УДК 536.21

Ю. В. Немировский, А. П. Янковский

РЕШЕНИЕ СТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ СЛОИСТЫХ АНИЗОТРОПНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ ПЛАСТИН МЕТОДОМ НАЧАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Сформулирована задача стационарной теплопроводности слоистых пластин постоянной и переменной толщины в пространственной постановке. Методом начальных функций трехмерная задача сведена к двумерной. Для пластин со слоями переменной толщины получена система разрешающих уравнений с переменными коэффициентами. Проанализированы получающиеся двумерные граничные задачи. Для пластин с однородными слоями постоянной толщины построено решение в аналитической форме. Показано, что это решение совпадает с решением по методу разделения переменных.

В современных энергетических установках, изделиях машиностроения и в объектах стройиндустрии широко используются тонкостенные элементы конструкций типа слоистых пластин и оболочек для эффективной теплозащиты или аккумуляции и передачи тепла.

При построении математических методов исследования пространственного стационарного поля температур тонкостенных элементов конструкций исследователи всегда пытались свести решение трехмерной задачи к совокупности решений некоторых более простых двумерных и одномерных задач. Способов понижения размерности решаемых задач разработано такое количество [1, 2], что их детальный анализ далеко выходит за рамки настоящего исследования. При этом, учитывая малый размер в поперечном направлении, авторы разными способами стремятся избавиться от поперечной координаты, сводя проблему к решению краевых задач в плане. Наличие малого геометрического параметра позволяет разыскивать решение трехмерной задачи теплопроводности тонкостенных конструкций асимптотическими методами [4, 5].

Настоящее исследование посвящено разработке метода решения пространственной задачи стационарной теплопроводности слоистых анизотропных пластин постоянной или переменной толщины. Для сведения трехмерной задачи теплопроводности слоистых пластин к более простым двумерным задачам воспользуемся методом начальных функций, нашедшим широкое применение в теории упругости при расчете таких элементов конструкций в пространственной постановке [3].

Рассмотрим пластину, состоящую из M анизотропных неоднородных слоев постоянной или переменной толщины. Свяжем с пластиной прямоугольную декартову систему координат $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ так, чтобы ось $O\bar{x}_3$ была направлена в поперечном направлении пластины, а плоскость $\bar{x}_1\bar{x}_2$ определяла положение точек пластины в плане. Пронумеруем все слои последовательно снизу вверх, т.е. первый слой будет нижним, а M-й слой – верхним. На границах между слоями выполняются условия идеального теплового контакта.

Предполагаем, что одна из главных теплофизических осей анизотропии каждого слоя совпадает с осью $O\bar{x}_3$ и материал слоя однороден в поперечном направлении, т.е.

$$\bar{\lambda}_{13}^{(m)} = \bar{\lambda}_{23}^{(m)} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{x}_3}\bar{\lambda}_{ij}^{(m)} = 0, \qquad i,j = 1,2,3\,. \tag{1}$$

(Такими свойствами будут обладать, например, слои, армированные в плоскостях, параллельных плоскости $\bar{x}_1\bar{x}_2$, при однородном армировании по направлению $O\bar{x}_3$.)

Введем обозначения: $\bar{T}^{(m)}$ – температура m-го слоя; $\bar{w}^{(m)}$ – плотность мощности внутренних источников тепла в m-м слое; $\bar{\lambda}_{ij}^{(m)}$ – коэффициенты теплопроводности материала m-го слоя (в общем случае, функции переменных $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$); $\bar{q}_n^{(\pm)}$ – заданный тепловой поток через верхнюю (+) и нижнюю (−) лицевую поверхности пластины соответственно; $\bar{\alpha}^{(\pm)}$ – коэффициенты конвективного теплообмена с окружающей средой на верхней (+) и нижней (−) сторонах пластины; $\bar{T}_\infty^{(\pm)}$ – температура окружающей среды со стороны верхней (+) и нижней (−) лицевой поверхности; $\bar{T}_\infty$ – температура окружающей среды со стороны торцевой поверхности пластины (кромки); $\bar{q}_n^{(m)}$ – заданный тепловой поток через торцевую поверхность m-го слоя; $\bar{\alpha}^{(m)}$ – коэффициент теплообмена по закону Ньютона между m-м слоем и окружающей средой на торцевой поверхности; $\bar{H}$ – характерная толщина пластины; a – характерный размер пластины в плане; $\bar{T}_*$ – некоторое характерное значение температуры конструкции (например, температура естественного состояния); $\bar{\lambda}_*$ – характерное значение коэффициента теплопроводности материалов слоев пластины (например, максимальная по слоям величина наибольшего из главных значений тензора коэффициентов теплопроводности $\bar{\lambda}_{ij}^{(m)}$); $\bar{q}_i^{(m)}$ – компоненты вектора теплового потока по направлениям $\bar{x}_i$, $i = 1,2,3$, в m-м слое соответственно.

Перейдем к безразмерным переменным, функциям и величинам:

$$x_k = \frac{1}{a}\bar{x}_k, \quad k = 1,2, \quad x_3 = \frac{1}{\bar{H}}\bar{x}_3, \quad q_i^{(m)} = \frac{1}{\bar{\lambda}_*\bar{T}_*}\bar{q}_i^{(m)}a, \quad T^{(m)} = \frac{1}{\bar{T}_*}\bar{T}^{(m)},$$

$$\lambda_{ij}^{(m)} = \frac{1}{\bar{\lambda}_*}\bar{\lambda}_{ij}^{(m)}, \qquad i,j = 1,2,3, \qquad w^{(m)} = \frac{\bar{w}^{(m)}}{\bar{\lambda}_*\bar{T}_*}a^2, \qquad T_\infty^{(\pm)} = \frac{1}{\bar{T}_*}\bar{T}_\infty^{(\pm)},$$

$$q_n^{(\pm)} = \frac{\bar{q}_n^{(\pm)}}{\bar{\lambda}_*\bar{T}_*}a, \qquad \alpha^{(\pm)} = \frac{\bar{\alpha}^{(\pm)}}{\bar{\lambda}_*}a, \qquad T_\infty = \frac{1}{\bar{T}_*}\bar{T}_\infty, \qquad q_n^{(m)} = \frac{\bar{q}_n^{(m)}}{\bar{\lambda}_*\bar{T}_*}a,$$

$$\alpha^{(m)} = \frac{\bar{\alpha}^{(m)}}{\bar{\lambda}_*}a, \qquad \varepsilon = \frac{1}{a}H, \qquad 1 \le m \le M, \tag{2}$$

где ε – малый геометрический параметр, так как предполагается, что $\bar{H} \ll a$.

Стационарная задача теплопроводности слоистой пластины с учетом (1), (2) описывается следующими безразмерными уравнениями и соотношениями:

– *уравнением* теплопроводности m-го слоя

$$\varepsilon\partial_1 q_1^{(m)} + \varepsilon\partial_2 q_2^{(m)} + \partial_3 q_3^{(m)} = \varepsilon w^{(m)}(\mathbf{x}),$$

$$\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\}, \qquad 1 \le m \le M; \tag{3}$$

– *соотношениями* закона теплопроводности Фурье

$$q_i^{(m)} = -\lambda_{i1}^{(m)}\partial_1 T^{(m)} - \lambda_{i2}^{(m)}\partial_2 T^{(m)}, \quad i = 1,2, \quad q_3^{(m)} = -\varepsilon^{-1}\lambda_{33}^{(m)}\partial_3 T^{(m)}; \tag{4}$$

– *условиями сопряжения* решения по тепловому потоку и температуре на поверхностях $x_3 = f_{mn}(x_1, x_2; \varepsilon)$ контакта m-го и $(m+1)$-го слоев

$$\sum_{i=1}^{3} q_i^{(m)} n_i^{(m,n)} = \sum_{i=1}^{3} q_i^{(n)} n_i^{(m,n)}, \qquad T^{(m)}(\mathbf{x}) = T^{(n)}(\mathbf{x}),$$

$$x_3 = f_{mn}(x_1, x_2; \varepsilon), \quad (x_1, x_2) \in G, \qquad n = m+1, \quad 1 \le m \le M-1; \tag{5}$$

– *граничными условиями* общего вида, заданными на лицевых поверхностях $x_3 = f^{(\pm)}(x_1, x_2; \varepsilon)$ пластины,

$$\beta^{(+)}\sum_{i=1}^{3} q_i^{(M)} n_i^{(+)} = \gamma^{(+)} q_n^{(+)} + \delta^{(+)}\alpha^{(+)}\left(T^{(M)} - T_\infty^{(+)}\right), \qquad x_3 = f^{(+)}(x_1, x_2; \varepsilon),$$

$$\beta^{(-)}\sum_{i=1}^{3} q_i^{(1)} n_i^{(-)} = \gamma^{(-)} q_n^{(-)} + \delta^{(-)}\alpha^{(-)}\left(T^{(1)} - T_\infty^{(-)}\right), \qquad x_3 = f^{(-)}(x_1, x_2; \varepsilon),$$

$$(x_1, x_2) \in G; \tag{6}$$

– *граничными условиями*, заданными на торцевой поверхности (кромке) пластины,

$$\beta\sum_{i=1}^{2} q_i^{(m)} n_i = \gamma q_n + \delta\alpha^{(m)}\left(T^{(m)} - T_\infty\right), \qquad (x_1, x_2) \in \Gamma,$$

$$f_{m-1,m}(\Gamma; \varepsilon) \le x_3 \le f_{m,m+1}(\Gamma; \varepsilon), \qquad 1 \le m \le M, \tag{7}$$

где

$$n_i^{(m,n)} = \frac{\partial_i f_{mn}(x_1, x_2; \varepsilon)}{\sqrt{1 + (\partial_1 f_{mn})^2 + (\partial_2 f_{mn})^2}}, \qquad n_3^{(m,n)} = \frac{-1}{\sqrt{1 + (\partial_1 f_{mn})^2 + (\partial_2 f_{mn})^2}},$$

$$n_i^{(\pm)} = \frac{\eta^{(\pm)}\partial_i f^{(\pm)}(x_1, x_2; \varepsilon)}{\sqrt{1 + \left(\partial_1 f^{(\pm)}\right)^2 + \left(\partial_2 f^{(\pm)}\right)^2}}, \qquad n_3^{(\pm)} = \frac{-\eta^{(\pm)}}{\sqrt{1 + \left(\partial_1 f^{(\pm)}\right)^2 + \left(\partial_2 f^{(\pm)}\right)^2}},$$

$$i = 1, 2,$$

$$f_{0,1}(x_1, x_2; \varepsilon) \equiv f^{(-)}(x_1, x_2; \varepsilon), \qquad f_{M,M+1}(x_1, x_2; \varepsilon) \equiv f^{(+)}(x_1, x_2; \varepsilon),$$

$$\partial_k(\cdot) \equiv \frac{1}{\partial x_k}\partial(\cdot), \qquad k = 1, 2, 3, \tag{8}$$

$\eta^{(\pm)}(x_1, x_2) = \pm 1$ – функция переключения, позволяющая задать вектор единичной *внешней* нормали к нижней (−) и верхней (+) лицевым поверхностям; $\beta^{(\pm)}$, $\gamma^{(\pm)}$, $\delta^{(\pm)}$ – функции переключения, позволяющие задавать тот или иной тип граничных условий на лицевых поверхностях; G – область, занимаемая пластиной в плане и ограниченная контуром Γ; n_1, n_2 – компоненты вектора внешней единичной нормали к Γ, $n_1^2 + n_2^2 = 1$, $n_3 = 0$; $\beta(\Gamma)$, $\gamma(\Gamma)$, $\delta(\Gamma)$ – функции переключения, позволяющие задавать тот или иной тип граничных условий на торцевой поверхности.

