigma_y - p_{23}^{\sigma,B}\sigma_z - p_{24}^{\sigma,B}\tau_{yz} - p_{25}^{\sigma,B}\tau_{xz} -$$

$$- p_{26}^{\sigma,B}\tau_{xy} + \nu_{12}^{\sigma} D_x + \nu_{22}^{\sigma} D_y + \nu_{23}^{\sigma} D_z + \chi_{12}^{\sigma} B_x + \chi_{22}^{\sigma} B_y + \chi_{23}^{\sigma} B_z ,$$

$$H_z = -p_{31}^{\sigma,B}\sigma_x - p_{32}^{\sigma,B}\sigma_y - p_{33}^{\sigma,B}\sigma_z - p_{34}^{\sigma,B}\tau_{yz} - p_{35}^{\sigma,B}\tau_{xz} - p_{36}^{\sigma,B}\tau_{xy} +$$

$$+ \nu_{13}^{\sigma} D_x + \nu_{23}^{\sigma} D_y + \nu_{33}^{\sigma} D_z + \chi_{13}^{\sigma} B_x + \chi_{23}^{\sigma} B_y + \chi_{33}^{\sigma} B_z ; \qquad (4)$$

– *соотношений Коши*:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = 0, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y},$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

$$E_z = 0, \quad H_x = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad H_y = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad H_z = 0. \qquad (5)$$

Здесь σ_x, σ_y, σ_z, τ_{yz}, τ_{xz}, τ_{xy} и ε_x, ε_y, ε_z, γ_{yz}, γ_{xz}, γ_{xy} – компоненты тензоров напряжений и деформаций; D_x, D_y, D_z, E_x, E_y, E_z и φ – компоненты векторов индукции, напряженности и потенциал электрического поля; B_x, B_y, B_z, H_x, H_y, H_z и ψ – компоненты векторов индукции, напряженности и потенциал магнитного поля; s_{ij}^{DB} – коэффициенты деформации материала тела, измеренные при постоянных индукциях электрического и магнитного полей; $g_{ki}^{\sigma,D}$ и $p_{ki}^{\sigma,B}$ – пьезоэлектрические и пьезомагнитные коэффициенты деформаций и напряженности, измеренные при постоянных напряжениях и индукции; $\beta_{k\ell}^{\sigma}$ и $\chi_{k\ell}^{\sigma}$ – коэффициенты диэлектрической и магнитной восприимчивости, измеренные при постоянных напряжениях; $\nu_{k\ell}^{\sigma}$ – коэффициенты электромагнитной восприимчивости, измеренные при постоянных напряжениях.

При этом выполняются соотношения совместности Сен-Венана

$$\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y}=0, \qquad \frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}-\frac{\partial\gamma_{xz}}{\partial y}=0.$$

Систему (1)–(5) нужно интегрировать при заданных на граничных поверхностях краевых условиях. Так, если на границе заданы механические усилия, электрическая и магнитная индукции, то эти условия имеют вид

$$\begin{aligned}
&\sigma_x\cos(nx)+\tau_{xy}\cos(ny)+\tau_{xz}\cos(nz)=X_n,\\
&\tau_{xy}\cos(nx)+\sigma_y\cos(ny)+\tau_{yz}\cos(nz)=Y_n,\\
&\tau_{xz}\cos(nx)+\tau_{yz}\cos(ny)+\sigma_z\cos(nz)=Z_n,\\
&D_x\cos(nx)+D_y\cos(ny)+D_z\cos(nz)=D_n,\\
&B_x\cos(nx)+B_y\cos(ny)+B_z\cos(nz)=B_n. \qquad (6)
\end{aligned}$$

Учитывая, что для двумерной задачи $\varepsilon_z=0$, $E_z=0$, $H_z=0$ и решая относительно σ_z, D_z и B_z систему, состоящую из третьего, девятого и двенадцатого уравнений равенств (4), находим

$$\begin{aligned}
\sigma_z = -\big[&(p_{31}^{\sigma,B}A_1+g_{31}^{\sigma,D}A_2+s_{13}^{DB}A_4)\sigma_x+(p_{32}^{\sigma,B}A_1+g_{32}^{\sigma,D}A_2+s_{23}^{DB}A_4)\sigma_y+\\
&+(p_{34}^{\sigma,B}A_1+g_{34}^{\sigma,D}A_2+s_{34}^{DB}A_4)\tau_{yz}+(p_{35}^{\sigma,B}A_1+g_{35}^{\sigma,D}A_2+s_{35}^{DB}A_4)\tau_{xz}+\\
&+(p_{36}^{\sigma,B}A_1+g_{36}^{\sigma,D}A_2+s_{36}^{DB}A_4)\tau_{xy}+(-\nu_{13}^{\sigma}A_1-\beta_{13}^{\sigma}A_2+g_{13}^{\sigma,D}A_4)D_x+\\
&+(-\nu_{23}^{\sigma}A_1-\beta_{23}^{\sigma}A_2+g_{23}^{\sigma,D}A_4)D_y+(-\chi_{13}^{\sigma}A_1-\nu_{13}^{\sigma}A_2+p_{13}^{\sigma,B}A_4)B_x+\\
&+(-\chi_{23}^{\sigma}A_1-\nu_{23}^{\sigma}A_2+p_{23}^{\sigma,B}A_4)B_y\big]\frac{1}{D},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_z = -\big[&(s_{13}^{DB}A_2+p_{31}^{\sigma,B}A_3-g_{31}^{\sigma,D}A_5)\sigma_x+(s_{23}^{DB}A_2+p_{32}^{\sigma,B}A_3-g_{32}^{\sigma,D}A_5)\sigma_y+\\
&+(s_{34}^{DB}A_2+p_{34}^{\sigma,B}A_3-g_{34}^{\sigma,D}A_5)\tau_{yz}+(s_{35}^{DB}A_2+p_{35}^{\sigma,B}A_3-g_{35}^{\sigma,D}A_5)\tau_{xz}+\\
&+(s_{36}^{DB}A_2+p_{36}^{\sigma,B}A_3-g_{36}^{\sigma,D}A_5)\tau_{xy}+(g_{13}^{\sigma,D}A_2-\nu_{13}^{\sigma}A_3+\beta_{13}^{\sigma}A_5)D_x+\\
&+(g_{23}^{\sigma,D}A_2-\nu_{23}^{\sigma}A_3+\beta_{23}^{\sigma}A_5)D_y+(p_{13}^{\sigma,B}A_2-\chi_{13}^{\sigma}A_3+\nu_{13}^{\sigma}A_5)B_x+\\
&+(p_{23}^{\sigma,B}A_2-\chi_{23}^{\sigma}A_3+\nu_{23}^{\sigma}A_5)B_y\big]\frac{1}{D},
\end{aligned}$$

$$B_z = -\left[\left(s_{13}^{DB}A_1 + g_{31}^{\sigma,D}A_3 - p_{31}^{\sigma,B}A_6\right)\sigma_x + \left(s_{23}^{DB}A_1 + g_{32}^{\sigma,D}A_3 - p_{32}^{\sigma,B}A_6\right)\sigma_y + \right.$$
$$+ \left(s_{34}^{DB}A_1 + g_{34}^{\sigma,D}A_3 - p_{34}^{\sigma,B}A_6\right)\tau_{yz} + \left(s_{35}^{DB}A_1 + g_{35}^{\sigma,D}A_3 - p_{35}^{\sigma,B}A_6\right)\tau_{xz} +$$
$$+ \left(s_{36}^{DB}A_1 + g_{36}^{\sigma,D}A_3 - p_{36}^{\sigma,B}A_6\right)\tau_{xy} + \left(g_{13}^{\sigma,D}A_1 - \beta_{13}^{\sigma}A_3 + \nu_{13}^{\sigma}A_6\right)D_x +$$
$$+ \left(g_{23}^{\sigma,D}A_1 - \beta_{23}^{\sigma}A_3 + \nu_{23}^{\sigma}A_6\right)D_y + \left(p_{13}^{\sigma,B}A_1 - \nu_{13}^{\sigma}A_3 + \chi_{13}^{\sigma}A_6\right)B_x +$$
$$\left. + \left(p_{23}^{\sigma,B}A_1 - \nu_{23}^{\sigma}A_3 + \chi_{23}^{\sigma}A_6\right)B_y\right]\frac{1}{D}, \qquad (7)$$

