УДК 512.546

Н. М. Пирч

ПРО УЗАГАЛЬНЕНІ РЕТРАКТИ ТА ІЗОМОРФНУ КЛАСИФІКАЦІЮ ВІЛЬНИХ ОБ'ЄКТІВ. I

Досліджуються паралельні узагальнені ретракти, які надалі будуть використовуватися до побудови ізоморфізмів між вільними (абелевими) топологічними групами та вільними локально опуклими просторами.

Вступ. Стаття є продовженням досліджень, розпочатих у працях [4] і [3], де вивчались узагальнені ретракти, пов'язані з продовженнями неперервних відображень у топологічні групи, та їхнє застосування до теорії вільних топологічних груп. У **п. 1** запропоновано деякі загальні методи отримання узагальнених паралельних ретрактів, які надалі будуть використані для побудови M-еквівалентних просторів. У **п. 2** встановлено, що у довільній нетривіальній вільній топологічній групі можна знайти вільний базис, який не є лінійно зв'язним топологічним простором.

Для тихоновського простору X будемо позначати через $F(X)$ вільну топологічну групу над простором X у сенсі Маркова, через $A(X)$ – вільну абелеву топологічну групу над простором X у сенсі Маркова, через $L(X)$ – вільний локально опуклий простір над X, через $F_G(X)$ – вільну топологічну групу у сенсі Ґраєва над простором X, через $A_G(X)$ – вільну абелеву топологічну групу у сенсі Ґраєва над простором X (див. [7]).

Означення 1. Тихоновські простори X та Y називають:

M-*еквівалентними*, якщо їхні вільні топологічні групи $F(X)$ та $F(Y)$ є топологічно ізоморфними (позначення $X \overset{M}{\sim} Y$);

A-*еквівалентними*, якщо вільні абелеві топологічні групи $A(X)$ та $A(Y)$ є топологічно ізоморфними (позначення $X \overset{A}{\sim} Y$);

L-*еквівалентними*, якщо вільні локально опуклі простори $L(X)$ та $L(Y)$ є лінійно гомеоморфними (позначення $X \overset{L}{\sim} Y$).

Нагадаємо, що всі три перелічені відношення є адитивними, тобто з умов $X_1 \overset{R}{\sim} Y_1$ та $X_2 \overset{R}{\sim} Y_2$ випливає умова $X_1 \oplus X_2 \overset{R}{\sim} Y_1 \oplus Y_2$.

Означення 2. Підпростір Y топологічного простору X називають G-*ретрактом* простору X, якщо довільне неперервне відображення з топологічного простору Y у топологічну групу H допускає неперервне продовження на X.

Означення 3. Підпростір Y топологічного простору X називають G_A-*ретрактом* простору X, якщо довільне неперервне відображення з топологічного простору Y в абелеву топологічну групу H допускає неперервне продовження на X.

Означення 4. Підпростір Y топологічного простору X називають L-*ретрактом* простору X, якщо довільне неперервне відображення з топологічного простору Y у лінійний топологічний простір W допускає неперервне продовження на X.

Поняття G-ретракта, G_A-ретракта та L-ретракта можна отримати як часткові випадки поняття F-значного ретракта, якщо як функтор F розглянути функтор вільної топологічної групи, функтор вільної абелевої топологічної групи та функтор вільного локально опуклого простору.

Як встановлено у [4], кожен G-ретракт тихоновського простору є замкненим у цьому просторі. Крім того, якщо підпростір Y є G-ретрактом тихоновського простору X, то підгрупа вільної топологічної групи $F(X)$, алгебраїчно породжена множиною Y, є топологічно ізоморфною вільній топологічній групі простору Y. Підпростір Y топологічного простору X називають P-вкладеним, якщо довільна неперервна псевдометрика, задана на просторі Y, продовжується до неперервної псевдометрики на просторі X. Як встановлено у [5], підпростір Y тихоновського простору X є P-вкладеним тоді й тільки тоді, коли підгрупа $F(X)$, алгебраїчно породжена множиною Y, є топологічно ізоморфною вільній топологічній групі простору Y.

Нехай X − топологічний простір, K_1 та K_2 − його тихоновські підпростори. Говоримо, що підпростори K_1 і K_2 простору X є паралельними G-ретрактами топологічного простору X, якщо існують неперервні відображення $h_1 : X \to F(K_1)$, $h_2 : X \to F(K_2)$ і топологічний ізоморфізм $i : F(K_1) \to F(K_2)$ такі, що

а) $h_1(x) = x$ для всіх $x \in K_1$;

б) $h_2(x) = x$ для всіх $x \in K_2$;

в) $i \circ h_1 = h_2$.