Как обычно, предполагается, что температура $\bar{T}$ не сильно отличается от значения $\bar{T}_*$ (в противном случае пришлось бы учитывать термочувствительность материалов слоев пластины, что выходит за рамки настоящего исследования). Если считать, что изменению малого параметра ε соответствует изменение характерного значения толщины пластины $\bar{H}$ при фиксированной геометрии конструкции в плане (при фиксированном характерном размере a), то основные функции и величины, приведенные в (2), имеют следующие асимптотические свойства:

$$\lambda_{ij}^{(m)} = O(1), \quad i, j = 1, 2, 3, \quad w^{(m)} = O(1), \quad T_\infty^{(\pm)} = O(1), \quad q^{(\pm)} = O(1),$$

$$\alpha^{(\pm)} = O(1), \quad T_\infty = O(1), \quad q_n^{(m)} = O(1), \quad \alpha^{(m)} = O(1) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0. \tag{9}$$

Далее будем предполагать, что плотность мощности внутренних источников тепла не изменяется по толщине каждого слоя: $\partial_3 w^{(m)} = 0$.

Из равенств (3), (4) следует, что

$$\partial_3 Q^{(m)} = \varepsilon\Lambda_m^2(T^{(m)}) + \varepsilon W^{(m)}, \quad \partial_3 T^{(m)} = -\,\varepsilon Q^{(m)}, \quad 1 \le m \le M, \tag{10}$$

где

$$Q^{(m)}(\mathbf{x}) \equiv \frac{1}{\lambda_{33}^{(m)}} q_3^{(m)}, \qquad W^{(m)}(x_1, x_2) \equiv \frac{1}{\lambda_{33}^{(m)}(x_1, x_2)} w^{(m)}(x_1, x_2),$$

$$\Lambda_m^2(\cdot) \equiv \frac{1}{\lambda_{33}^{(m)}} \sum_{i=1}^{2} \partial_i \left(\lambda_{i1}^{(m)} \partial_1(\cdot) + \lambda_{i2}^{(m)} \partial_2(\cdot) \right). \tag{11}$$

В силу постулата Онзагера $\Lambda_m^2(\cdot)$ − эллиптический оператор по двум пространственным переменным x_1, x_2.

Согласно идее метода начальных функций [3] в качестве основных неизвестных функций выберем $Q^{(m)}$, $T^{(m)}$. Разложим эти функции в ряд Тейлора по переменной x_3 в окрестности некоторой плоскости $x_3 = x_3^{(m)} = \mathrm{const}$:

$$T^{(m)}(\mathbf{x}) = T_0^{(m)}(x_1, x_2) + (x_3 - x_3^{(m)}) \left(\partial_3 T^{(m)} \right)\Big|_{x_3^{(m)}} +$$

$$+ \left(\partial_3^2 T^{(m)} \right)\Big|_{x_3^{(m)}} \frac{1}{2!} (x_3 - x_3^{(m)})^2 + \left(\partial_3^3 T^{(m)} \right)\Big|_{x_3^{(m)}} \frac{1}{3!} (x_3 - x_3^{(m)})^3 + \ldots,$$

$$T_0^{(m)} \equiv T^{(m)}(x_1, x_2, x_3^{(m)}),$$

$$Q^{(m)}(\mathbf{x}) = Q_0^{(m)}(x_1, x_2) + (x_3 - x_3^{(m)}) \left(\partial_3 Q^{(m)} \right)\Big|_{x_3^{(m)}} +$$

$$+ \left(\partial_3^2 Q^{(m)} \right)\Big|_{x_3^{(m)}} \frac{1}{2!} (x_3 - x_3^{(m)})^2 + \left(\partial_3^3 Q^{(m)} \right)\Big|_{x_3^{(m)}} \frac{1}{3!} (x_3 - x_3^{(m)})^3 + \ldots,$$

$$\left(Q_0^{(m)} \equiv Q^{(m)}(x_1, x_2, x_3^{(m)}) \right), \qquad 1 \le m \le M. \tag{12}$$

Умножим (10) на ∂_3, ∂_3^2, ∂_3^3 и т.д. и преобразуем получающиеся равенства с учетом (10), (11):

$$\partial_3^2 Q^{(m)} = -\varepsilon^2 \Lambda_m^2 (Q^{(m)}), \qquad \partial_3^2 T^{(m)} = -\varepsilon^2 \Lambda_m^2 (T^{(m)}) - \varepsilon^2 W^{(m)},$$

$$\partial_3^3 Q^{(m)} = -\varepsilon^3 (\Lambda_m^2)^2 (T^{(m)}) - \varepsilon^3 \Lambda_m^2 (W^{(m)}), \qquad \partial_3^3 T^{(m)} = \varepsilon^3 \Lambda_m^2 (Q^{(m)}),$$

$$\partial_3^4 Q^{(m)} = \varepsilon^4 (\Lambda_m^2)^2 (Q^{(m)}), \qquad \partial_3^4 T^{(m)} = \varepsilon^4 (\Lambda_m^2)^2 (T^{(m)}) + \varepsilon^4 \Lambda_m^2 (W^{(m)}),$$

$$\partial_3^5 Q^{(m)} = \varepsilon^5 (\Lambda_m^2)^3 (T^{(m)}) + \varepsilon^5 (\Lambda_m^2)^2 (W^{(m)}), \qquad \partial_3^5 T^{(m)} = -\varepsilon^5 (\Lambda_m^2)^2 (Q^{(m)}),$$

$$\partial_3^6 Q^{(m)} = -\varepsilon^6 (\Lambda_m^2)^3 (Q^{(m)}), \quad \partial_3^6 T^{(m)} = -\varepsilon^6 (\Lambda_m^2)^3 (T^{(m)}) - \varepsilon^6 (\Lambda_m^2)^2 (W^{(m)}),$$

$$\partial_3^7 Q^{(m)} = -\varepsilon^7 (\Lambda_m^2)^4 (T^{(m)}) - \varepsilon^7 (\Lambda_m^2)^3 (W^{(m)}),$$

$$\partial_3^7 T^{(m)} = \varepsilon^7 (\Lambda_m^2)^3 (Q^{(m)}) \qquad \text{и} \quad \text{т.д.} \tag{13}$$

Подставив (13) в разложения (12) и собрав слагаемые при функциях $T_0^{(m)}$, $Q_0^{(m)}$, в операторной форме будем иметь

$$T^{(m)}(\mathbf{x}) = L_{TT}^{(m)}(\varepsilon x_3) T_0^{(m)}(x_1, x_2) + L_{TQ}^{(m)}(\varepsilon x_3) Q_0^{(m)}(x_1, x_2) + L_{TW}^{(m)}(\varepsilon x_3) W^{(m)},$$

$$Q^{(m)}(\mathbf{x}) = L_{QT}^{(m)}(\varepsilon x_3) T_0^{(m)}(x_1, x_2) +$$

$$+ L_{QQ}^{(m)}(\varepsilon x_3) Q_0^{(m)}(x_1, x_2) + L_{QW}^{(m)}(\varepsilon x_3) W^{(m)}, \tag{14}$$

где линейные операторы при использовании символического метода имеют вид

$$L_{TT}^{(m)}(\varepsilon x_3) \equiv L_{QQ}^{(m)}(\varepsilon x_3) = \cos\left[\varepsilon (x_3 - x_3^{(m)}) \Lambda_m \right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \varepsilon^{2k} (x_3 - x_3^{(m)})^{2k} (\Lambda_m^2)^k,$$

$$L_{TQ}^{(m)}(\varepsilon x_3) \equiv -L_{QW}^{(m)}(\varepsilon x_3) = -\frac{1}{\Lambda_m}\sin\left[\varepsilon(x_3 - x_3^{(m)})\Lambda_m\right] =$$

$$= -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\varepsilon^{2k+1}(x_3 - x_3^{(m)})^{2k+1}(\Lambda_m^2)^k,$$

$$L_{QT}^{(m)}(\varepsilon x_3) = \Lambda_m\sin\left[\varepsilon(x_3 - x_3^{(m)})\Lambda_m\right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\varepsilon^{2k+1}(x_3 - x_3^{(m)})^{2k+1}(\Lambda_m^2)^{k+1},$$

$$L_{TW}^{(m)}(\varepsilon x_3) = \frac{1}{\Lambda_m^2}\left\{\cos\left[\varepsilon(x_3 - x_3^{(m)})\Lambda_m\right] - 1\right\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\varepsilon^{2k}(x_3 - x_3^{(m)})^{2k}(\Lambda_m^2)^{k-1}. \qquad (15)$$

Из первых двух равенств (4) и первого из соотношений (14) следует, что

$$q_i^{(m)} = -\sum_{j=1}^{2}\lambda_{ij}^{(m)}(\partial_j L_{TT})T_0^{(m)} - \sum_{j=1}^{2}\lambda_{ij}^{(m)}(\partial_j L_{TQ})Q_0^{(m)} - \sum_{j=1}^{2}\lambda_{ij}^{(m)}(\partial_j L_{TW})W^{(m)},$$

$$i = 1,2, \qquad 1 \le m \le M. \qquad (16)$$

В соотношениях (15) положения начальных плоскостей $x_3 = x_3^{(m)}$ выбираются из удобства решения конкретной задачи.