где

$$D = p_{33}^{\sigma,B}A_1 + g_{33}^{\sigma,D}A_2 + s_{33}^{DB}A_4 = g_{33}^{\sigma,D}A_2 - \nu_{33}^{\sigma}A_3 + \beta_{33}^{\sigma}A_5 =$$
$$= p_{33}^{\sigma,B}A_1 - \nu_{33}^{\sigma}A_3 + \chi_{33}^{\sigma}A_6,$$

$$A_1 = \beta_{33}^{\sigma}p_{33}^{\sigma,B} - \nu_{33}^{\sigma}g_{33}^{\sigma,D}, \qquad A_2 = \chi_{33}^{\sigma}g_{33}^{\sigma,D} - \nu_{33}^{\sigma}p_{33}^{\sigma,B},$$
$$A_3 = \nu_{33}^{\sigma}s_{33}^{DB} + p_{33}^{\sigma,B}g_{33}^{\sigma,D}, \qquad A_4 = \beta_{33}^{\sigma}\chi_{33}^{\sigma} - \left(\nu_{33}^{\sigma}\right)^2,$$
$$A_5 = \chi_{33}^{\sigma}s_{33}^{DB} + \left(p_{33}^{\sigma,B}\right)^2, \qquad A_6 = \beta_{33}^{\sigma}s_{33}^{DB} + \left(g_{33}^{\sigma,D}\right)^2.$$

Подставляя (7) в систему равенств (4), получаем

$$\varepsilon_x = a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{14}\tau_{yz} + a_{15}\tau_{xz} + a_{16}\tau_{xy} + b_{11}D_x +$$
$$+ b_{21}D_y + d_{11}B_x + d_{21}B_y,$$
$$\varepsilon_y = a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{24}\tau_{yz} + a_{25}\tau_{xz} + a_{26}\tau_{xy} + b_{12}D_x +$$
$$+ b_{22}D_y + d_{12}B_x + d_{22}B_y,$$
$$\gamma_{yz} = a_{14}\sigma_x + a_{24}\sigma_y + a_{44}\tau_{yz} + a_{45}\tau_{xz} + a_{46}\tau_{xy} + b_{14}D_x +$$
$$+ b_{24}D_y + d_{14}B_x + d_{24}B_y,$$
$$\gamma_{xz} = a_{15}\sigma_x + a_{25}\sigma_y + a_{45}\tau_{yz} + a_{55}\tau_{xz} + a_{56}\tau_{xy} + b_{15}D_x +$$
$$+ b_{25}D_y + d_{15}B_x + d_{25}B_y,$$
$$\gamma_{xy} = a_{16}\sigma_x + a_{26}\sigma_y + a_{46}\tau_{yz} + a_{56}\tau_{xz} + a_{66}\tau_{xy} + b_{16}D_x +$$
$$+ b_{26}D_y + d_{16}B_x + d_{26}B_y,$$
$$E_x = -b_{11}\sigma_x - b_{12}\sigma_y - b_{14}\tau_{yz} - b_{15}\tau_{xz} - b_{16}\tau_{xy} + c_{11}D_x +$$
$$+ c_{12}D_y + e_{11}B_x + e_{12}B_y,$$
$$E_y = -b_{21}\sigma_x - b_{22}\sigma_y - b_{24}\tau_{yz} - b_{25}\tau_{xz} - b_{26}\tau_{xy} + c_{12}D_x +$$
$$+ c_{22}D_y + e_{12}B_x + e_{22}B_y,$$
$$H_x = -d_{11}\sigma_x - d_{12}\sigma_y - d_{14}\tau_{yz} - d_{15}\tau_{xz} - d_{16}\tau_{xy} + e_{11}D_x +$$
$$+ e_{12}D_y + f_{11}B_x + f_{12}B_y,$$
$$H_y = -d_{21}\sigma_x - d_{22}\sigma_y - d_{24}\tau_{yz} - d_{25}\tau_{xz} - d_{26}\tau_{xy} + e_{12}D_x +$$
$$+ e_{22}D_y + f_{12}B_x + f_{22}B_y, \qquad (8)$$

где

$$a_{ij} = s_{ij}^{DB} - \left[s_{i3}^{DB}\left(p_{3j}^{\sigma,B}A_1 + g_{3j}^{\sigma,D}A_2 + s_{j3}^{DB}A_4\right) + g_{3i}^{\sigma,D}\left(s_{j3}^{DB}A_2 + p_{3j}^{\sigma,B}A_3 - \right.\right.$$
$$\left.\left. - g_{3j}^{\sigma,D}A_5\right) + p_{3i}^{\sigma,B}\left(s_{j3}^{DB}A_1 + g_{3j}^{\sigma,D}A_3 - p_{3j}^{\sigma,B}A_6\right)\right]\frac{1}{D},$$
$$b_{mj} = g_{mj}^{\sigma,D} - \left[s_{j3}^{DB}\left(-\nu_{m3}^{\sigma}A_1 - \beta_{m3}^{\sigma}A_2 + g_{m3}^{\sigma,D}A_4\right) + g_{3j}^{\sigma,D}\left(g_{m3}^{\sigma,D}A_2 - \nu_{m3}^{\sigma}A_3 + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \beta_{m3}^{\sigma}A_5\right) + p_{3j}^{\sigma,B}\left(g_{m3}^{\sigma,D}A_1 - \beta_{m3}^{\sigma}A_3 + \nu_{m3}^{\sigma}A_6\right)\right]\frac{1}{D},$$

$$c_{nm} = \beta^{\sigma}_{nm} - \big[g^{\sigma,D}_{n3}\big(\nu^{\sigma}_{m3}A_1 + \beta^{\sigma}_{m3}A_2 - g^{\sigma,D}_{m3}A_4\big) + \beta^{\sigma}_{n3}\big(g^{\sigma,D}_{m3}A_2 - \nu^{\sigma}_{m3}A_3 + \beta^{\sigma}_{m3}A_5\big) + \nu^{\sigma}_{n3}\big(g^{\sigma,D}_{m3}A_1 - \beta^{\sigma}_{m3}A_3 + \nu^{\sigma}_{m3}A_6\big)\big]\frac{1}{D},$$

$$d_{mj} = p^{\sigma,B}_{mj} - \big[s^{DB}_{j3}\big(-\chi^{\sigma}_{m3}A_1 - \nu^{\sigma}_{m3}A_2 + p^{\sigma,B}_{m3}A_4\big) + g^{\sigma,D}_{3j}\big(p^{\sigma,B}_{m3}A_2 - \chi^{\sigma}_{m3}A_3 + \nu^{\sigma}_{m3}A_5\big) + p^{\sigma,B}_{3j}\big(p^{\sigma,B}_{m3}A_1 - \nu^{\sigma}_{m3}A_3 + \chi^{\sigma}_{m3}A_6\big)\big]\frac{1}{D},$$