У **п. 1** встановимо, що підпростори K_1 та K_2 простору X є паралельними G-ретрактами топологічного простору X тоді й тільки тоді, коли існують гомоморфні ретракції $R_1 : F(X) \to F(K_1)$ та $R_2 : F(X) \to F(K_2)$ такі, що $R_1 \circ R_2 = R_1$ і $R_2 \circ R_1 = R_2$. Гомоморфні ретракції R_1 та R_2 при цьому називають паралельними. Оскільки відображення R_1, R_2, $R_1 \circ R_2$ і $R_2 \circ R_1$ є гомоморфізмами, то для паралельності ретракцій R_1 і R_2 достатньо перевірити виконання умов $R_1 \circ R_2 = R_1$ і $R_2 \circ R_1 = R_2$ на множині X. Аналогічно вводимо поняття паралельних G_A-ретрактів і паралельних L-ретрактів.

1. Методи побудови паралельних G-ретрактів.

Твердження 1. *Нехай K_1 і K_2 − P-вкладених підпросторів тихоновського простору X. Тоді є еквівалентними такі умови:*

1°) *існують гомоморфні ретракції $R_1 : F(X) \to F(K_1)$ і $R_2 : F(X) \to F(K_2)$ такі, що $R_1 \circ R_2 = R_1$ і $R_2 \circ R_1 = R_2$;*

2°) *існують гомоморфна ретракція $R_1 : F(X) \to F(K_1)$ і топологічний ізоморфізм $i : F(K_1) \to F(K_2)$ такі, що композиція $R_2 = i \circ R_1$ є гомоморфною ретракцією з $F(X)$ на $F(K_2)$;*

3°) *існують гомоморфна ретракція $R_2 : F(X) \to F(K_2)$ і топологічний ізоморфізм $j : F(K_2) \to F(K_1)$ такі, що композиція $R_1 = j \circ R_2$ є гомоморфною ретракцією з $F(X)$ на $F(K_1)$;*

4°) *підпростори K_1 і K_2 є паралельними G-ретрактами простору X.*

Д о в е д е н н я. ***1°*** $\Rightarrow$ ***2°***. Нехай $R_1 : F(X) \to F(K_1)$, $R_2 : F(X) \to F(K_2)$ − паралельні гомоморфні ретракції. Покладемо $i = R_2|_{F(K_1)}$, $j = R_1|_{F(K_2)}$. Тоді композиція $i \circ R_2 = i \circ R_1 = R_2 \circ R_1 = R_2$ є гомоморфною ретракцією з $F(X)$ на $F(K_1)$.

Нехай $x \in F(K_2)$. Тоді $i \circ j(x) = i \circ R_1(x) = R_2 \circ R_1(x) = R_2(x) = x$. Аналогічно доводимо, що $j \circ i(x) = x$ для всіх $x \in F(K_1)$, тобто $i = j^{-1}$, а гомоморфізм i є топологічним ізоморфізмом.

Аналогічно доводимо імплікацію ***1°*** $\Rightarrow$ ***3°***.

2° $\Rightarrow$ ***1°***. Покладемо $R_2 = i \circ R_1$. Тоді $R_1 = i^{-1} \circ R_2$.

Покажемо, що гомоморфні ретракції R_1 та R_2 є паралельними. Дійсно,

$$R_2 \circ R_1 = i \circ R_1 \circ R_1 = i \circ R_1 = R_2,$$

$$R_1 \circ R_2 = i^{-1} \circ R_2 \circ R_2 = i^{-1} \circ R_2 = R_1.$$

Подібно доводимо імплікацію ***3°*** $\Rightarrow$ ***1°***.

2° $\Rightarrow$ ***4°***. Покладемо $h_1 = R_1|_X$, $h_2 = i \circ R_1|_X$.

4° $\Rightarrow$ ***2°***. Продовжимо відображення h_1 та h_2 до неперервних гомоморфізмів $R_1 : F(X) \to F(K_1)$ і $R_2 : F(X) \to F(K_2)$. Тоді відображення R_1 і R_2 є гомоморфними ретракціями. Нехай $x \in X$. Тоді $R_1(x) = h_1(x) = i \circ h_2(x) = i \circ R_2(x)$.