Для дальнейшего изложения в (14), (16) с учетом (11) введем переобозначения:

$$F_i^{(m)}(\mathbf{x}) = L_{i1}^{(m)}(\varepsilon x_3)F_{01}^{(m)}(x_1,x_2) + L_{i2}^{(m)}(\varepsilon x_3)F_{02}^{(m)}(x_1,x_2) +$$

$$+L_{i3}^{(m)}(\varepsilon x_3)F_{03}^{(m)}(x_1,x_2),$$

$$q_i^{(m)}(\mathbf{x}) = -\sum_{j=1}^{2}\lambda_{ij}^{(m)}(\partial_j L_{11})F_{01}^{(m)} - \sum_{j=1}^{2}\lambda_{ij}^{(m)}(\partial_j L_{12})F_{02}^{(m)} - \sum_{j=1}^{2}\lambda_{ij}^{(m)}(\partial_j L_{13})F_{03}^{(m)},$$

$$i = 1,2, \qquad 1 \le m \le M, \qquad (17)$$

где

$$F_{01}^{(m)}(x_1,x_2) \equiv T_0^{(m)}(x_1,x_2), \qquad F_{02}^{(m)}(x_1,x_2) \equiv Q_0^{(m)}(x_1,x_2),$$

$$F_{03}^{(m)}(x_1,x_2) \equiv W^{(m)}(x_1,x_2), \qquad F_1^{(m)}(\mathbf{x}) \equiv T^{(m)}(\mathbf{x}), \qquad F_2^{(m)}(\mathbf{x}) \equiv Q^{(m)}(\mathbf{x}),$$

$$L_{11}^{(m)}(\varepsilon x_3) \equiv L_{22}^{(m)}(\varepsilon x_3) \equiv L_{TT}^{(m)}(\varepsilon x_3),$$

$$L_{12}^{(m)}(\varepsilon x_3) \equiv -L_{23}^{(m)}(\varepsilon x_3) \equiv L_{TQ}^{(m)}(\varepsilon x_3),$$

$$L_{13}^{(m)}(\varepsilon x_3) \equiv L_{TW}^{(m)}(\varepsilon x_3), \qquad L_{21}^{(m)}(\varepsilon x_3) \equiv L_{QT}^{(m)}(\varepsilon x_3), \qquad (18)$$

функции $F_{01}^{(m)}$, $F_{02}^{(m)}$ подлежат определению, а функции $F_{03}^{(m)}$ известны.

Подставим выражения (17) в равенства (5), (6) и учтем (18). Тогда получим систему дифференциальных уравнений

$$\sum_{i=1}^{3}L_{1i}^{(m)}\left(\varepsilon f_{mn}(x_1,x_2;\varepsilon)\right)F_{0i}^{(m)}(x_1,x_2) = \sum_{i=1}^{3}L_{1i}^{(n)}\left(\varepsilon f_{mn}(x_1,x_2;\varepsilon)\right)F_{0i}^{(n)}(x_1,x_2),$$

$$-\sum_{i=1}^{2}n_i^{(m,n)}\sum_{j=1}^{2}\lambda_{ij}^{(m)}\sum_{\ell=1}^{3}\left[\partial_j L_{1\ell}^{(m)}\left(\varepsilon f_{mn}(x_1,x_2;\varepsilon)\right)\right]F_{0\ell}^{(m)}(x_1,x_2) +$$

$$+ n_3^{(m,n)}\lambda_{33}^{(m)}\sum_{\ell=1}^{3}L_{2\ell}^{(m)}\left(\varepsilon f_{mn}(x_1,x_2;\varepsilon)\right)F_{0\ell}^{(m)}(x_1,x_2) =$$

$$= -\sum_{i=1}^{2}n_i^{(m,n)}\sum_{j=1}^{2}\lambda_{ij}^{(n)}\sum_{\ell=1}^{3}\left[\partial_j L_{1\ell}^{(n)}\left(\varepsilon f_{mn}(x_1,x_2;\varepsilon)\right)\right]F_{0\ell}^{(n)}(x_1,x_2) +$$

$$+ n_3^{(m,n)}\lambda_{33}^{(n)}\sum_{\ell=1}^{3} L_{2\ell}^{(n)}(\varepsilon f_{mn}(x_1,x_2;\varepsilon))F_{0\ell}^{(n)}(x_1,x_2)\,,$$

$$n = m+1, \qquad 1 \le m \le M-1\,, \tag{19}$$

$$\beta^{(-)}\left\{-\sum_{i=1}^{2} n_i^{(-)}\sum_{j=1}^{2}\lambda_{ij}^{(1)}\sum_{\ell=1}^{3}\left[\partial_j L_{1\ell}^{(1)}(\varepsilon f^{(-)}(x_1,x_2;\varepsilon))\right]F_{0\ell}^{(1)}(x_1,x_2) + \right.$$

$$\left. + n_3^{(-)}\lambda_{33}^{(1)}\sum_{\ell=1}^{3} L_{2\ell}^{(1)}(\varepsilon f^{(-)}(x_1,x_2;\varepsilon))F_{0\ell}^{(1)}(x_1,x_2)\right\} -$$

$$- \delta^{(-)}\alpha^{(-)}\sum_{\ell=1}^{3} L_{1\ell}^{(1)}(\varepsilon f^{(-)}(x_1,x_2;\varepsilon))F_{0\ell}^{(1)}(x_1,x_2) =$$

$$= \gamma^{(-)}q_n^{(-)}(x_1,x_2) - \delta^{(-)}\alpha^{(-)}T_\infty^{(-)}(x_1,x_2)\,,$$

$$\beta^{(+)}\left\{-\sum_{i=1}^{2} n_i^{(+)}\sum_{j=1}^{2}\lambda_{ij}^{(M)}\sum_{\ell=1}^{3}\left[\partial_j L_{1\ell}^{(M)}(\varepsilon f^{(+)}(x_1,x_2;\varepsilon))\right]F_{0\ell}^{(M)}(x_1,x_2) + \right.$$

$$\left. + n_3^{(+)}\lambda_{33}^{(M)}\sum_{\ell=1}^{3} L_{2\ell}^{(M)}(\varepsilon f^{(+)}(x_1,x_2;\varepsilon))F_{0\ell}^{(M)}(x_1,x_2)\right\} -$$

$$- \delta^{(+)}\alpha^{(+)}\sum_{\ell=1}^{3} L_{1\ell}^{(M)}(\varepsilon f^{(+)}(x_1,x_2;\varepsilon))F_{0\ell}^{(M)}(x_1,x_2) =$$

$$= \gamma^{(+)}q_n^{(+)}(x_1,x_2) - \delta^{(+)}\alpha^{(+)}T_\infty^{(+)}(x_1,x_2), \qquad (x_1,x_2)\in G\,. \tag{20}$$

Система (19), (20) состоит из $2M$ уравнений и замкнута относительно $2M$ неизвестных начальных функций $F_{01}^{(m)}, F_{02}^{(m)}$, $1 \le m \le M$, зависящих только от двух пространственных переменных x_1, x_2. В точной постановке система (19), (20) является системой дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами бесконечного порядка.

Замечание. Так как слои переменной толщины в общем случае могут рассматриваться как искривленные панели или пологие оболочки, то система (19), (20) может быть использована не только для определения в пространственной постановке температуры в пластинах, но и в слоистых пологих оболочках или искривленных панелях, если для материалов слоев попрежнему выполняются условия (1) и $\partial_3 w^{(m)} = 0$.

Чтобы получить граничные условия для однозначного определения функций $F_{01}^{(m)}, F_{02}^{(m)}$, нужно (17) подставить в (7) и для каждого слоя проинтегрировать необходимое число раз получающее равенство по переменной x_3 с весом $(x_3 - x_3^{(m)})^k$, после чего будем иметь

$$-\beta\sum_{i=1}^{2} n_i\sum_{j=1}^{2}\lambda_{ij}^{(m)}\partial_j\sum_{\ell=1}^{3}\left[\varepsilon^{k+1}\int_{f_{m-1,m}}^{f_{m,m+1}}(x_3 - x_3^{(m)})^k L_{1\ell}^{(m)}(\varepsilon x_3)\,dx_3\right]F_{0\ell}^{(m)}(x_1,x_2) -$$

$$- \delta\alpha^{(m)}\sum_{\ell=1}^{3}\left[\varepsilon^{k+1}\int_{f_{m-1,m}}^{f_{m,m+1}}(x_3 - x_3^{(m)})^k L_{1\ell}^{(m)}(\varepsilon x_3)\,dx_3\right]F_{0\ell}^{(m)}(x_1,x_2) =$$

$$= \varepsilon^{k+1}\int_{f_{m-1,m}}^{f_{m,m+1}}(x_3 - x_3^{(m)})^k(\gamma q_n - \delta\alpha^{(m)}T_\infty)\,dx_3\,,$$

$$(x_1,x_2)\in\Gamma, \qquad 1 \le m \le M\,, \tag{21}$$

где необходимо учесть выражения для интегралов [6] (см. (15), (18))

$$\int (x_3 - x_3^{(m)})^k L_{11}^{(m)}\, dx_3 =$$

$$= \frac{k!}{\varepsilon^{k+1}\Lambda_m^{k+1}} \begin{cases} \sum\limits_{s=0}^{p} (-1)^s \dfrac{y^{2p-2s}}{(2p-2s)!} \sin y + \sum\limits_{s=0}^{p-1} (-1)^s \dfrac{y^{2p-2s-1}}{(2p-2s-1)!} \cos y, & k = 2p, \\ \sum\limits_{s=0}^{p} (-1)^s \dfrac{y^{2p-2s+1}}{(2p-2s+1)!} \sin y + \sum\limits_{s=0}^{p} (-1)^s \dfrac{y^{2p-2s}}{(2p-2s)!} \cos y, & k = 2p+1, \end{cases}$$

$$\int (x_3 - x_3^{(m)})^k L_{12}^{(m)}\, dx_3 =$$

$$= \frac{k!}{\varepsilon^{k+1}\Lambda_m^{k+2}} \begin{cases} \sum\limits_{s=0}^{p} (-1)^s \dfrac{y^{2p-2s}}{(2p-2s)!} \cos y - \sum\limits_{s=0}^{p-1} (-1)^s \dfrac{y^{2p-2s-1}}{(2p-2s-1)!} \sin y, & k = 2p, \\ \sum\limits_{s=0}^{p} (-1)^s \dfrac{y^{2p-2s+1}}{(2p-2s+1)!} \cos y - \sum\limits_{s=0}^{p} (-1)^s \dfrac{y^{2p-2s}}{(2p-2s)!} \sin y, & k = 2p+1, \end{cases}$$

$$\int (x_3 - x_3^{(m)})^k L_{13}^{(m)}\, dx_3 =$$

$$= \frac{1}{\Lambda_m^2}\left[\int (x_3 - x_3^{(m)})^k L_{11}^{(m)}(\varepsilon x_3)\, dx_3 - \frac{(x_3 - x_3^{(m)})^{k+1}}{(k+1)} \right],$$

$$y \equiv \varepsilon(x_3 - x_3^{(m)})\Lambda_m, \qquad 1 \le m \le M, \qquad k,\, p = 0,1,2,3\ldots \tag{22}$$

Удерживая в разложениях операторов $L_{ij}^{(m)}$ разное количество слагаемых, будем получать системы уравнений (19), (20) и соответствующие им граничные условия (21) (с учетом (22)), позволяющие определить поле температур с разной точностью. Чем больше будем удерживать слагаемых в частичных суммах (15), тем точнее будет построенное решение. При этом с увеличением числа удерживаемых в (15) слагаемых будет возрастать порядок дифференциальных операторов разрешающей системы (19), (20), причем согласно (15) система (19), (20) совместно с граничными условиями образует граничную задачу с сингулярным возмущением. Чем больше сохраняется слагаемых в разложениях (15), тем больше порядок сингулярности этой задачи и тем точнее можно рассчитать температурное поле в погранслоях, возникающих в окрестности кромок пластины $(x_1, x_2) \in \Gamma$, $f_{m-1,m} \le$ $\le x_3 \le f_{m,m+1}$. В идеале при сохранении всех слагаемых в (15) получим точное решение задачи теплопроводности.