$$e_{nm} = \nu^{\sigma}_{nm} - \big[g^{\sigma,D}_{n3}\big(\chi^{\sigma}_{m3}A_1 + \nu^{\sigma}_{m3}A_2 - p^{\sigma,B}_{m3}A_4\big) + \beta^{\sigma}_{n3}\big(p^{\sigma,B}_{m3}A_2 - \chi^{\sigma}_{m3}A_3 + \nu^{\sigma}_{m3}A_5\big) + \nu^{\sigma}_{n3}\big(p^{\sigma,B}_{m3}A_1 - \nu^{\sigma}_{m3}A_3 + \chi^{\sigma}_{m3}A_6\big)\big]\frac{1}{D},$$

$$f_{nm} = \chi^{\sigma}_{nm} - \big[p^{\sigma,B}_{n3}\big(\chi^{\sigma}_{m3}A_1 + \nu^{\sigma}_{m3}A_2 - p^{\sigma,B}_{m3}A_4\big) + \nu^{\sigma}_{n3}\big(p^{\sigma,B}_{m3}A_2 - \chi^{\sigma}_{m3}A_3 + \nu^{\sigma}_{m3}A_5\big) + \chi^{\sigma}_{n3}\big(p^{\sigma,B}_{m3}A_1 - \nu^{\sigma}_{m3}A_3 + \chi^{\sigma}_{m3}A_6\big)\big]\frac{1}{D}.$$

Из вышесказанного следует, что двумерная задача электромагнитоупругости сводится к решению системы уравнений, состоящей из уравнений (1)–(3), (5) и (8) при заданных на границе условиях, например, типа (6).

2. Комплексные потенциалы задачи. Введем функции напряжений, электрической и магнитной индукций так, чтобы равенства (1) и первые уравнения систем (2) и (3) удовлетворялись тождественно, положив [5–8]

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \qquad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \qquad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y},$$
$$\tau_{xz} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \qquad \tau_{yz} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \qquad D_x = \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial y},$$
$$D_y = -\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x}, \qquad B_x = \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \qquad B_y = -\frac{\partial \Omega}{\partial x}. \tag{9}$$

Тогда из соотношений (5) и вторых уравнений (2) и (3) с учетом (8) получим систему дифференциальных уравнений вида

$$L_{4a}F + L_{3a}\Psi + L_{3b}\mathrm{X} + L_{3d}\Omega = 0,$$
$$L_{3a}F + L_{2a}\Psi + L_{2b}\mathrm{X} + L_{2d}\Omega = 0,$$
$$L_{3b}F + L_{2b}\Psi + L_{2c}\mathrm{X} + L_{2e}\Omega = 0,$$
$$L_{3d}F + L_{2d}\Psi + L_{2e}\mathrm{X} + L_{2f}\Omega = 0, \tag{10}$$

где

$$L_{4a} = a_{22}\frac{\partial^4}{\partial x^4} - 2a_{26}\frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + (2a_{12} + a_{66})\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} - 2a_{16}\frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + a_{11}\frac{\partial^4}{\partial y^4},$$

$$L_{3a} = -a_{24}\frac{\partial^3}{\partial x^3} + (a_{25} + a_{46})\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} - (a_{14} + a_{56})\frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + a_{15}\frac{\partial^3}{\partial y^3},$$

$$L_{2a} = a_{44}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2a_{45}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + a_{55}\frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

$$L_{3b} = -b_{22}\frac{\partial^3}{\partial x^3} + (b_{12} + b_{26})\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} - (b_{21} + b_{16})\frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + b_{11}\frac{\partial^3}{\partial y^3},$$

$$L_{2b} = b_{24}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - (b_{14} + b_{25})\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + b_{15}\frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

$$L_{3d} = -d_{22}\frac{\partial^3}{\partial x^3} + (d_{12} + d_{26})\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} - (d_{21} + d_{16})\frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + d_{11}\frac{\partial^3}{\partial y^3},$$

$$L_{2d} = d_{24}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - (d_{14} + d_{25})\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + d_{15}\frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

$$L_{2c} = -c_{22}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2c_{12}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} - c_{11}\frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

$$L_{2e} = -e_{22}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2e_{12}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} - e_{11}\frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

$$L_{2f} = -f_{22}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2f_{12}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} - f_{11}\frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Решая систему (10), получаем

$$F(x,y) = 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{5} F_k(z_k), \qquad \Psi(x,y) = 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{5} \Psi_k(z_k),$$

$$\mathrm{X}(x,y) = 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{5} \mathrm{X}_k(z_k), \qquad \Omega(x,y) = 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{5} \Omega_k(z_k). \tag{11}$$

Здесь $F_k(z_k)$, $\Psi_k(z_k)$, $\mathrm{X}_k(z_k)$, $\Omega_k(z_k)$ – произвольные аналитические функции обобщенных комплексных переменных

$$z_k = x + \mu_k y = x_k + i y_k, \tag{12}$$

$\mu_k = \alpha_k + i\beta_k$, $\beta_k > 0$, – корни характеристического уравнения

$$\begin{Vmatrix} \ell_{4a}(\mu) & \ell_{3a}(\mu) & \ell_{3b}(\mu) & \ell_{3d}(\mu) \\ \ell_{3a}(\mu) & \ell_{2a}(\mu) & \ell_{2b}(\mu) & \ell_{2d}(\mu) \\ \ell_{3b}(\mu) & \ell_{2b}(\mu) & \ell_{2c}(\mu) & \ell_{2e}(\mu) \\ \ell_{3d}(\mu) & \ell_{2d}(\mu) & \ell_{2e}(\mu) & \ell_{2f}(\mu) \end{Vmatrix} = 0, \tag{13}$$

где

$$\ell_{4a}(\mu) = a_{11}\mu^4 - 2a_{16}\mu^3 + (2a_{12} + a_{66})\mu^2 - 2a_{26}\mu + a_{22},$$

$$\ell_{3a}(\mu) = a_{15}\mu^3 - (a_{14} + a_{56})\mu^2 + (a_{25} + a_{46})\mu - a_{24},$$

$$\ell_{2a}(\mu) = a_{55}\mu^2 - 2a_{45}\mu + a_{44},$$

$$\ell_{2b}(\mu) = b_{15}\mu^2 - (b_{14} + b_{25})\mu + b_{24},$$

$$\ell_{3b}(\mu) = b_{11}\mu^3 - (b_{21} + b_{16})\mu^2 + (b_{12} + b_{26})\mu - b_{22},$$

$$\ell_{2c}(\mu) = -c_{11}\mu^2 + 2c_{12}\mu - c_{22},$$

$$\ell_{3d}(\mu) = d_{11}\mu^3 - (d_{21} + d_{16})\mu^2 + (d_{12} + d_{26})\mu - d_{22},$$

$$\ell_{2d}(\mu) = d_{15}\mu^2 - (d_{14} + d_{25})\mu + d_{24},$$

$$\ell_{2e}(\mu) = -e_{11}\mu^2 + 2e_{12}\mu - e_{22},$$

$$\ell_{2f}(\mu) = -f_{11}\mu^2 + 2f_{12}\mu - f_{22}.$$

Так как функции $F_k(z_k)$, $\Psi_k(z_k)$, $\mathrm{X}_k(z_k)$, $\Omega_k(z_k)$ должны удовлетворять первоначальной системе уравнений (10), то легко понять, что между ними существуют связи вида

$$\Psi_k(z_k) = \lambda_k F_k'(z_k), \qquad \mathrm{X}_k(z_k) = \nu_k F_k'(z_k), \qquad \Omega_k(z_k) = \rho_k F_k'(z_k), \tag{14}$$