♦

Теорема 1. *Нехай неперервне відображення $p : X \to Y$ тихоновських просторів і підпростори K_1, K_2 простору X такі, що звуження $p|_{K_1}$ і $p|_{K_2}$ є гомеоморфізмами. Якщо підпростори $p(K_1)$ і $p(K_2)$ є паралельними G-ретрактами простору Y, то підпростори K_1, K_2 є паралельними G-ретрактами простору X.*

Д о в е д е н н я. Нехай неперервні відображення $h_1 : Y_1 \to F(p(K_1))$, $h_2 : Y_2 \to F(p(K_2))$ і топологічний ізоморфізм $i : F(p(K_1)) \to F(p(K_2))$ такі, що $h_1(x) = x$ для всіх $x \in p(K_1)$ і $h_2(x) = x$ для всіх $x \in p(K_2)$, а $i \circ h_1 = h_2$. Розглянемо відображення $s_1 = p^{-1}|_{p(K_1)} : p(K_1) \to K_1$, $s_2 = p^{-1}|_{p(K_2)} : p(K_2) \to \to K_2$ і їхні гомоморфні продовження $S_1 = F(p(K_1)) \to F(K_1)$, $S_2 = F(p(K_2)) \to \to F(K_2)$. Оскільки топологія вільної топологічної групи є найсильнішою груповою топологією, що індукує на базисі вихідну топологію, а гомоморфізми S_1 і S_2 є неперервними (а отже, топологія на $G(K_i)$ є не слабшою ніж топологія $F(p(K_i))$), то топологія підгруп $G(K_i) \subseteq F(X)$ співпадає з топологією вільної групи над простором K_i. Таким чином, гомоморфізми S_1 і S_2 є топологічними ізоморфізмами. Розглянемо гомоморфізм $j = S_2 \circ i \circ p : F(K_1) \to \to F(K_2)$, який як композиція топологічних ізоморфізмів є топологічним ізоморфізмом.

Покладемо $f_1 = S_1 \circ h_1 \circ p : X \to F(K_1)$ та $f_2 = S_2 \circ h_2 \circ p : X \to F(K_2)$.

Якщо $x \in K_1$, то $p(x) \in p(K_1)$, а тому $h_1 \circ p(x) = p(x)$ і $f_1(x) = S_1(h_1 \circ p(x)) = = S_1(p(x)) = x$.

Якщо $x \in K_2$, то $p(x) \in p(K_2)$, а тому $h_2 \circ p(x) = p(x)$ і $f_2(x) = S_2(h_2 \circ p(x)) = = S_2(p(x)) = x$.

Одержимо

$$j \circ f_1 = S_2 \circ i \circ p \circ S_1 \circ h_1 \circ p = S_2 \circ i \circ (p \circ S_1) \circ h_1 \circ p =$$
$$= S_2 \circ (i \circ h_1) \circ p = S_2 \circ h_2 \circ p = f_2.$$

♦

Нехай A і B − підпростори топологічного простору X, $C = A \cap B$, $h : A \to B$ − ін'єктивне відображення таке, що $h(x) = x$ для всіх $x \in C$. На множині X введемо відношення еквівалентності «$\sim$» таким чином: $x \sim y$ тоді й тільки тоді, коли $x = y$, або $x \in A$, $y \in B$ і $y = h(x)$. Фактор-простір $X / \sim$ позначимо через X_h.

Теорема 2. *Нехай* K_1 *та* K_2 *− замкнені підпростори топологічного простору* X. *Нехай також існує гомеоморфізм* $h : K_1 \to K_2$ *такий, що* $h(x) = x$ *для всіх* $x \in K_1 \cap K_2$. *Позначимо через* $p : X \to X_h$ *фактор-відображення. Якщо підпростір* $p(K_1) = p(K_2)$ *є* G*-ретрактом тихоновського простору* X_h, *тоді підпростори* K_1 *та* K_2 *є паралельними* G*-ретрактами простору* X.