Рассмотрим частный случай слоистых пластин, набранных из слоев постоянной толщины. Плоскости контакта между слоями и лицевые плоскости пластин определяются при этом равенствами

$$x_3 = x_3^{(m,n)} = \text{const}, \qquad n = m+1, \qquad 1 \le m \le M-1,$$

$$x_3 = x_3^{(\pm)} = \text{const}. \tag{23}$$

Для удобства дальнейших преобразований зададим $x_3^{(m)}$ в (15) в виде

$$x_3^{(1)} = x_3^{(-)}, \qquad x_3^{(m)} = x_3^{(m-1,m)}, \qquad 2 \le m \le M, \tag{24}$$

тогда из (19) с учетом $n_i^{(m,n)} = 0$, $n_3^{(m,n)} = 1$, $1 \le m \le M-1$, $i = 1,2$, получим

$$F_{01}^{(n)}(x_1, x_2) = \sum_{j=1}^{3} L_{1j}^{(m)}(\varepsilon x_3^{(m,n)}) F_{0j}^{(m)}(x_1, x_2),$$

$$F_{02}^{(n)}(x_1, x_2) = \frac{\lambda_{33}^{(m)}}{\lambda_{33}^{(n)}} \sum_{j=1}^{3} L_{2j}^{(m)}(\varepsilon x_3^{(m,n)}) F_{0j}^{(m)}(x_1, x_2),$$

$$n = m+1, \qquad 1 \le m \le M-1. \tag{25}$$

Из (25) с учетом (18) следует

$$\mathbf{F}_0^{(m)}(x_1,x_2)=\prod_{k=1}^{m-1}\left\|D^{(k)}\right\|\mathbf{F}_0^{(1)}(x_1,x_2)+\sum_{k=1}^{m-1}\prod_{\ell=k+1}^{m-1}\left\|D^{(\ell)}\right\|\mathbf{D}_3^{(k)}W^{(k)}(x_1,x_2),$$
$$\mathbf{F}^{(m)}(\mathbf{x})=\left\|L^{(k)}(\varepsilon x_3)\right\|\mathbf{F}_0^{(m)}(x_1,x_2)+\mathbf{L}_3^{(k)}(\varepsilon x_3)W^{(k)}(x_1,x_2),$$
$$1\le m\le M, \tag{26}$$

где

$$\left\|L^{(m)}(\varepsilon x_3)\right\|\equiv\begin{Vmatrix}L_{11}^{(m)}(\varepsilon x_3) & L_{12}^{(m)}(\varepsilon x_3)\\ L_{21}^{(m)}(\varepsilon x_3) & L_{22}^{(m)}(\varepsilon x_3)\end{Vmatrix},$$

$$\mathbf{F}_0^{(m)}\equiv\begin{Bmatrix}F_{01}^{(m)}\\ F_{02}^{(m)}\end{Bmatrix},\qquad \mathbf{F}^{(m)}(\mathbf{x})\equiv\begin{Bmatrix}F_1^{(m)}(\mathbf{x})\\ F_2^{(m)}(\mathbf{x})\end{Bmatrix},$$

$$\left\|D^{(k)}\right\|\equiv\begin{Vmatrix}L_{11}^{(m)}(\varepsilon x_3^{(k,k+1)}) & L_{12}^{(m)}(\varepsilon x_3^{(k,k+1)})\\ \dfrac{\lambda_{33}^{(k)}}{\lambda_{33}^{(k+1)}}L_{21}^{(m)}(\varepsilon x_3^{(k,k+1)}) & \dfrac{\lambda_{33}^{(k)}}{\lambda_{33}^{(k+1)}}L_{22}^{(m)}(\varepsilon x_3^{(k,k+1)})\end{Vmatrix},$$

$$\mathbf{D}_3^{(k)}\equiv\begin{Bmatrix}L_{13}^{(m)}(\varepsilon x_3^{(k,k+1)})\\ \dfrac{\lambda_{33}^{(k)}}{\lambda_{33}^{(k+1)}}L_{23}^{(m)}(\varepsilon x_3^{(k,k+1)})\end{Bmatrix},\qquad \mathbf{L}_3^{(k)}(\varepsilon x_3)\equiv\begin{Bmatrix}L_{13}^{(m)}(\varepsilon x_3)\\ L_{23}^{(m)}(\varepsilon x_3)\end{Bmatrix}. \tag{27}$$

Из (20) с учетом (24), (26) и $n_i^{(\pm)}=0$, $i=1,2$, $n_3^{(+)}=-n_3^{(-)}=1$, получим

$$-\delta^{(-)}\alpha^{(-)}F_{01}^{(1)}(x_1,x_2)-\beta^{(-)}\lambda_{33}^{(1)}F_{02}^{(1)}(x_1,x_2)=$$
$$=\gamma^{(-)}q_n^{(-)}-\delta^{(-)}\alpha^{(-)}T_\infty^{(-)},\qquad x_3=x_3^{(-)}, \tag{28}$$

$$\beta^{(+)}\lambda_{33}^{(M)}\sum_{j=1}^{2}D_{2j}^{(M)}(\varepsilon x_3^{(+)})F_{0j}^{(1)}(x_1,x_2)-\delta^{(+)}\alpha^{(+)}\sum_{j=1}^{2}D_{1j}^{(M)}(\varepsilon x_3^{(+)})F_{0j}^{(1)}(x_1,x_2)=$$
$$=\gamma^{(+)}q_n^{(+)}(x_1,x_2)-\delta^{(+)}\alpha^{(+)}T_\infty^{(+)}(x_1,x_2)-\beta^{(+)}\lambda_{33}^{(M)}V_2^{(M)}(x_1,x_2)+$$
$$+\delta^{(+)}\alpha^{(+)}V_1^{(M)}(x_1,x_2),\qquad (x_1,x_2)\in G, \tag{29}$$

где согласно (26) $D_{ij}^{(M)}$, $V_i^{(M)}$ – компоненты матрицы и вектора

$$\begin{Vmatrix}D_{11}^{(M)} & D_{12}^{(M)}\\ D_{21}^{(M)} & D_{22}^{(M)}\end{Vmatrix}\equiv\left\|L^{(M)}(\varepsilon x_3^{(+)})\right\|\prod_{k=1}^{M-1}\left\|D^{(k)}\right\|,$$

$$\begin{Bmatrix}V_1^{(m)}\\ V_2^{(m)}\end{Bmatrix}\equiv\mathbf{L}_3^{(M)}(\varepsilon x_3^{(+)})W^{(M)}(x_1,x_2)+$$
$$+\sum_{k=1}^{M-1}\prod_{\ell=k+1}^{M-1}\left\|D^{(\ell)}\right\|\mathbf{D}_3^{(k)}W^{(k)}(x_1,x_2). \tag{30}$$

Из уравнения (29) за счет (28) можно исключить одну из неизвестных функций $F_{01}^{(1)}$ или $F_{02}^{(1)}$, тогда (29) будет дифференциальным уравнением в частных производных по переменным x_1, x_2, замкнутым относительно другой неизвестной функции. В частности, если на нижней лицевой поверхности задан тепловой поток ($\beta^{(-)}=\gamma^{(-)}=1,\ \delta^{(-)}=0$), то из (28) имеем $F_{02}^{(1)}=$ $=-q_n^{(-)}(x_1,x_2)\dfrac{1}{\lambda_{33}^{(1)}}$ – известная функция, а из (29) получим

$$\beta^{(+)}\lambda_{33}^{(M)}D_{21}^{(M)}(\varepsilon x_3^{(+)})F_{01}^{(1)}(x_1,x_2)-\delta^{(+)}\alpha^{(+)}D_{11}^{(M)}(\varepsilon x_3^{(+)})F_{01}^{(1)}(x_1,x_2)=$$
$$=\gamma^{(+)}q_n^{(+)}(x_1,x_2)-\delta^{(+)}\alpha^{(+)}T_\infty^{(+)}(x_1,x_2)-\beta^{(+)}\lambda_{33}^{(M)}V_2^{(M)}(x_1,x_2)+$$
$$+\delta^{(+)}\alpha^{(+)}V_1^{(M)}(x_1,x_2)+\beta^{(+)}\lambda_{33}^{(M)}D_{22}^{(M)}(\varepsilon x_3^{(+)})\frac{1}{\lambda_{33}^{(1)}}q_n^{(-)}-$$
$$-\delta^{(+)}\alpha^{(+)}D_{12}^{(M)}(\varepsilon x_3^{(+)})\frac{1}{\lambda_{33}^{(1)}}q_n^{(-)},\qquad (x_1,x_2)\in G,$$
$$\left(F_{02}^{(1)}=-\,q_n^{(-)}(x_1,x_2)\frac{1}{\lambda_{33}^{(1)}(x_1,x_2)}\right),\tag{31}$$
где $F_{01}^{(1)}\equiv T_0^{(1)}$ − подлежащая определению функция.

Аналогично, если на нижней лицевой поверхности задана температура ($\beta^{(-)}=\gamma^{(-)}=0,\ \delta^{(-)}\alpha^{(-)}=1$), то из (28) имеем $F_{01}^{(1)}=T_\infty^{(-)}(x_1,x_2)$ − известная функция, а из (29) следует
$$\beta^{(+)}\lambda_{33}^{(M)}D_{22}^{(M)}(\varepsilon x_3^{(+)})F_{02}^{(1)}(x_1,x_2)-\delta^{(+)}\alpha^{(+)}D_{12}^{(M)}(\varepsilon x_3^{(+)})F_{02}^{(1)}(x_1,x_2)=$$
$$=\gamma^{(+)}q_n^{(+)}(x_1,x_2)-\delta^{(+)}\alpha^{(+)}T_\infty^{(+)}(x_1,x_2)-\beta^{(+)}\lambda_{33}^{(M)}V_2^{(M)}(x_1,x_2)+$$
$$+\delta^{(+)}\alpha^{(+)}V_1^{(M)}(x_1,x_2)-\beta^{(+)}\lambda_{33}^{(M)}D_{21}^{(M)}(\varepsilon x_3^{(+)})T_\infty^{(-)}(x_1,x_2)+$$
$$+\delta^{(+)}\alpha^{(+)}D_{11}^{(M)}(\varepsilon x_3^{(+)})T_\infty^{(-)}(x_1,x_2),\qquad (x_1,x_2)\in G,$$
$$\left(F_{01}^{(1)}(x_1,x_2)=T_\infty^{(-)}(x_1,x_2)\right),\tag{32}$$
где $F_{02}^{(1)}\equiv Q_0^{(1)}$ − подлежащая определению функция.