где λ_k, ν_k, ρ_k – постоянные. Подставляя выражения (14) в уравнения системы (10) и учитывая (11), получаем

$$\ell_{4a} + \lambda_k \ell_{3a} + \nu_k \ell_{3b} + \rho_k \ell_{3d} = 0,$$

$$\ell_{3a} + \lambda_k \ell_{2a} + \nu_k \ell_{2b} + \rho_k \ell_{2d} = 0,$$

$$\ell_{3b} + \lambda_k \ell_{2b} + \nu_k \ell_{2c} + \rho_k \ell_{2e} = 0\,,$$

$$\ell_{3d} + \lambda_k \ell_{2d} + \nu_k \ell_{2e} + \rho_k \ell_{2f} = 0, \qquad k = 1,\dots,5\,. \tag{15}$$

Из второго, третьего и четвертого уравнений системы (15) находим

$$\lambda_k = \frac{\Delta_{1k}}{\Delta_{0k}}, \qquad \nu_k = \frac{\Delta_{2k}}{\Delta_{0k}}, \qquad \rho_k = \frac{\Delta_{3k}}{\Delta_{0k}}, \qquad k = 1,\dots,5\,, \tag{16}$$

где

$$\Delta_{0k} = \begin{Vmatrix} \ell_{2a}(\mu_k) & \ell_{2b}(\mu_k) & \ell_{2d}(\mu_k) \\ \ell_{2b}(\mu_k) & \ell_{2c}(\mu_k) & \ell_{2e}(\mu_k) \\ \ell_{2d}(\mu_k) & \ell_{2e}(\mu_k) & \ell_{2f}(\mu_k) \end{Vmatrix}, \qquad \Delta_{1k} = \begin{Vmatrix} -\ell_{3a}(\mu_k) & \ell_{2b}(\mu_k) & \ell_{2d}(\mu_k) \\ -\ell_{3b}(\mu_k) & \ell_{2c}(\mu_k) & \ell_{2e}(\mu_k) \\ -\ell_{3d}(\mu_k) & \ell_{2e}(\mu_k) & \ell_{2f}(\mu_k) \end{Vmatrix},$$

$$\Delta_{2k} = \begin{Vmatrix} \ell_{2a}(\mu_k) & -\ell_{3a}(\mu_k) & \ell_{2d}(\mu_k) \\ \ell_{2b}(\mu_k) & -\ell_{3b}(\mu_k) & \ell_{2e}(\mu_k) \\ \ell_{2d}(\mu_k) & -\ell_{3d}(\mu_k) & \ell_{2f}(\mu_k) \end{Vmatrix}, \qquad \Delta_{3k} = \begin{Vmatrix} \ell_{2a}(\mu_k) & \ell_{2b}(\mu_k) & -\ell_{3a}(\mu_k) \\ \ell_{2b}(\mu_k) & \ell_{2c}(\mu_k) & -\ell_{3b}(\mu_k) \\ \ell_{2d}(\mu_k) & \ell_{2e}(\mu_k) & -\ell_{3d}(\mu_k) \end{Vmatrix}.$$

Подставив (16) в первое из уравнений системы (15), получим

$$\ell_{4a}\Delta_{0k} + \ell_{3a}\Delta_{1k} + \ell_{3b}\Delta_{2k} + \ell_{3d}\Delta_{3k} = 0\,.$$

Последнее соотношение на основе (13) удовлетворяется тождественно.

При рассмотрении частных случаев анизотропии (когда двумерная задача распадается на задачи о плоской и антиплоской деформациях) использование λ_5, вычисленного по формуле (16), приводит к некоторым неудобствам. Поэтому, по аналогии с выводами С. Г. Лехницкого [10] для двумерной задачи теории упругости, λ_5 будем определять, решая систему, состоящую из первого и третьего уравнений (15). Тогда

$$\lambda_5 = -\frac{\Delta_5}{\Delta_6}, \tag{17}$$

где

$$\Delta_5 = \begin{Vmatrix} \ell_{4a}(\mu_5) & \ell_{3b}(\mu_5) & \ell_{3d}(\mu_5) \\ \ell_{3b}(\mu_5) & \ell_{2c}(\mu_5) & \ell_{2e}(\mu_5) \\ \ell_{3d}(\mu_5) & \ell_{2e}(\mu_5) & \ell_{2f}(\mu_5) \end{Vmatrix}, \qquad \Delta_6 = \begin{Vmatrix} \ell_{3a}(\mu_5) & \ell_{3b}(\mu_5) & \ell_{3d}(\mu_5) \\ \ell_{2b}(\mu_5) & \ell_{2c}(\mu_5) & \ell_{2e}(\mu_5) \\ \ell_{2d}(\mu_5) & \ell_{2e}(\mu_5) & \ell_{2f}(\mu_5) \end{Vmatrix}.$$

Для практических целей [5–8, 10, 16] удобнее иметь дело с величиной, обратной (17). Переобозначая новую величину опять через λ_5, для нее будем иметь

$$\lambda_5 = -\frac{\Delta_6}{\Delta_5}. \tag{18}$$

В связи с указанным в дальнейшем под λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, ν_k, ρ_k, $k = 1,\dots,5$, понимаются величины (16), под λ_5 – величина (18).

Принимая во внимание выражения (14), будем иметь

$$F(x,y) = 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{5} F_k(z_k), \qquad \Psi(x,y) = 2\,\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{4}\lambda_j F_j'(z_j) + \frac{1}{\lambda_5}F_5'(z_5)\,,$$

$$\mathrm{X}(x,y) = 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{5}\nu_k F_k'(z_k), \qquad \Omega(x,y) = 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{5}\rho_k F_k'(z_k)\,. \tag{19}$$

Подставив функции (19) в равенства (9), получим

$$(\sigma_x,\, \sigma_y,\, \tau_{yz},\, \tau_{xz},\, \tau_{xy}) = 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{5}(\lambda_{1k},\, \lambda_{2k},\, \lambda_{4k},\, \lambda_{5k},\, \lambda_{6k})\,\Phi_k'(z_k)\,, \tag{20}$$

$$(u,\,v,\,w,\,\varphi,\,\psi)=2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{5}\bigl(p_k,\,q_k,\,s_k^0,\,r_k^0,\,h_k^0\bigr)\,\Phi_k(z_k)+$$
$$+\,(-\,\omega_3 y+u_0,\ \omega_3 x+v_0,\,w_0,\,\varphi_0,\,\psi_0)\,, \tag{21}$$

$$(D_x,\,D_y)=2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{5}(\lambda_{7k},\,\lambda_{8k})\,\Phi_k'(z_k)\,, \tag{22}$$

$$(E_x,\,E_y)=-\,2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{5}\bigl(r_k^0,\,\mu_k r_k^0\bigr)\,\Phi_k'(z_k)\,, \tag{23}$$

$$(B_x,\,B_y)=2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{5}(\lambda_{9k},\,\lambda_{10k})\,\Phi_k'(z_k)\,, \tag{24}$$

$$(H_x,\,H_y)=-\,2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{5}\bigl(h_k^0,\,\mu_k h_k^0\bigr)\,\Phi_k'(z_k)\,. \tag{25}$$