Д о в е д е н н я. Покажемо, що звуження $p|_{K_1}$ і $p|_{K_2}$ є гомеоморфізмами. Відображення $p|_{K_1}$ та $p|_{K_2}$ є неперервними і бієктивними. Тому достатньо показати їхню замкненість. За факторністю відображення p маємо, що простір $p(K_1)$, для якого $p^{-1}(p(K_1)) = K_1 \cup K_2$, є замкненим у X_h. Згідно з твердженням 2.4.15 з [6], відображення $p|_{K_1 \cup K_2} : K_1 \cup K_2 \to$ $\to p(K_1 \cup K_2)$ є факторним. Нехай A − замкнена підмножина у K_1. Тоді $h(A)$ − замкнена підмножина у K_2, а отже, і у просторі $K_1 \cup K_2$. Таким чином, множина $A \cup h(A)$ є замкненою у $K_1 \cup K_2$.

З огляду на те, що $p^{-1}(p(A)) = A \cup h(A)$, а відображення $p|_{K_1 \cup K_2}$ є факторним, то множина $p(A)$ є замкненою у $p(K_1)$ і відповідно у X_h.

Оскільки $p(K_1) = p(K_2)$, то простори $p(K_1)$ та $p(K_2)$ є паралельними G-ретрактами простору X_h. Тому, за теоремою 1, простори K_1 та K_2 є паралельними G-ретрактами простору X. ♦

Говоримо, що топологічний простір X є абсолютним G-ретрактом, якщо X є G-ретрактом кожного тихоновського простору Y, що містить X як замкнений підпростір.

Наслідок 1. *Нехай* K_1 *та* K_2 *− замкнені підпростори нормального простору* X, *які є абсолютними* G*-ретрактами. Якщо існує гомеоморфізм* $h : K_1 \to K_2$ *такий, що* $h(x) = x$ *для всіх* $x \in K_1 \cap K_2$, *то підпростори* K_1 *та* K_2 *є паралельними* G*-ретрактами простору* X.

Д о в е д е н н я. Оскільки кожен абсолютний G-ретракт у класі тихоновських просторів є компактом, то простори K_1 та K_2 є компактними [3]. Простір $p(K_1) = p(K_2)$ є неперервним бієктивним образом компактного простору K_1 і, крім того, є підпростором тихоновського простору X_h, а тому є гомеоморфним до простору K_1.

Покажемо, що факторне відображення p є замкненим. Для цього достатньо показати, що для кожної замкненої множини $A \subseteq X$ множина $p^{-1}(p(A))$ є замкненою в X. Це очевидним чином випливає з формули $p^{-1}(p(A)) = A \cup h(A \cap K_1) \cup h^{-1}(A \cap K_2)$. Простір X_h, як замкнений образ нормального простору X, є нормальним.

З компактності простору $p(K_1)$ випливає його замкненість у просторі X_h, а з того, що простір $p(K_1)$ є гомеоморфним до простору K_1, тобто є абсолютним G-ретрактом, випливає, що підпростір $p(K_1)$ є G-ретрактом простору X_h. ♦

Наслідок 2. *Нехай підпростір* K *є* G*-ретрактом тихоновського простору* X, *а* K_1 *− гомеоморфна копія простору* K, $Y = X \oplus K_1$. *Тоді підпростори* K_1 *і* K *є паралельними* G*-ретрактами простору* Y.

Нехай $\{(X_i, a_i) : i \in I\}$ – сім'я топологічних просторів з відміченими точками. Тоді фактор-простір $\underset{i\in I}{\oplus} X_i/(\underset{i\in I}{\oplus}\{a_i\})$ називають букетом сім'ї топологічних просторів $\{(X_i, a_i) : i \in I\}$ з відміченими точками і позначають $\underset{i\in I}{\vee}\{(X_i, a_i) : i \in I\}$.

Наслідок 3. *Нехай підпростір* K *є* G*-ретрактом тихоновського простору* X, $h : K \to K_1$ – *деякий гомеоморфізм,* $Y = (X, a) \vee (K_1, h(a))$. *Тоді підпростори* K_1 *і* K *є паралельними* G*-ретрактами простору* Y.

Теорема 3. *Нехай підпростори* K_i *та* T_i *є паралельними* G*-ретрактами простору* X_i *для кожного* $i \in I$. *Тоді підпростори* $K = \underset{i\in I}{\oplus} K_i$ *та* $T = \underset{i\in I}{\oplus} T_i$ *є паралельними* G*-ретрактами простору* $\underset{i\in I}{\oplus} X_i$.

Д о в е д е н н я. Нехай $R_i : F(X_i) \to F(K_i)$, $\rho_i : F(X_i) \to F(T_i)$ – гомоморфні ретракції такі, що $R_i \circ \rho_i = R_i$, $\rho_i \circ R_i = \rho_i$.