В качестве частного случая рассмотрим двухслойную пластину ($M=2$). Совместим поверхность контакта слоев с плоскостью x_1x_2: $x_3^{(1,2)}=0$. Нижняя и верхняя лицевые поверхности по-прежнему определяются уравнениями $x_3=x_3^{(\pm)}$, причем в силу формул обезразмеривания (2), где $\bar{H}$ − толщина пластины, имеем $x_3^{(+)}-x_3^{(-)}=1$ ($x_3^{(-)}<0$, $x_3^{(+)}>0$). В этом случае в качестве начальной плоскости первого (нижнего) слоя удобно выбрать $x_3^{(1)}=$ $=x_3^{(-)}$, а второго (верхнего) слоя − $x_3^{(2)}=x_3^{(+)}$, тогда из (19), (20) с учетом (18) получим
$$\sum_{i=1}^{2}L_{1i}^{(1)}(0)F_{0i}^{(1)}(x_1,x_2)-\sum_{i=1}^{2}L_{1i}^{(2)}(0)F_{0i}^{(2)}(x_1,x_2)=L_{13}^{(2)}(0)W^{(2)}-L_{13}^{(1)}(0)W^{(1)},$$
$$\lambda_{33}^{(1)}\sum_{i=1}^{2}L_{2i}^{(1)}(0)F_{0i}^{(1)}-\lambda_{33}^{(2)}\sum_{i=1}^{2}L_{2i}^{(2)}(0)F_{0i}^{(2)}=\lambda_{33}^{(2)}L_{23}^{(2)}(0)W^{(2)}-\lambda_{33}^{(1)}L_{23}^{(1)}(0)W^{(1)},\tag{33}$$
$$-\beta^{(-)}\lambda_{33}^{(1)}F_{02}^{(1)}(x_1,x_2)-\delta^{(-)}\alpha^{(-)}F_{01}^{(1)}(x_1,x_2)=\gamma^{(-)}q_n^{(-)}-\delta^{(-)}\alpha^{(-)}T_\infty^{(-)},$$
$$\beta^{(+)}\lambda_{33}^{(2)}F_{02}^{(2)}(x_1,x_2)-\delta^{(+)}\alpha^{(+)}F_{01}^{(2)}(x_1,x_2)=\gamma^{(+)}q_n^{(+)}-\delta^{(+)}\alpha^{(+)}T_\infty^{(+)}.\tag{34}$$

Система (33), (34) замкнута относительно четырех неизвестных функций $F_{01}^{(1)}, F_{02}^{(1)}, F_{01}^{(2)}, F_{02}^{(2)}$. Две из этих функций можно выразить через две оставшиеся за счет равенств (34) и исключить из системы (33), после чего получим разрешающую систему двух уравнений относительно двух неизвестных функций.

Пусть на обеих лицевых поверхностях $x_3^{(\pm)}$ заданы граничные условия второго рода ($\beta^{(\pm)}=\gamma^{(\pm)}=1$, $\delta^{(\pm)}=0$), тогда из (34) получим

$$F_{02}^{(1)} = -\frac{1}{\lambda_{33}^{(1)}} q_n^{(-)}, \qquad F_{02}^{(2)} = \frac{1}{\lambda_{33}^{(2)}} q_n^{(+)}. \tag{35}$$

Подставив (35) в (33), получим систему

$$L_{11}^{(1)}(0)F_{01}^{(1)} - L_{11}^{(2)}(0)F_{01}^{(2)} = L_{13}^{(2)}(0)W^{(2)} - L_{13}^{(1)}(0)W^{(1)} + L_{12}^{(2)}(0)\frac{1}{\lambda_{33}^{(2)}} q_n^{(+)} +$$

$$+ L_{12}^{(1)}(0)\frac{1}{\lambda_{33}^{(1)}} q_n^{(-)}, \lambda_{33}^{(1)} L_{21}^{(1)}(0)F_{01}^{(1)} - \lambda_{33}^{(2)} L_{21}^{(2)}(0)F_{01}^{(2)} =$$

$$= \lambda_{33}^{(2)} L_{23}^{(2)}(0)W^{(2)} - \lambda_{33}^{(1)} L_{23}^{(1)}(0)W^{(1)} + \lambda_{33}^{(2)} L_{22}^{(2)}(0)\frac{1}{\lambda_{33}^{(2)}} q_n^{(+)} +$$

$$+ \lambda_{33}^{(1)} L_{22}^{(1)}(0)\frac{1}{\lambda_{33}^{(1)}} q_n^{(-)}, \qquad (x_1, x_2) \in G. \tag{36}$$

Эта система определяет две неизвестные функции $F_{01}^{(m)} = T_0^{(m)}$, $m = 1,2$, – температуры на лицевых поверхностях.

Отбросим в разложениях операторов $L_{11}^{(m)}, L_{21}^{(m)}$ (см. (15), (18)) слагаемые порядка $O(\varepsilon^3)$, т.е.

$$L_{11}^{(m)} = 1 - 0.5\varepsilon^2 (x_3 - x_3^{(m)})^2 \Lambda_m^2 + O(\varepsilon^4),$$

$$L_{21}^{(m)} = \varepsilon (x_3 - x_3^{(m)}) \Lambda_m^2 + O(\varepsilon^3). \tag{37}$$

После подстановки (37) в (36) получим

$$0.5\varepsilon^2 x_3^{(+)2} \Lambda_2^2 (T_0^{(2)}) - 0.5\varepsilon^2 x_3^{(-)2} \Lambda_1^2 (T_0^{(1)}) - T_0^{(2)} + T_0^{(1)} = L_{13}^{(2)}(0)W^{(2)} -$$

$$- L_{13}^{(1)}(0)W^{(1)} + L_{12}^{(2)}(0)\frac{1}{\lambda_{33}^{(2)}} q_n^{(+)} + L_{12}^{(1)}(0)\frac{1}{\lambda_{33}^{(1)}} q_n^{(-)},$$

$$\varepsilon \lambda_{33}^{(2)} x_3^{(+)} \Lambda_1^2 (T_0^{(2)}) - \varepsilon \lambda_{33}^{(1)} x_3^{(-)} \Lambda_1^2 (T_0^{(1)}) = \lambda_{33}^{(2)} L_{23}^{(2)}(0)W^{(2)} - \lambda_{33}^{(1)} L_{23}^{(1)}(0)W^{(1)} +$$

$$+ \lambda_{33}^{(2)} L_{22}^{(2)}(0)\frac{1}{\lambda_{33}^{(2)}} q_n^{(+)} + \lambda_{33}^{(1)} L_{22}^{(1)}(0)\frac{1}{\lambda_{33}^{(1)}} q_n^{(-)}, \qquad (x_1, x_2) \in G, \tag{38}$$

где правые части известны.

Характеристическое уравнение системы (38) с учетом (11) имеет вид

$$x_3^{(-)} x_3^{(+)} \left[\lambda_{33}^{(1)} x_3^{(+)} - \lambda_{33}^{(2)} x_3^{(-)}\right] \prod_{m=1}^{2} \frac{\lambda_{11}^{(m)} \varphi_1^2 + 2\lambda_{12}^{(m)} \varphi_1 \varphi_2 + \lambda_{22}^{(m)} \varphi_2^2}{\lambda_{33}^{(m)}} = 0, \tag{39}$$

где φ_1, φ_2 – параметры, задающие характеристическое направление ($\varphi_1^2 + \varphi_2^2 = 1$). Так как $\lambda_{33}^{(m)} > 0$, $x_3^{(-)} < 0$, $x_3^{(+)} > 0$, то квадратная скобка в (39) всегда отрицательна и в силу постулата Онзагера из (39) следует, что система (38) является системой четвертого порядка эллиптического типа с сингулярным возмущением.

Для однозначного интегрирования системы (38) в каждой точке контура Γ (на кромке) должны быть заданы два граничных условия, которые получим из (21) при $k = 0$, $m = 1,2$:

$$-\beta \sum_{i=1}^{2} n_i \sum_{j=1}^{2} \lambda_{ij}^{(1)} \partial_j \left(\varepsilon \int_{x^{(-)}}^{0} L_{11}^{(1)}(\varepsilon x_3)\, dx_3 \right) T_0^{(1)} -$$

$$- \delta\alpha^{(1)} \left(\varepsilon \int_{x^{(-)}}^{0} L_{11}^{(1)}(\varepsilon x_3)\, dx_3 \right) T_0^{(1)} = \varepsilon \int_{x^{(-)}}^{0} (\gamma q_n - \delta\alpha^{(1)} T_\infty)\, dx_3 +$$

$$+ \beta \sum_{i=1}^{2} n_i \sum_{j=1}^{2} \lambda_{ij}^{(1)} \partial_j \sum_{\ell=2}^{3} \left(\varepsilon \int_{x^{(-)}}^{0} L_{1\ell}^{(1)}(\varepsilon x_3)\, dx_3 \right) F_{0\ell}^{(1)} +$$

$$+\delta\alpha^{(1)}\sum_{\ell=2}^{3}\left(\varepsilon\int\limits_{x^{(-)}}^{0}L_{1\ell}^{(1)}(\varepsilon x_3)\,dx_3\right)F_{0\ell}^{(1)},$$

$$-\beta\sum_{i=1}^{2}n_i\sum_{j=1}^{2}\lambda_{ij}^{(2)}\partial_j\left(\varepsilon\int\limits_{0}^{x^{(+)}}L_{11}^{(2)}(\varepsilon x_3)\,dx_3\right)T_0^{(2)}-$$

$$-\delta\alpha^{(2)}\left(\varepsilon\int\limits_{0}^{x^{(+)}}L_{11}^{(2)}(\varepsilon x_3)\,dx_3\right)T_0^{(2)}=\varepsilon\int\limits_{0}^{x^{(+)}}(\gamma q_n-\delta\alpha^{(2)}T_\infty)\,dx_3+$$

$$+\beta\sum_{i=1}^{2}n_i\sum_{j=1}^{2}\lambda_{ij}^{(2)}\partial_j\sum_{\ell=2}^{3}\left(\varepsilon\int\limits_{0}^{x^{(+)}}L_{1\ell}^{(2)}(\varepsilon x_3)\,dx_3\right)F_{0\ell}^{(2)}+$$

$$+\delta\alpha^{(2)}\sum_{\ell=2}^{3}\left(\varepsilon\int\limits_{0}^{x^{(+)}}L_{1\ell}^{(2)}(\varepsilon x_3)\,dx_3\right)F_{0\ell}^{(2)},\qquad x_1,x_2\in\Gamma,\tag{40}$$

где правые части − известные на контуре Γ функции.