Здесь

$$\lambda_{1j}=\mu_j^2,\qquad \lambda_{2j}=1,\qquad \lambda_{4j}=-\,\lambda_j,\qquad \lambda_{5j}=\lambda_j\mu_j,\qquad \lambda_{6j}=-\,\mu_j,$$
$$\lambda_{7j}=\nu_j\mu_j,\qquad \lambda_{8j}=-\,\nu_j,\qquad \lambda_{9j}=\rho_j\mu_j,\qquad \lambda_{10j}=-\,\rho_j,\qquad \lambda_{15}=\lambda_5\mu_5^2,$$
$$\lambda_{25}=\lambda_5,\qquad \lambda_{45}=-\,1,\qquad \lambda_{55}=\mu_5,\qquad \lambda_{65}=-\,\lambda_5\mu_5,\qquad \lambda_{75}=\lambda_5\nu_5\mu_5,$$
$$\lambda_{85}=-\,\lambda_5\nu_5,\qquad \lambda_{95}=\lambda_5\rho_5\mu_5,\qquad \lambda_{105}=-\,\lambda_5\rho_5,$$
$$p_j=a_{11}\mu_j^2-a_{16}\mu_j+a_{12}+(a_{15}\mu_j-a_{14})\lambda_j+(b_{11}\mu_j-b_{21})\nu_j,\qquad j=1,\dots,4\,,$$
$$q_j=a_{12}\mu_j-a_{26}+\frac{a_{22}}{\mu_j}+\left(a_{25}-\frac{a_{24}}{\mu_j}\right)\lambda_j+\left(b_{12}-\frac{b_{22}}{\mu_j}\right)\nu_j+\left(d_{12}-\frac{d_{22}}{\mu_j}\right)\rho_j\,,$$
$$s_j^0=a_{14}\mu_j-a_{46}+\frac{a_{24}}{\mu_j}+\left(a_{45}-\frac{a_{44}}{\mu_j}\right)\lambda_j+\left(b_{14}-\frac{b_{24}}{\mu_j}\right)\nu_j+\left(d_{14}-\frac{d_{24}}{\mu_j}\right)\rho_j\,,$$
$$r_j^0=b_{11}\mu_j^2-b_{16}\mu_j+b_{12}+(b_{15}\mu_j-b_{14})\,\lambda_j-(c_{11}\mu_j-c_{12})\,\nu_j-(e_{11}\mu_j-e_{12})\,\rho_j\,,$$
$$h_j^0=d_{11}\mu_j^2-d_{16}\mu_j+d_{12}+(d_{15}\mu_j-d_{14})\lambda_j-(e_{11}\mu_j-e_{12})\nu_j-(f_{11}\mu_j-f_{12})\rho_j\,,$$
$$p_5=(a_{11}\mu_5^2-a_{16}\mu_5+a_{12})\,\lambda_5+a_{15}\mu_5-a_{14}+(b_{11}\mu_5-b_{21})\,\lambda_5\nu_5+$$
$$+\,(d_{11}\mu_5-d_{21})\,\lambda_5\rho_5\,,$$
$$q_5=\left(a_{12}\mu_5-a_{26}+\frac{a_{22}}{\mu_5}\right)\lambda_5+a_{25}-\frac{a_{24}}{\mu_5}+\left(b_{12}-\frac{b_{22}}{\mu_5}\right)\lambda_5\nu_5+$$
$$+\left(d_{12}-\frac{d_{22}}{\mu_5}\right)\lambda_5\rho_5\,,$$
$$s_5^0=\left(a_{14}\mu_5-a_{46}+\frac{a_{24}}{\mu_5}\right)\lambda_5+a_{45}-\frac{a_{44}}{\mu_5}+\left(b_{14}-\frac{b_{24}}{\mu_5}\right)\lambda_5\nu_5+$$
$$+\left(d_{14}-d\,\frac{b_{24}}{\mu_5}\right)\lambda_5\rho_5\,,$$
$$r_5^0=(b_{11}\mu_5^2-b_{16}\mu_5+b_{12})\,\lambda_5+b_{15}\mu_5-b_{14}-(c_{11}\mu_5-c_{12})\,\lambda_5\nu_5-$$
$$-\,(e_{11}\mu_5-e_{12})\,\lambda_5\rho_5\,,$$
$$h_5^0=(d_{11}\mu_5^2-d_{16}\mu_5+d_{12})\,\lambda_5+d_{15}\mu_5-d_{14}-(e_{11}\mu_5-e_{12})\,\lambda_5\nu_5-$$
$$-\,(f_{11}\mu_5-f_{12})\,\lambda_5\rho_5\,,$$
$$\Phi_j(z_j)=F_j'(z_j),\qquad j=1,\dots,4,\qquad\qquad \Phi_5(z_5)=\frac{1}{\lambda_5}\,F_5'(z_5)\,,$$

$-\,\omega_3 y+u_0$, $\omega_3 x+v_0$, w_0 – жесткие перемещения тела как целого; φ_0, ψ_0 – нулевой уровень потенциалов электростатического и магнитного полей.

Таким же образом, как это сделано в [5–8, 16], находим, что комплексные потенциалы $\Phi_k(z_k)$ определены в областях S_k, получаемых из заданной области S аффинными преобразованиями (12), и могут быть представлены в виде

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{\ell=1}^{\mathcal{L}} A_{k\ell} \ln(z_k - z_{k\ell}) + \sum_{j=1}^{J} A_{kj}^0 \ln(z_k - z_{kj}^0) + \Phi_{k0}(z_k), \qquad (26)$$

где Γ_k – постоянные, равные нулю в случае конечной области S и определяемые для бесконечной области из систем

$$2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{5}(\lambda_{1k},\lambda_{2k},\lambda_{4k},\lambda_{5k},\lambda_{6k},\lambda_{7k},\lambda_{8k},\lambda_{9k},\lambda_{10k},q_k-\mu_k p_k)\Gamma_k =$$
$$=(\sigma_x^\infty,\sigma_y^\infty,\tau_{yz}^\infty,\tau_{xz}^\infty,\tau_{xy}^\infty,D_x^\infty,D_y^\infty,B_x^\infty,B_y^\infty,2\omega_3^\infty), \qquad (27)$$

если на бесконечности заданы механические усилия и индукции, или

$$2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{5}(\lambda_{1k},\lambda_{2k},\lambda_{4k},\lambda_{5k},\lambda_{6k},-r_k^0,-\mu_k r_k^0,-h_k^0,-\mu_k h_k^0,q_k-\mu_k p_k)\Gamma_k =$$
$$=(\sigma_x^\infty,\sigma_y^\infty,\tau_{yz}^\infty,\tau_{xz}^\infty,\tau_{xy}^\infty,E_x^\infty,E_y^\infty,H_x^\infty,H_y^\infty,2\omega_3^\infty), \qquad (28)$$

когда вместо индукции заданы напряженности электрического и магнитного полей; $A_{k\ell}$ – коэффициенты удовлетворяющие системе

$$2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{5}(\lambda_{6k},\lambda_{2k},\lambda_{4k},\lambda_{8k},\lambda_{10k},p_k,q_k,r_k^0,s_k^0,h_k^0)\,iA_{k\ell} =$$
$$=\left(\frac{X_\ell}{2\pi},\frac{Y_\ell}{2\pi},\frac{Z_\ell}{2\pi},\frac{Q_{э\ell}}{2\pi},\frac{Q_{м\ell}}{2\pi},0,0,0,0,0\right), \qquad (29)$$

X_ℓ, Y_ℓ, Z_ℓ, $Q_{э\ell}$, $Q_{м\ell}$ – компоненты главного вектора внешних усилий и суммарные потоки электрических и магнитных зарядов, действующие на контур L_ℓ; A_{kj}^0 – коэффициенты, удовлетворяющие системе, получаемой из (29) заменой A_{kj}, X_ℓ, Y_ℓ, Z_ℓ, $Q_{э\ell}$, $Q_{м\ell}$ на A_{kj}^0, X_ℓ^0, Y_ℓ^0, Z_ℓ^0, $Q_{э\ell}^0$, $Q_{м\ell}^0$ соответственно; X_ℓ^0, Y_ℓ^0, Z_ℓ^0, $Q_{э\ell}^0$, $Q_{м\ell}^0$ – компоненты сосредоточенной силы и сосредоточенных электрических и магнитных зарядов, действующих по линиям, соответствующим в поперечном сечении внутренней точке z_j^0 области S; $\Phi_{k0}(z_k)$ – функции, голоморфные в многосвязных областях S_k, включая и точки z_{kj}^0, соответствующие z_j^0 при указанных аффинных преобразованиях.