Розглянемо відображення $R' : X \to F(K)$, поклавши $R'(x) = R_i(X) \in \in F(K_i) \subseteq F(K)$ для $x \in X_i$. Розглянемо також відображення $\rho' : X \to F(T)$, поклавши $\rho'(x) = \rho_i(X) \in F(T_i) \subseteq F(T)$ для $x \in X_i$. Нехай $R : F(X) \to F(K)$, $\rho : F(X) \to F(T)$ – гомоморфні продовження відображень R' і ρ'.

Зауважимо, що $R|_{F(X_i)} = R_i$, $\rho|_{F(X_i)} = \rho_i$.

Нехай $x \in K_i \subseteq K$. Тоді $R(x) = R_i(x) = x$, тобто $R(x) = x$ для всіх $x \in K$.

Подібно встановлюємо, що $\rho(x) = x$ для всіх $x \in T$, тобто відображення $R : F(X) \to F(K)$ і $\rho : F(X) \to F(T)$ є гомоморфними ретракціями.

Нехай $x \in X_i \subseteq X$. Тоді $R \circ \rho(x) = R \circ \rho_i(x) = R_i \circ \rho_i(x) = R_i(x) = R(x)$.

Подібно доводимо, що $\rho \circ R(x) = \rho(x)$ для всіх $x \in X$, тобто гомоморфні ретракції R та ρ є паралельними. ♦

Теорема 4. *Нехай підпростори* K_1 *та* K_2 *є паралельними* G*-ретрактами простору* X, *а* Z – *тихоновький простір такий, для якого виконується одна з умов:*

(***i***) *простір* Z *є локально компактним;*

(***ii***) *простори* $K_1 \times Z$ *та* $K_2 \times Z$ *є* k*-просторами.*

Тоді підпростори $K_1 \times Z$ *та* $K_2 \times Z$ *є паралельними* G*-ретрактами простору* $X \times Z$.

Д о в е д е н н я. Оскільки підпростори K_1 та K_2 є G-ретрактами простору X, то при виконанні принаймні однієї з умов (***i***) чи (***ii***), згідно з твердженням 4 з роботи [4], маємо, що підпростори $K_1 \times Z$ та $K_2 \times Z$ є G-ретрактами простору $X \times Z$.

Нехай $R_1 : F(X) \to F(K_1)$ та $R_2 : F(X) \to F(K_2)$ – гомоморфні ретракції такі, що $R_1 \circ R_2 = R_1$, $R_2 \circ R_1 = R_2$. Нехай $x \in X$ і $R_1(x) = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_n^{\varepsilon_n}$. Розглянемо відображення $t_1 : X \times Z \to F(K_1 \times Z)$, поклавши $t_1(x, z) = = (x_1, z)^{\varepsilon_1} (x_2, z)^{\varepsilon_2} \dots (x_n, z)^{\varepsilon_n}$. Оскільки простір Z є локально компактним або простір $K_1 \times Z$ є k-простором, то, за теоремою 1 з [1], маємо, що відображення t_1 є неперервним. Аналогічно, за відображенням R_2 можемо означити неперервне відображення $t_2 : X \times Z \to F(K_2 \times Z)$. Нехай

$T_1 : F(X \times Z) \to F(K_1 \times Z)$, $T_2 : F(X \times Z) \to F(K_2 \times Z)$ − гомоморфні продовження відображень t_1 та t_2.

Нехай $(x, z) \in K_1 \times Z$. Оскільки $x \in K_1$, то $R_1(x) = x$. За побудовою, $T_1(x, z) = t_1(x, z) = (x, z)$.

Таким чином, відображення T_1 є гомоморфною ретракцією з $F(X \times Z)$ на $F(K_1 \times Z)$.

Аналогічно встановлюємо, що відображення T_2 є гомоморфною ретракцією з $F(X \times Z)$ на $F(K_2 \times Z)$. Залишається перевірити, що гомоморфні ретракції T_1 і T_2 є паралельними.