Используя первое из равенств (37), вычислим интегралы в левых частях (40) и по-прежнему отбросим слагаемые порядка $O(\varepsilon^3)$, тогда получим граничные условия на кромке

$$x_3^{(-)}\beta\sum_{i=1}^{2}n_i\sum_{j=1}^{2}\lambda_{ij}^{(1)}\partial_jT_0^{(1)}+x_3^{(-)}\delta\alpha^{(1)}T_0^{(1)}=\int\limits_{x^{(-)}}^{0}(\gamma q_n-\delta\alpha^{(1)}T_\infty)\,dx_3+$$

$$+\beta\sum_{i=1}^{2}n_i\sum_{j=1}^{2}\lambda_{ij}^{(1)}\partial_j\sum_{\ell=2}^{3}\left(\int\limits_{x^{(-)}}^{0}L_{1\ell}^{(1)}(\varepsilon x_3)\,dx_3\right)F_{0\ell}^{(1)}+$$

$$+\delta\alpha^{(1)}\sum_{\ell=2}^{3}\left(\int\limits_{x^{(-)}}^{0}L_{1\ell}^{(1)}(\varepsilon x_3)\,dx_3\right)F_{0\ell}^{(1)},$$

$$-x_3^{(+)}\beta\sum_{i=1}^{2}n_i\sum_{j=1}^{2}\lambda_{ij}^{(2)}\partial_jT_0^{(2)}-x_3^{(+)}\delta\alpha^{(2)}T_0^{(2)}=\int\limits_{0}^{x^{(+)}}(\gamma q_n-\delta\alpha^{(2)}T_\infty)\,dx_3+$$

$$+\beta\sum_{i=1}^{2}n_i\sum_{j=1}^{2}\lambda_{ij}^{(2)}\partial_j\sum_{\ell=2}^{3}\left(\int\limits_{0}^{x^{(+)}}L_{1\ell}^{(2)}(\varepsilon x_3)\,dx_3\right)F_{0\ell}^{(2)}+$$

$$+\delta\alpha^{(2)}\sum_{\ell=2}^{3}\left(\int\limits_{0}^{x^{(+)}}L_{1\ell}^{(2)}(\varepsilon x_3)\,dx_3\right)F_{0\ell}^{(2)},\qquad x_1,x_2\in\Gamma.\tag{41}$$

Контурные граничные условия (41) по структуре идентичны граничным условиям плоской задачи стационарной теплопроводности.

Уравнения (38) и граничные условия (41) образуют граничную задачу для определения в первом приближении функций $T_0^{(1)}, T_0^{(2)}$ при задании на лицевых поверхностях двухслойной пластины граничных условий второго рода. При этом если плотность мощности внутренних источников тепла постоянна ($W^{(m)}=\mathrm{const}$) и на обеих лицевых поверхностях заданы условия термоизоляции ($q_n^{(\pm)}=0$) или $q_n^{(\pm)}=\mathrm{const}$ (или в общем случае, когда $\Lambda_1^2q_n^{(-)}=0$, $\Lambda_2^2q_n^{(+)}=0$, $\Lambda_m^2W^{(m)}=0$), то согласно (17) с учетом (37) температура по толщине слоев будет распределена по квадратичному закону (или по кусочно-квадратичному закону для всего пакета в целом).

Чтобы получить более точное, чем из граничной задачи (38), (41), распределение температур $T_0^{(1)}, T_0^{(2)}$ на лицевых поверхностях пластины, отбросим в разложениях операторов $L_{11}^{(m)}, L_{21}^{(m)}$ (см. (15), (18)) слагаемые порядка $O(\varepsilon^5)$, т.е.

$$L_{11}^{(m)} = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2 (x_3 - x_3^{(m)})^2 \Lambda_m^2 + \frac{1}{24}\varepsilon^4 (x_3 - x_3^{(m)})^4 \Lambda_m^4 + O(\varepsilon^6),$$

$$L_{21}^{(m)} = \varepsilon (x_3 - x_3^{(m)}) \Lambda_m^2 - \frac{1}{6}\varepsilon^3 (x_3 - x_3^{(m)})^3 \Lambda_m^4 + O(\varepsilon^5). \qquad (42)$$

После подстановки (42) в (36) получим

$$\left[1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2 x_3^{(-)2}\Lambda_1^2 + \frac{1}{24}\varepsilon^4 x_3^{(-)4}\Lambda_1^4\right] T_0^{(1)} - \left[1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2 x_3^{(+)2}\Lambda_2^2 + \frac{1}{24}\varepsilon^4 x_3^{(+)4}\Lambda_2^4\right] T_0^{(2)} =$$

$$= L_{13}^{(2)}(0) W^{(2)} - L_{13}^{(1)}(0) W^{(1)} + L_{12}^{(2)}(0) \frac{1}{\lambda_{33}^{(2)}} q_n^{(+)} + L_{12}^{(1)}(0) \frac{1}{\lambda_{33}^{(1)}} q_n^{(-)},$$

$$\lambda_{33}^{(1)} \left[-\varepsilon x_3^{(-)}\Lambda_1^2 + \frac{1}{6}\varepsilon^3 x_3^{(-)3}\Lambda_1^4\right] T_0^{(1)} - \lambda_{33}^{(2)} \left[-\varepsilon x_3^{(+)}\Lambda_2^2 + \frac{1}{6}\varepsilon^3 x_3^{(+)3}\Lambda_2^4\right] T_0^{(2)} =$$

$$= \lambda_{33}^{(2)} L_{23}^{(2)}(0) W^{(2)} - \lambda_{33}^{(1)} L_{23}^{(1)}(0) W^{(1)} + \lambda_{33}^{(2)} L_{22}^{(2)}(0) \frac{1}{\lambda_{33}^{(2)}} q_n^{(+)} +$$

$$+ \lambda_{33}^{(1)} L_{22}^{(1)}(0) \frac{1}{\lambda_{33}^{(1)}} q_n^{(-)}, \qquad x_1, x_2 \in G. \qquad (43)$$

Характеристическое уравнение системы (43) с учетом (11) имеет вид

$$(x_3^{(-)} x_3^{(+)})^3 \left[\lambda_{33}^{(1)} x_3^{(+)} - \lambda_{33}^{(2)} x_3^{(-)}\right] \prod_{m=1}^{2} \frac{(\lambda_{11}^{(m)}\varphi_1^2 + 2\lambda_{12}^{(m)}\varphi_1\varphi_2 + \lambda_{22}^{(m)}\varphi_2^2)^2}{(\lambda_{33}^{(m)})^2} = 0. \quad (44)$$

Квадратная скобка в (44), как и в (39), всегда отрицательна, поэтому в силу постулата Онзагера из (44) следует, что система (43) является системой восьмого порядка эллиптического типа с сингулярным возмущением.

Для однозначного интегрирования системы (43) в каждой точке контура Γ должны быть заданы четыре граничных условия, которые получим из (21) при $k = 0,1$, $m = 1,2$. При $k = 0$ из (21) следуют равенства (40), а при $k = 1$ имеем

$$-\beta \sum_{i=1}^{2} n_i \sum_{j=1}^{2} \lambda_{ij}^{(1)} \partial_j \left(\varepsilon^2 \int_{x^{(-)}}^{0} (x_3 - x_3^{(-)}) L_{11}^{(1)}(\varepsilon x_3)\, dx_3\right) T_0^{(1)} -$$

$$- \delta\alpha^{(1)} \left(\varepsilon^2 \int_{x^{(-)}}^{0} (x_3 - x_3^{(-)}) L_{11}^{(1)}(\varepsilon x_3)\, dx_3\right) T_0^{(1)} =$$

$$= \varepsilon^2 \int_{x^{(-)}}^{0} (x_3 - x_3^{(-)})(\gamma q_n - \delta\alpha^{(1)} T_\infty)\, dx_3 +$$

$$+ \beta \sum_{i=1}^{2} n_i \sum_{j=1}^{2} \lambda_{ij}^{(1)} \partial_j \sum_{\ell=2}^{3} \left(\varepsilon^2 \int_{x^{(-)}}^{0} (x_3 - x_3^{(-)}) L_{1\ell}^{(1)}(\varepsilon x_3)\, dx_3\right) F_{0\ell}^{(1)} +$$

$$+ \delta\alpha^{(1)} \sum_{\ell=2}^{3} \left(\varepsilon^2 \int_{x^{(-)}}^{0} (x_3 - x_3^{(-)}) L_{1\ell}^{(1)}(\varepsilon x_3)\, dx_3\right) F_{0\ell}^{(1)},$$

$$-\beta \sum_{i=1}^{2} n_i \sum_{j=1}^{2} \lambda_{ij}^{(2)} \partial_j \left(\varepsilon^2 \int_{0}^{x^{(+)}} (x_3 - x_3^{(+)}) L_{11}^{(2)}(\varepsilon x_3)\, dx_3\right) T_0^{(2)} -$$

$$- \delta\alpha^{(2)} \left(\varepsilon^2 \int_{0}^{x^{(+)}} (x_3 - x_3^{(+)}) L_{11}^{(2)}(\varepsilon x_3)\, dx_3\right) T_0^{(2)} =$$

$$= \varepsilon^2 \int\limits_0^{x^{(+)}} (x_3 - x_3^{(+)})(\gamma q_n - \delta\alpha^{(2)} T_\infty)\, dx_3 +$$

$$+ \beta \sum_{i=1}^{2} n_i \sum_{j=1}^{2} \lambda_{ij}^{(2)} \partial_j \sum_{\ell=2}^{3} \left(\varepsilon^2 \int\limits_0^{x^{(+)}} (x_3 - x_3^{(+)}) L_{1\ell}^{(2)}(\varepsilon x_3)\, dx_3 \right) F_{0\ell}^{(2)} +$$

$$+ \delta\alpha^{(2)} \sum_{\ell=2}^{3} \left(\varepsilon^2 \int\limits_0^{x^{(+)}} (x_3 - x_3^{(+)}) L_{1\ell}^{(2)}(\varepsilon x_3)\, dx_3 \right) F_{0\ell}^{(2)}, \quad x_1, x_2 \in \Gamma, \quad (45)$$

где правые части – известные на контуре Γ функции.