Граничные условия для определения комплексных потенциалов следуют из соответствующих граничных условий, в частности, из условий (6). Таким же образом, как это сделано в работах [5–8, 16], для определения $\Phi_k(z_k)$ получаем следующие граничные условия:

$$2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{5} g_{ki}^0 \Phi_k(t_k) = F_i(t), \qquad i = 1,\ldots,5, \qquad (30)$$

где в случае задания на границе механических усилий

$$(g_{k1}^0, g_{k2}^0, g_{k5}^0) = (\lambda_{6k}, \lambda_{2k}, \lambda_{4k}),$$

$$(F_1, F_2, F_5) = \mp\int_0^s (X_n, Y_n, Z_n)\,ds + (c_1, c_2, c_5),$$

а при задании перемещений

$$(g_{k1}^0, g_{k2}^0, g_{k5}^0) = (p_k, q_k, s_k^0)\,,$$

$$(F_1, F_2, F_5) = (u^* + \omega_3 y - u_0, v^* - \omega_3 x - v_0, w^* - w_0)\,;$$

для электрических и магнитных граничных условий ($i = 3,4$) в (30)

$$g_{k3}^0 = \lambda_{8k}, \qquad F_3 = \mp\int_0^s D_n\, ds + c_3\,,$$

$$g_{k4}^0 = \lambda_{10k}, \qquad F_4 = \mp\int_0^s B_n\, ds + c_4\,,$$

если на границе заданы индукции, и

$$g_{k3}^0 = r_k^0, \qquad F_3 = \varphi^*(z) + c_3\,,$$

$$g_{k4}^0 = h_k^0, \qquad F_4 = \psi^*(z) + c_4$$

в случае задания на границе потенциалов.

3. Решение задачи для тела с эллиптическим отверстием. Рассмотрим бесконечное тело с эллиптическим отверстием, которому в поперечном сечении соответствует эллипс L с полуосями a и b соответственно вдоль осей координат Ox и Oy (рис. 1). На бесконечности задано однородное электромагнитоупругое состояние, характеризуемое величинами σ_x^∞, σ_y^∞, τ_{yz}^∞, τ_{xz}^∞, τ_{xy}^∞, D_x^∞, D_y^∞ (или E_x^∞, E_y^∞), B_x^∞, B_y^∞ (или H_x^∞, H_y^∞), $\omega_3^\infty = 0$; на контуре отверстия механические усилия, электрические и магнитные воздействия отсутствуют. В рассматриваемом случае комплексные потенциалы (26) имеют вид

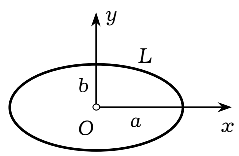

Рис. 1

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \Phi_{k0}(z_k)\,, \tag{31}$$

где Γ_k – постоянные, определяемые из системы (27) или (28); $\Phi_{k0}(z_k)$ – функции, голоморфные вне эллипсов L_k, получаемых из L аффинными преобразованиями (12).

Отобразим конформно внешность единичной окружности $|\zeta_k| \ge 1$ на внешность эллипсов L_k [8]:

$$z_k = R_k\left(\zeta_k + \frac{m_k}{\zeta_k}\right).$$

Здесь

$$R_k = \frac{1}{2}(a - i\mu_k b), \qquad m_k = \frac{a + i\mu_k b}{a - i\mu_k b}.$$

Подставляя выражение (31) в граничные условия (30) и используя метод рядов, получаем

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \left(a_{k1} - \Gamma_k R_k m_k\right)\frac{1}{\zeta_k}\,,$$

$$a_{k1} = -\,\bar r_k \bar R_k \bar\Gamma_k - \bar s_{k+1}\bar R_{k+1}\bar\Gamma_{k+1} - \bar e_{k+2}\bar R_{k+2}\bar\Gamma_{k+2} - $$
$$- \,\bar n_{k+3}\bar R_{k+3}\bar\Gamma_{k+3} - \bar m_{k+4}\bar R_{k+4}\bar\Gamma_{k+4}\,,$$

где

$$\bar s_{k+1} = \left[\,\bar\lambda_{6,k+1}M_{6k} + \bar\lambda_{2,k+1}M_{2k} + \bar\lambda_{8,k+1}M_{8k} + \bar\lambda_{4,k+1}M_{4k} + \bar\lambda_{10,k+1}M_{10k}\right]\frac{\mathbf{1}}{\Delta_k}\,,$$

$$\bar e_{k+2} = \left[\,\bar\lambda_{6,k+2}M_{6k} + \bar\lambda_{2,k+2}M_{2k} + \bar\lambda_{8,k+2}M_{8k} + \bar\lambda_{4,k+2}M_{4k} + \bar\lambda_{10,k+2}M_{10k}\right]\frac{\mathbf{1}}{\Delta_k}\,,$$

$$\bar{n}_{k+3} = \left[\bar{\lambda}_{6,k+3}M_{6k} + \bar{\lambda}_{2,k+3}M_{2k} + \bar{\lambda}_{8,k+3}M_{8k} + \bar{\lambda}_{4,k+3}M_{4k} + \bar{\lambda}_{10,k+3}M_{10k}\right]\frac{1}{\Delta_k},$$

$$\bar{m}_{k+4} = \left[\bar{\lambda}_{6,k+4}M_{6k} + \bar{\lambda}_{2,k+4}M_{2k} + \bar{\lambda}_{8,k+4}M_{8k} + \bar{\lambda}_{4,k+4}M_{4k} + \bar{\lambda}_{10,k+4}M_{10k}\right]\frac{1}{\Delta_k},$$

$$\bar{r}_k = \left[\bar{\lambda}_{6k}M_{6k} + \bar{\lambda}_{2k}M_{2k} + \bar{\lambda}_{8k}M_{8k} + \bar{\lambda}_{4k}M_{4k} + \bar{\lambda}_{10k}M_{10k}\right]\frac{1}{\Delta_k}, \qquad (32)$$

$$\Delta_{k+1} = -\Delta_k, \qquad \Delta_k = \lambda_{6k}M_{6k} + \lambda_{2k}M_{2k} + \lambda_{8k}M_{8k} + \lambda_{4k}M_{4k} + \lambda_{10k}M_{10k},$$

$$M_{2k} = -\begin{Vmatrix} \lambda_{6,k+1} & \lambda_{6,k+2} & \lambda_{6,k+3} & \lambda_{6,k+4} \\ \lambda_{8,k+1} & \lambda_{8,k+2} & \lambda_{8,k+3} & \lambda_{8,k+4} \\ \lambda_{4,k+1} & \lambda_{4,k+2} & \lambda_{4,k+3} & \lambda_{4,k+4} \\ \lambda_{10,k+1} & \lambda_{10,k+2} & \lambda_{10,k+3} & \lambda_{10,k+4} \end{Vmatrix},$$

$$M_{4k} = -\begin{Vmatrix} \lambda_{6,k+1} & \lambda_{6,k+2} & \lambda_{6,k+3} & \lambda_{6,k+4} \\ \lambda_{2,k+1} & \lambda_{2,k+2} & \lambda_{2,k+3} & \lambda_{2,k+4} \\ \lambda_{8,k+1} & \lambda_{8,k+2} & \lambda_{8,k+3} & \lambda_{8,k+4} \\ \lambda_{10,k+1} & \lambda_{10,k+2} & \lambda_{10,k+3} & \lambda_{10,k+4} \end{Vmatrix},$$