Используя первое из равенств (42), вычислим интегралы в левых частях (40), (45) и по-прежнему отбросим слагаемые порядка $O(\varepsilon^5)$, тогда получим следующие граничные условия на кромке:

$$x_3^{(-)} \beta \sum_{i=1}^{2} n_i \sum_{j=1}^{2} \lambda_{ij}^{(1)} \partial_j \left[1 - \frac{1}{6} \varepsilon^2 (x_3^{(-)})^2 \Lambda_1^2 \right] T_0^{(1)} + x_3^{(-)} \delta\alpha^{(1)} \Big[1 -$$

$$- \frac{1}{6} \varepsilon^2 (x_3^{(-)})^2 \Lambda_1^2 \Big] T_0^{(1)} = \int\limits_{x^{(-)}}^{0} (\gamma q_n - \delta\alpha^{(1)} T_\infty)\, dx_3 +$$

$$+ \beta \sum_{i=1}^{2} n_i \sum_{j=1}^{2} \lambda_{ij}^{(1)} \partial_j \sum_{\ell=2}^{3} \left(\int\limits_{x^{(-)}}^{0} L_{1\ell}^{(1)}(\varepsilon x_3)\, dx_3 \right) F_{0\ell}^{(1)} +$$

$$+ \delta\alpha^{(1)} \sum_{\ell=2}^{3} \left(\int\limits_{x^{(-)}}^{0} L_{1\ell}^{(1)}(\varepsilon x_3)\, dx_3 \right) F_{0\ell}^{(1)},$$

$$- x_3^{(+)} \beta \sum_{i=1}^{2} n_i \sum_{j=1}^{2} \lambda_{ij}^{(2)} \partial_j \left[1 - \frac{1}{6} \varepsilon^2 (x_3^{(+)})^2 \Lambda_2^2 \right] T_0^{(2)} - x_3^{(+)} \delta\alpha^{(2)} \Big[1 -$$

$$- \frac{1}{6} \varepsilon^2 (x_3^{(+)})^2 \Lambda_2^2 \Big] T_0^{(2)} = \int\limits_0^{x^{(+)}} (\gamma q_n - \delta\alpha^{(2)} T_\infty)\, dx_3 +$$

$$+ \beta \sum_{i=1}^{2} n_i \sum_{j=1}^{2} \lambda_{ij}^{(2)} \partial_j \sum_{\ell=2}^{3} \left(\int\limits_0^{x^{(+)}} L_{1\ell}^{(2)}(\varepsilon x_3)\, dx_3 \right) F_{0\ell}^{(2)} +$$

$$+ \delta\alpha^{(2)} \sum_{\ell=2}^{3} \left(\int\limits_0^{x^{(+)}} L_{1\ell}^{(2)}(\varepsilon x_3)\, dx_3 \right) F_{0\ell}^{(2)}, \qquad x_1, x_2 \in \Gamma,$$

$$- \frac{\beta (x_3^{(-)})^2}{2} \sum_{i=1}^{2} n_i \sum_{j=1}^{2} \lambda_{ij}^{(1)} \partial_j \left[1 - \frac{1}{4} \varepsilon^2 (x_3^{(-)})^2 \Lambda_1^2 \right] T_0^{(1)} - \delta\alpha^{(1)} \frac{(x_3^{(-)})^2}{2} \Big[1 -$$

$$- \frac{1}{4} \varepsilon^2 (x_3^{(-)})^2 \Lambda_1^2 \Big] T_0^{(1)} = \int\limits_{x^{(-)}}^{0} (x_3 - x_3^{(-)})(\gamma q_n - \delta\alpha^{(1)} T_\infty)\, dx_3 +$$

$$+ \delta\alpha^{(1)} \sum_{\ell=2}^{3} \left(\int\limits_{x^{(-)}}^{0} (x_3 - x_3^{(-)}) L_{1\ell}^{(1)}(\varepsilon x_3)\, dx_3 \right) F_{0\ell}^{(1)} +$$

$$+ \beta \sum_{i=1}^{2} n_i \sum_{j=1}^{2} \lambda_{ij}^{(1)} \partial_j \sum_{\ell=2}^{3} \left(\int\limits_{x^{(-)}}^{0} (x_3 - x_3^{(-)}) L_{1\ell}^{(1)}(\varepsilon x_3)\, dx_3 \right) F_{0\ell}^{(1)},$$

$$\frac{\beta (x_3^{(+)})^2}{2} \sum_{i=1}^{2} n_i \sum_{j=1}^{2} \lambda_{ij}^{(2)} \partial_j \left[1 - \frac{1}{4} \varepsilon^2 (x_3^{(+)})^2 \Lambda_2^2 \right] T_0^{(2)} + \delta\alpha^{(2)} \frac{(x_3^{(+)})^2}{2} \Big[1 -$$

$$- \frac{1}{4} \varepsilon^2 (x_3^{(+)})^2 \Lambda_2^2 \Big] T_0^{(2)} = \int\limits_0^{x^{(+)}} (x_3 - x_3^{(+)})(\gamma q_n - \delta\alpha^{(2)} T_\infty)\, dx_3 +$$

$$+\delta\alpha^{(2)}\sum_{\ell=2}^{3}\left(\int_{0}^{x^{(+)}}(x_3-x_3^{(+)})L_{1\ell}^{(2)}(\varepsilon x_3)\,dx_3\right)F_{0\ell}^{(2)}+$$

$$+\beta\sum_{i=1}^{2}n_i\sum_{j=1}^{2}\lambda_{ij}^{(2)}\partial_j\sum_{\ell=2}^{3}\left(\int_{0}^{x^{(+)}}(x_3-x_3^{(+)})L_{1\ell}^{(2)}(\varepsilon x_3)\,dx_3\right)F_{0\ell}^{(2)},$$

$$x_1,x_2\in\Gamma. \qquad (46)$$

В отличие от (41) контурные граничные условия (46) содержат третьи производные от неизвестных функций при $\beta=1$. Однако соотношения (46) можно преобразовать так, что структура левых частей в двух равенствах будет совпадать с (41) (в этих равенствах будут отсутствовать производные третьего порядка от $T_0^{(1)}$, $T_0^{(2)}$), а в двух оставшихся равенствах по-прежнему будут содержаться третьи производные от неизвестных функций.

Уравнения (43) и граничные условия (46) образуют граничную задачу для определения во втором приближении функций $T_0^{(1)}, T_0^{(2)}$ при задании на лицевых поверхностях двухслойной пластины граничных условий второго рода. При этом если плотность мощности внутренних источников тепла постоянна ($W^{(m)}=\text{const}$) и на обеих лицевых поверхностях заданы условия термоизоляции ($q_n^{(\pm)}=0$) или $q_n^{(\pm)}=\text{const}$ (или в общем случае, когда $\Lambda_1^2 q_n^{(-)}=0$, $\Lambda_2^2 q_n^{(+)}=0$, $\Lambda_m^2 W^{(m)}=0$), то согласно (17) с учетом (42) температура по толщине слоев будет распределена по полиномиальному закону четвертого порядка.

Сравнение граничных задач (38), (41) и (43), (46) показывает, что система (43) имеет вдвое больший порядок, чем (38) (аналогично, и граничные условия (46) имеют больший порядок по сравнению с (41)) как по порядку старших производных, так и по порядку степени сингулярного возмущения, т.е. за уточнение решения задачи теплопроводности приходится расплачиваться усложнением двумерных (по переменным x_1, x_2) граничных задач.

Чтобы получить более точное, чем из граничной задачи (43), (46), распределение температур $T_0^{(1)}, T_0^{(2)}$ на лицевых поверхностях пластины, следует в разложениях операторов $L_{11}^{(m)}, L_{21}^{(m)}$ (см. (15), (18)) удержать большее чем в (42) количество слагаемых. Однако это приведет к еще большему усложнению двумерной граничной задачи по сравнению с (38), (41) и (43), (46).

Качественно аналогичные (35)–(46) результаты получаются и при задании на лицевых поверхностях двухслойной пластины граничных условий первого и третьего рода.

При некоторых граничных условиях (7), заданных на торцевой поверхности пластины со слоями постоянной толщины решение задачи теплопроводности можно получить методом начальных функций в замкнутой аналитической форме. С этой целью рассмотрим прямоугольные в плане пластины длиной $a=1$ и шириной $b\le 1$. Материалы слоев предполагаются однородными ($\lambda_{ij}^{(m)}=\text{const}$), а главные оси физической анизотропии совпадают с направлениями x_i ($\lambda_{12}^{(m)}=\lambda_{23}^{(m)}=\lambda_{13}^{(m)}=0$). В этом случае из (11) следует

$$\Lambda_m^2(\cdot)=\frac{1}{\lambda_{33}^{(m)}}\left(\lambda_{11}^{(m)}\partial_1^2(\cdot)+\lambda_{22}^{(m)}\partial_2^2(\cdot)\right),\qquad 1\le m\le M. \qquad (47)$$

Пусть все торцевые плоскости прямоугольной пластины термоизолированы ($\beta=1$, $\gamma=1$, $q_n=0$, $\delta=0$ в (7)), тогда, задавая в (15) $x_3^{(m)}=0$, $1\le m\le M$, получим для функций $F_1^{(m)}, F_2^{(m)}$ в (17) представление

$$F_i^{(m)}(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{\infty} F_{i,k\ell}^{(m)}(\varepsilon x_3)\cos(æ_k x_1)\cos(\lambda_\ell x_2), \qquad i = 1,2\,, \tag{48}$$

$$æ_k = \frac{1}{a}\pi k, \qquad \lambda_\ell = \frac{1}{b}\pi \ell, \qquad 0 \le x_1 \le a, \qquad 0 \le x_2 \le b\,.$$

Разложим начальные функции $F_{01}^{(m)}$, $F_{02}^{(m)}$ и $F_{03}^{(m)} \equiv W^{(m)}$ в ряды Фурье, аналогичные (48),

$$F_{0i}^{(m)}(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{\infty} F_{0i,k\ell}^{(m)}\cos(æ_k x_1)\cos(\lambda_\ell x_2), \qquad i = 1,2,3\,, \tag{49}$$

где $F_{03,k\ell}^{(m)}$ – известные коэффициенты разложения функции $W^{(m)}$; $F_{01,k\ell}^{(m)}$, $F_{02,k\ell}^{(m)}$ – коэффициенты разложения, подлежащие определению; в случае (31) (или (32)) коэффициенты $F_{02,k\ell}^{(m)}$ (или $F_{01,k\ell}^{(m)}$) известны.

При использовании разложений (48), (49) граничные условия на термоизолированных торцевых плоскостях выполняются тождественно.

Подставим разложения (49) в (17), тогда с учетом (18), (15) из сравнения с (48) получим, что в (48) функции $F_{1,k\ell}^{(1)}$, $F_{2,k\ell}^{(1)}$ имеют вид

$$F_{1,k\ell}^{(m)}(\varepsilon x_3) = F_{01,k\ell}^{(m)}\mathrm{ch}(\varepsilon\gamma_{k\ell}^{(m)}x_3) - F_{02,k\ell}^{(m)}\frac{1}{\gamma_{k\ell}^{(m)}}\mathrm{sh}(\varepsilon\gamma_{k\ell}^{(m)}x_3) -$$

$$- F_{03,k\ell}^{(m)}\frac{1}{(\gamma_{k\ell}^{(m)})^2}(\mathrm{ch}(\varepsilon\gamma_{k\ell}^{(m)}x_3) - 1)\,,$$

$$F_{2,k\ell}^{(m)}(\varepsilon x_3) = -F_{01,k\ell}^{(m)}\gamma_{k\ell}^{(m)}\mathrm{sh}(\varepsilon\gamma_{k\ell}^{(m)}x_3) +$$

$$+ F_{02,k\ell}^{(m)}\mathrm{ch}(\varepsilon\gamma_{k\ell}^{(m)}x_3) + F_{03,k\ell}^{(m)}\frac{1}{\gamma_{k\ell}^{(m)}}\mathrm{sh}(\varepsilon\gamma_{k\ell}^{(m)}x_3)\,, \tag{50}$$

где

$$\gamma_{kl}^{(m)} = \sqrt{\frac{\lambda_{11}^{(m)}æ_k^2 + \lambda_{22}^{(m)}\lambda_\ell^2}{\lambda_{33}^{(m)}}}, \qquad 1 \le m \le M, \qquad k,\ell = 0,1,2,3\ldots. \tag{51}$$

Из условий сопряжения решения (5) с учетом (48), (50) получаем цепочки равенств

$$F_{01,k\ell}^{(m)}\mathrm{ch}(\varepsilon\gamma_{k\ell}^{(m)}x_3) - F_{02,k\ell}^{(m)}\frac{1}{\gamma_{k\ell}^{(m)}}\mathrm{sh}(\varepsilon\gamma_{k\ell}^{(m)}x_3) - F_{01,k\ell}^{(n)}\mathrm{ch}(\varepsilon\gamma_{k\ell}^{(n)}x_3) +$$

$$+ F_{02,k\ell}^{(n)}\frac{1}{\gamma_{k\ell}^{(n)}}\mathrm{sh}(\varepsilon\gamma_{k\ell}^{(n)}x_3) = F_{03,k\ell}^{(m)}(\mathrm{ch}(\varepsilon\gamma_{k\ell}^{(m)}x_3) - 1)\frac{1}{(\gamma_{k\ell}^{(m)})^2} -$$

$$- F_{03,k\ell}^{(n)}(\mathrm{ch}(\varepsilon\gamma_{k\ell}^{(n)}x_3) - 1)\frac{1}{(\gamma_{k\ell}^{(n)})^2}\,,$$

$$-\lambda_{33}^{(m)}\gamma_{k\ell}^{(m)}\mathrm{sh}(\varepsilon\gamma_{k\ell}^{(m)}x_3)F_{01,k\ell}^{(m)} + \lambda_{33}^{(m)}\mathrm{ch}(\varepsilon\gamma_{k\ell}^{(m)}x_3)F_{02,k\ell}^{(m)} +$$

$$+ \lambda_{33}^{(n)}\gamma_{k\ell}^{(n)}\mathrm{sh}(\varepsilon\gamma_{k\ell}^{(n)}x_3)F_{01,k\ell}^{(n)} - \lambda_{33}^{(n)}\mathrm{ch}(\varepsilon\gamma_{k\ell}^{(n)}x_3)F_{02,k\ell}^{(n)} =$$

$$= -F_{03,k\ell}^{(m)}\mathrm{sh}(\varepsilon\gamma_{k\ell}^{(m)}x_3)\frac{1}{\gamma_{k\ell}^{(m)}} + F_{03,k\ell}^{(n)}\mathrm{sh}(\varepsilon\gamma_{k\ell}^{(n)}x_3)\frac{1}{\gamma_{k\ell}^{(n)}}\,,$$

$$x_3 = x_3^{(m,n)}, \qquad n = m+1, \qquad 1 \le m \le M-1\,. \tag{52}$$

Из граничных условий (6), заданных на лицевых плоскостях пластины, с учетом (48), (50) следуют еще два равенства

$$\beta^{(+)}\left[-\lambda_{33}^{(M)}\gamma_{k\ell}^{(M)}\operatorname{sh}(\varepsilon\gamma_{k\ell}^{(M)}x_3)F_{01,k\ell}^{(M)}+\lambda_{33}^{(M)}\operatorname{ch}(\varepsilon\gamma_{k\ell}^{(M)}x_3)F_{02,k\ell}^{(M)}\right]-$$

$$-\delta^{(+)}\alpha^{(+)}\left[\operatorname{ch}(\varepsilon\gamma_{k\ell}^{(M)}x_3)F_{01,k\ell}^{(M)}-(\gamma_{k\ell}^{(M)})^{-1}\operatorname{sh}(\varepsilon\gamma_{k\ell}^{(M)}x_3)F_{02,k\ell}^{(M)}\right]=$$

$$=\gamma^{(+)}q_{n,k\ell}^{(+)}-\delta^{(+)}\alpha^{(+)}T_{\infty,k\ell}^{(+)}-\beta^{(+)}\lambda_{33}^{(M)}(\gamma_{k\ell}^{(M)})^{-1}\operatorname{sh}(\varepsilon\gamma_{k\ell}^{(M)}x_3)F_{03,k\ell}^{(M)}-$$

$$-\delta^{(+)}\alpha^{(+)}(\gamma_{k\ell}^{(M)})^{-2}(\operatorname{ch}(\varepsilon\gamma_{k\ell}^{(M)}x_3)-1)F_{03,k\ell}^{(M)},\ x_3=x_3^{(+)},$$

$$-\beta^{(-)}\left[-\lambda_{33}^{(1)}\gamma_{k\ell}^{(1)}\operatorname{sh}(\varepsilon\gamma_{k\ell}^{(1)}x_3)F_{01,k\ell}^{(1)}+\lambda_{33}^{(1)}\operatorname{ch}(\varepsilon\gamma_{k\ell}^{(1)}x_3)F_{02,k\ell}^{(1)}\right]-$$

$$-\delta^{(-)}\alpha^{(-)}\left[\operatorname{ch}(\varepsilon\gamma_{k\ell}^{(1)}x_3)F_{01,k\ell}^{(1)}-(\gamma_{k\ell}^{(1)})^{-1}\operatorname{sh}(\varepsilon\gamma_{k\ell}^{(1)}x_3)F_{02,k\ell}^{(1)}\right]=$$

$$=\gamma^{(-)}q_{n,k\ell}^{(-)}-\delta^{(-)}\alpha^{(-)}T_{\infty,k\ell}^{(-)}+\beta^{(-)}\lambda_{33}^{(1)}(\gamma_{k\ell}^{(1)})^{-1}\operatorname{sh}(\varepsilon\gamma_{k\ell}^{(1)}x_3)F_{03,k\ell}^{(1)}-$$

$$-\delta^{(-)}\alpha^{(-)}(\gamma_{k\ell}^{(1)})^{-2}(\operatorname{ch}(\varepsilon\gamma_{k\ell}^{(1)}x_3)-1)F_{03,k\ell}^{(1)},\qquad x_3=x_3^{(-)},\qquad (53)$$

где $q_{n,k\ell}^{(\pm)}$, $T_{\infty,k\ell}^{(\pm)}$ – известные коэффициенты разложения заданных функций

$$q_n^{(\pm)}(x_1,x_2)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{\infty}q_{n,k\ell}^{(\pm)}\cos(\text{æ}_k x_1)\cos(\lambda_\ell x_2),$$

$$T_\infty^{(\pm)}(x_1,x_2)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{\infty}T_{\infty,k\ell}^{(\pm)}\cos(\text{æ}_k x_1)\cos(\lambda_\ell x_2).\qquad (54)$$

Правые части системы (52), (53) известны. При фиксированных значениях k, ℓ, система линейных алгебраических уравнений (52), (53) замкнута относительно неизвестных коэффициентов $F_{01,k\ell}^{(m)}$, $F_{02,k\ell}^{(m)}$, $1\le m\le M$. Разрешив эту систему при всех $k,\ell\ge 0$, получим точное решение (48), (50), (51) задачи теплопроводности для слоистой пластины при термоизолированных торцевых поверхностях.

Аналогичное решение можно получить, если на торцевых поверхностях задана температура, изменяющаяся по линейному закону

$$T^{(m)}(\Gamma,x_3)=T_*(x_1,x_2)=T_{01}x_1+T_{02}x_2+T_{00},$$

$$T_{0i}=\text{const},\qquad i=0,1,2,\qquad x_1,x_2\in\Gamma.\qquad (55)$$

В этом случае температуру следует представить в виде (см. (17), (18))

$$T^{(m)}(\mathbf{x})=T_*(x_1,x_2)+F_1^{(m)}(\mathbf{x}),Q^{(m)}(\mathbf{x})\equiv F_2^{(m)}(\mathbf{x}),\qquad 1\le m\le M,\qquad (56)$$

где $F_1^{(m)}$, $F_2^{(m)}$ определяются по схеме (48)–(54), где следует косинусы заменить на синусы. Аналогично определяются поля температур, когда на двух противоположных торцевых плоскостях (например, $x_1=0,x_1=a$) задана температура (например, (55) при $T_{02}=0$), а на других торцевых плоскостях (например, $x_2=0,x_2=b$) – термоизоляция (тогда решение разыскивается в виде (56) с учетом (55) при $T_{02}=0$, а в (48), (49), (54) следует $\cos(\text{æ}_k x_1)$ заменить на $\sin(\text{æ}_k x_1)$).

Отметим, что решение (47)–(54) можно получить иначе, а именно, методом разделения переменных, что свидетельствует о корректности разработанного в настоящем исследовании метода начальных функций.

Работа выполнена при финансовой поддержке Президиума СО РАН (Постановление № 54 от 09.02.06, номер проекта 2.2).

1. *Беляев Н. М., Рядно А. А.* Методы теории теплопроводности: В 2 ч. – Москва: Высш. шк., 1982. – Ч. 1. – 327 с.
2. *Беляев Н. М., Рядно А. А.* Методы теории теплопроводности: В 2 ч. – Москва: Высш. шк., 1982. – Ч. 2. – 304 с.
3. *Власов В. З., Леонтьев Н. Н.* Балки, плиты и оболочки на упругом основании. – Москва: Физматгиз, 1960. – 492 с.
4. *Зино Е. И., Тропп Э. А.* Асимптотические методы в задачах теории теплопроводности и термоупругости. – Ленинград: Изд-во Ленингр. ун-та, 1978. – 224 с.
5. *Немировский Ю. В., Янковский А. П.* Уточнение асимптотических разложений решений задачи теплопроводности анизотропных пластин // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – **48,** № 2. – С. 157–171.
6. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. – Москва: Наука, 1981. – 800 с.

РОЗВ'ЯЗАННЯ СТАЦІОНАРНОЇ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ШАРУВАТИХ АНІЗОТРОПНИХ НЕОДНОРІДНИХ ПЛАСТИН МЕТОДОМ ПОЧАТКОВИХ ФУНКЦІЙ

Сформульовано задачу стаціонарної теплопровідності шаруватих пластин сталої і змінної товщини в просторовій постановці. Методом початкових функцій тривимірну задачу зведено до двовимірної. Для пластин з шарами змінної товщини отримано систему розв'язувальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами. Проаналізовано отримані двовимірні крайові задачі. Для пластин з однорідними шарами сталої товщини побудовано розв'язок в аналітичній формі. Показано, що цей розв'язок співпадає з розв'язком, отриманим за допомогою методу відокремлення змінних.

SOLUTION OF STATIONARY PROBLEM OF THERMAL CONDUCTIVITY OF LAYERED ANISOTROPIC INHOMOGENEOUS PLATES BY METHOD OF INITIAL FUNCTIONS

The problem of stationary thermal conductivity of layered plates of a constant and variable thickness in the space statement is formulated. The three-dimensional problem is reduced by a method of initial functions to the two-dimensional one. For plates with layers of variable thickness the system of clearing equations with floating factors is obtained. The obtained two-dimensional boundary problems are analyzed. For plates with homogeneous layers of constant thickness the solution in an analytic form is built. It is shown, that this solution coincides with the solution obtained by the method of separation of variables.

Ин-т теорет. и прикл. механики
СО РАН, Новосибирск, Россия

Получено
01.05.07