$$M_{6k} = \begin{Vmatrix} \lambda_{2,k+1} & \lambda_{2,k+2} & \lambda_{2,k+3} & \lambda_{2,k+4} \\ \lambda_{8,k+1} & \lambda_{8,k+2} & \lambda_{8,k+3} & \lambda_{8,k+4} \\ \lambda_{4,k+1} & \lambda_{4,k+2} & \lambda_{4,k+3} & \lambda_{4,k+4} \\ \lambda_{10,k+1} & \lambda_{10,k+2} & \lambda_{10,k+3} & \lambda_{10,k+4} \end{Vmatrix},$$

$$M_{8k} = \begin{Vmatrix} \lambda_{6,k+1} & \lambda_{6,k+2} & \lambda_{6,k+3} & \lambda_{6,k+4} \\ \lambda_{2,k+1} & \lambda_{2,k+2} & \lambda_{2,k+3} & \lambda_{2,k+4} \\ \lambda_{4,k+1} & \lambda_{4,k+2} & \lambda_{4,k+3} & \lambda_{4,k+4} \\ \lambda_{10,k+1} & \lambda_{10,k+2} & \lambda_{10,k+3} & \lambda_{10,k+4} \end{Vmatrix},$$

$$M_{10k} = \begin{Vmatrix} \lambda_{6,k+1} & \lambda_{6,k+2} & \lambda_{6,k+3} & \lambda_{6,k+4} \\ \lambda_{2,k+1} & \lambda_{2,k+2} & \lambda_{2,k+3} & \lambda_{2,k+4} \\ \lambda_{8,k+1} & \lambda_{8,k+2} & \lambda_{8,k+3} & \lambda_{8,k+4} \\ \lambda_{4,k+1} & \lambda_{4,k+2} & \lambda_{4,k+3} & \lambda_{4,k+4} \end{Vmatrix},$$

k − индекс, принимающий значения 1, 2, 3, 4, 5, причем значение индекса $k+j$, когда он больше 5, формально полагается равным $k+j-5$.

Переходя к переменной z_k и дифференцируя полученную функцию, будем иметь

$$\Phi_k'(z_k) = \pm\frac{d_{k1}z_k}{\sqrt{z_k^2 - 4R_k^2 m_k}} - d_{k1} + \Gamma_k, \qquad d_{k1} = \frac{\Gamma_k R_k m_k - a_{k1}}{2R_k m_k}.$$

Если полуось $b = 0$ (тело с трещиной длины $2a$), то $m_k = 1$, $R_k = a/2$. Вблизи концов разреза $z_k = \pm(a + z_k^*)$, где z_k^* − малая величина. Тогда

$$\Phi_k'(z_k) = \pm\frac{M_k}{2\sqrt{2z_k^*}} + O(1), \qquad (33)$$

$$M_k = \left(\Gamma_k + \bar{r}_k\bar{\Gamma}_k + \bar{s}_{k+1}\bar{\Gamma}_{k+1} + \bar{e}_{k+2}\bar{\Gamma}_{k+2} + \bar{n}_{k+3}\bar{\Gamma}_{k+3} + \bar{m}_{k+4}\bar{\Gamma}_{k+4}\right)\sqrt{a},$$

$O(1)$ − ограниченная величина.

Подставляя (32) в (31) и собирая в полученном выражении комбинации Γ_k в соответствии с формулами (27) или (28), будем иметь

$$M_k = \left[M_{2k}\sigma_y^\infty + M_{6k}\tau_{xy}^\infty + M_{4k}\tau_{yz}^\infty + M_{8k}D_y^\infty + M_{10k}B_y^\infty\right]\sqrt{a}\,\frac{1}{\Delta_k}.$$

Аналогичным образом находим

$$M_k^{EH} = \left[M_{2k}^{EH}\sigma_y^\infty + M_{6k}^{EH}\tau_{xy}^\infty + M_{4k}^{EH}\tau_{yz}^\infty + M_{8k}^{EH}D_y^\infty + M_{10k}^{EH}B_y^\infty\right]\sqrt{a}\,\frac{1}{\Delta_k}.$$

Заменяя $\sigma_y^\infty\sqrt{a}$, $\tau_{xy}^\infty\sqrt{a}$, $\tau_{yz}^\infty\sqrt{a}$, $D_y^\infty\sqrt{a}$, $E_y^\infty\sqrt{a}$, $B_y^\infty\sqrt{a}$, $H_y^\infty\sqrt{a}$ на коэффициенты интенсивности нормального отрыва k_1, касательного сдвига k_2, продольного сдвига k_3, электрической k_D и магнитной k_B индукций, электрической k_E и магнитной k_H напряженностей, получаем

$$M_k = \left[M_{2k}k_1 + M_{6k}k_2 + M_{4k}k_3 + M_{8k}k_D + M_{10k}k_B\right]\frac{1}{\Delta_k},$$

$$M_k^{EH} = \left[M_{2k}^{EH}k_1 + M_{6k}^{EH}k_2 + M_{4k}^{EH}k_3 + M_{8k}^{EH}k_E + M_{10k}^{EH}k_H\right]\frac{1}{\Delta_k^{EH}}.$$

Исходя из формул (20)–(25), (33), для основных характеристик электромагнитоупругого состояния вблизи концов разреза находим

$$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}) = \frac{1}{\sqrt{2r}}\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{5}(\lambda_{1k}, \lambda_{2k}, \lambda_{4k}, \lambda_{5k}, \lambda_{6k})\frac{M_k}{\sqrt{\cos\theta + \mu_k\sin\theta}},$$

$$(D_x, D_y) = \frac{1}{\sqrt{2r}}\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{5}(\lambda_{7k}, \lambda_{8k})\frac{M_k}{\sqrt{\cos\theta + \mu_k\sin\theta}},$$

$$(E_x, E_y) = \frac{1}{\sqrt{2r}}\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{5}(-r_k^0,\ -\mu_k r_k^0)\frac{M_k^{EH}}{\sqrt{\cos\theta + \mu_k\sin\theta}},$$

$$(B_x, B_y) = \frac{1}{\sqrt{2r}}\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{5}(\lambda_{9k}, \lambda_{10k})\frac{M_k}{\sqrt{\cos\theta + \mu_k\sin\theta}},$$

$$(H_x, H_y) = \frac{1}{\sqrt{2r}}\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{5}(-h_k^0,\ -\mu_k h_k^0)\frac{M_k^{EH}}{\sqrt{\cos\theta + \mu_k\sin\theta}},$$

$$(u, v, w, \varphi, \psi) = \sqrt{2r}\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{5}(p_k, q_k, s_k^0, r_k^0, h_k^0)M_k\sqrt{\cos\theta + \mu_k\sin\theta}.$$

В этом случае имеют место равенства

$$(k_1, k_2, k_3) = 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{5}(\lambda_{2k}, \lambda_{6k}, \lambda_{4k})M_k = \sqrt{a}(\sigma_y^\infty, \tau_{xy}^\infty, \tau_{yz}^\infty),$$

$$k_D = \mathrm{Re}\sum_{k=1}^{5}\lambda_{8k}M_k = \sqrt{a}\,D_y^\infty, \qquad k_E = -\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{5}r_k M_k^{EH} = \sqrt{a}\,E_y^\infty,$$

$$k_B = \mathrm{Re}\sum_{k=1}^{5}\lambda_{10k}M_k = \sqrt{a}\,B_y^\infty, \qquad k_H = -\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{5}h_k M_k^{EH} = \sqrt{a}\,H_y^\infty.$$

Для пластинки с круговым отверстием при ее одностороннем растяжении или действии однородного электрического поля с заданной напряженностью были проведены численные исследования распределения напряжений, напряженности и индукции. В качестве материала пластинки рассматривался поляризованный в направлении оси Oy сплав $BaTiO_3 - CoFe_2O_4$, для которого [17]

$c_{11}^{EH} = 2.26\alpha$, $c_{22}^{EH} = 2.16\alpha$, $c_{33}^{EH} = 2.26\alpha$, $c_{44}^{EH} = 0.44\alpha$,

$c_{55}^{EH} = 0.55\alpha$, $c_{66}^{EH} = 0.44\alpha$, $c_{12}^{EH} = 1.24\alpha$, $c_{13}^{EH} = 1.25\alpha$,

$c_{23}^{EH} = 1.25\alpha$, $e_{16}^{\varepsilon,E} = 5.8\beta$, $e_{12}^{\varepsilon,E} = -2.2\beta$, $e_{22}^{\varepsilon,E} = 9.3\beta$,

$e_{32}^{\varepsilon,E} = -2.2\beta$, $e_{34}^{\varepsilon,E} = 5.8\beta$, $f_{16}^{\varepsilon,H} = 275\gamma$, $f_{12}^{\varepsilon,H} = 290.2\gamma$,

$f_{22}^{\varepsilon,H} = 350\gamma$, $f_{32}^{\varepsilon,H} = 290.2\gamma$, $f_{34}^{\varepsilon,H} = 275\gamma$; $\varepsilon_{11}^{\varepsilon} = 5.64\delta$,

$\varepsilon_{22}^{\varepsilon} = 6.35\delta$, $\varepsilon_{33}^{\varepsilon} = 5.64\delta$, $\mu_{11}^{\varepsilon} = 2.97\lambda$, $\mu_{22}^{\varepsilon} = 0.835\lambda$,

$\mu_{33}^{\varepsilon} = 2.97\lambda$, $\beta_{11}^{\varepsilon} = 5.367\xi$, $\beta_{22}^{\varepsilon} = 2737.5\xi$, $\beta_{33}^{\varepsilon} = 5.367\xi$,

$\alpha = 10^3$ МПа, $\beta = 1$ Кл/м^2, $\gamma = 1$ Вб/м^2, $\delta = 10^{-9}$ Кл/(Нм^2),

$\lambda = 10^{-4}$ Г/м, $\xi = 10^{-12}$ Нс/(ВКл).

Для нахождения по этим постоянным коэффициентов уравнений состояния (4) использовались формулы пересчета [5].

Численные исследования были проведены для 4 случаев: когда решались задача теории упругости (в уравнениях состояния отбрасывались «электромагнитные постоянные» с соответствующими изменениями в других уравнениях), электроупругости (отбрасывались «магнитные постоянные»), магнитоупругости (отбрасывались «электрические постоянные») и электромагнитоупругости (в уравнениях состояния сохранялись все постоянные). Результаты этих исследований показывают, что при действии механических сил в пластинке возникают не только напряжения, но и электромагнитное поле (хотя и незначительной напряженности), чего нельзя не учитывать при исследовании электромагнитоупругого состояния. При действии поля постоянной напряженности возникающие напряжения значительны и их нельзя не учитывать при исследованиях электромагнитоупругого состояния. Последние напряжения можно найти, решая только общую задачу электромагнитоупругости, что и дано в настоящей работе.

1. *Бурак Я. Й., Гачкевич А. Р., Терлецкий Р. Ф.* Термомеханіка багатокомпонентних тіл низької електропровідності. – Львів: СПОЛОМ, 2006. – 296 с. – (Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл: В 5 т. – Т. 1).
2. *Гачкевич А. Р.* Термомеханика электропроводных тел при воздействии квазиустановившихся электромагнитных полей. – Киев: Наук. думка, 1992. – 192 с.
3. *Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А.* Электроупругость. – Киев: Наук. думка, 1989. – 280 с. – (Механика связных полей в элементах конструкций: В 5 т. – Т. 5.)
4. *Желудев И. С.* Физика кристаллических диэлектриков. – Москва: Наука, 1968. – 463 с.
5. *Калоеров С. А, Баева А. И., Бороненко О. И.* Двумерные задачи электро- и магнитоупругости для многосвязных сред. – Донецк: Юго-Восток, 2007. – 270 с.
6. *Калоеров С. А., Бороненко О. И.* Двумерная задача магнитоупругости для многосвязного пьезомагнитного тела // Прикл. механика. – 2005. – **41**, № 10. – С. 64–74.
7. *Калоеров С. А., Бороненко О. И.* Двумерная и плоская задачи для пьезомагнитного тела с отверстиями и трещинами // Теорет. и прикл. механика. – 2005. – Вып. 41. – С. 111–123.
8. *Калоеров С. А., Горянская Е. С.* Двумерное напряженно-деформированное состояние многосвязного анизотропного тела // Концентрация напряжений. – Киев: А.С.К., 1998. – С. 10–26. – (Механика композитов: В 12 т. – Т. 7).
9. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. – Москва: Наука, 1982. – 621 с.

10. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. – Москва: Наука, 1977. – 416 с.
11. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – Москва: Наука, 1966. – 708 с.
12. *Подстригач Я. С., Бурак Я. Й., Кондрат В. Ф.* Магнитотермоупругость электропроводных тел. – Киев: Наук. думка, 1982. – 296 с.
13. *Хорошун Л. П., Маслов Б. П., Ляшенко П. В.* Прогнозирование эффективных пьезоактивных композитных материалов. – Киев: Наук. думка, 1989. – 208 с.
14. *Шульга Н. А.* Эффективные физико-механические свойства мелкослоистых пьезоэлектрических и пьезомагнитных материалов // Сопротивление материалов и теория сооружений. – 1986. – Вып. 48. – С. 43–45.
15. *Berlincourt D. A., Curran D. R., Jaffe H.* Piezoelectric and piezomagnetic materials and their function in transducers // Phys. Acoust. – 1964. – No. 1. – P. 169–270.
16. *Kaloerov S. A., Baeva A. I., Glushchenko Yu. A.* Two-dimensional electroelastic problem for a multiply connected piezoelectric body // Int. Appl. Mech. – 2003. – **39**, No. 1. – P. 77–84.
17. *Zhao M. H., Wang H., Yang F., Liu T.* A magnetoelectroelastic medium with an elliptical cavity under combined mechanical-electric-magnetic loading // Theoret. and Appl. Fract. Mech. – 2006. – **45**. – P. 227–237.

ДВОВИМІРНА ЗАДАЧА ЕЛЕКТРОМАГНІТОПРУЖНОСТІ ДЛЯ БАГАТОЗВ'ЯЗНОГО СЕРЕДОВИЩА

Запропоновано метод розв'язання зв'язаних двовимірних і плоских задач електромагнітопружності для багатозв'язних областей. Отримано основні співвідношення двовимірної та плоскої задач, введено та досліджено комплексні потенціали електромагнітопружності, отримано граничні умови для їх визначення, вирази за їх допомогою головних характеристик електромагнітопружного стану (*напружень, переміщень, векторів напруженості та індукції, потенціалів електричного та магнітного полів*)*. Подано розв'язок задачі для пластини з еліптичною порожниною чи тріщиною.*

TWO-DIMENSIONAL PROBLEM OF MAGNETOELECTROELASTICITY FOR A MULTI-CONNECTED BODY

A method for solution of connected two-dimensional and plane magnetoelectroelasticity problems for multiply-connected domain is proposed. The basic relationships for complex potentials of two-dimensional magnetoelectroelasticity problem, boundary conditions for its determination, expressions for stresses, displacements, electromagnetic field intensity and induction vectors, and potentials of electric and magnetic fields are obtained. A closed solution of the problem is given for the body with one elliptic (*circular*) *hole or a crack.*

Донецкий нац. ун-т, Донецк

Получено
29.03.08