Для кожного $a \in Z$ розглянемо відображення $i_a : F(X) \times \{a\} \to$ $\to F(X \times \{a\})$, означене як

$$i_a(y_1^{\varepsilon_1} y_2^{\varepsilon_2} \ldots y_n^{\varepsilon_n}, a) = (y_1, a)^{\varepsilon_1} (y_2, a)^{\varepsilon_2} \ldots (y_n, a)^{\varepsilon_n}.$$

Нехай $(x, z) \in X \times Z$ і $R_1(x) = y_1^{\varepsilon_1} y_2^{\varepsilon_2} \ldots y_n^{\varepsilon_n}$. За побудовою $T_1(x, z) =$ $= i_z(R_1(x), z)$ і $T_2(x, z) = i_z(R_2(x), z)$, тобто $T_1(x, z) = (y_1, z)^{\varepsilon_1} (y_2, z)^{\varepsilon_2} \ldots$ $\ldots (y_n, z)^{\varepsilon_n}$. Таким чином,

$$T_2 \circ T_1(x, z) = T_2\big((y_1, z)^{\varepsilon_1} (y_2, z)^{\varepsilon_2} \ldots (y_n, z)^{\varepsilon_n}\big) =$$

$$= \big(T_2(y_1, z)\big)^{\varepsilon_1} \big(T_2(y_2, z)\big)^{\varepsilon_2} \ldots \big(T_2(y_n, z)\big)^{\varepsilon_n} =$$

$$= \big(i_z \circ R_2(y_1, z)\big)^{\varepsilon_1} \big(i_z \circ R_2(y_2, z)\big)^{\varepsilon_2} \ldots \big(i_z \circ R_2(y_n, z)\big)^{\varepsilon_n} =$$

$$= i_z\big(R_2(y_1)\big)^{\varepsilon_1} \big(R_2(y_2)\big)^{\varepsilon_2} \ldots \big(R_2(y_n), z\big)^{\varepsilon_n} =$$

$$= i_z\big(R_2 \circ R_1(y), z\big) = i_Z\big(R_2(y), z\big) = T_2(x, z).$$

Подібно перевіряємо, що $T_1 \circ T_2(x, z) = T_1(x, z)$ для всіх $(x, z) \in X \times Z$. ♦

Твердження 2. *Якщо підпростори K_1 та K_2 є паралельними G-ретрактами простору Y, а Y є G-ретрактом простору X, то підпростори K_1 та K_2 є паралельними G-ретрактами простору X.*

Д о в е д е н н я. $R_1 : F(Y) \to F(K_1)$ та $R_2 : F(Y) \to F(K_2)$ − гомоморфні ретракції, такі, що $R_1 \circ R_2 = R_1$, $R_2 \circ R_1 = R_2$. Нехай також $R : F(X) \to F(Y)$ − гомоморфна ретракція. Покладемо $T_1 = R_1 \circ R$, $T_2 =$ $= R_2 \circ R$. Нехай $x \in K_1$, тоді $T_1(x) = R_1 \circ R(x) = R_1(x) = x$. Аналогічно, якщо $x \in K_2$, тоді $T_2(x) = R_2 \circ R(x) = R_2(x) = x$. Отже, відображення T_1 і T_2 є гомоморфними ретракціями.

Покажемо, що гомоморфні ретракції T_1 і T_2 є паралельними. Нехай $x \in X$. Тоді $T_1 \circ T_2(x) = R_1 \circ R \circ R_2 \circ R(x)$. Оскільки $R_2 \circ R(x) \in F(Y)$, то $R \circ R_2 \circ R(x) = R_2 \circ R(x)$, а тому

$$T_1 \circ T_2(x) = R_1 \circ R \circ R_2 \circ R(x) = R_1 \circ R_2 \circ R(x) = R_1 \circ R(x) = T_1(x).$$

Аналогічно перевіряємо, що $T_2 \circ T_1(x) = T_2(x)$ для всіх $x \in X$. ♦

Твердження 3. *Нехай $Y \subseteq X$. Якщо підпростори $K_1 \subseteq Y$ та $K_2 \subseteq Y$ є паралельними G-ретрактами простору X, то підпростори K_1 та K_2 є паралельними G-ретрактами простору Y.*

Д о в е д е н н я твердження 3 випливає з теореми 1, якщо за відображення p взяти вкладення $Y \to X$. ♦

З тверджень 2 і 3 випливає

Наслідок 4. *Нехай* K_1 *та* K_2 *є підпросторами простору* Y*, а* Y *є* G*-ретрактом простору* X*. Підпростори* K_1 *та* K_2 *є паралельними* G*-ретрактами простору* Y *тоді й тільки тоді, коли підпростори* K_1 *та* K_2 *є паралельними* G*-ретрактами простору* X*.*

Паралельні ретракти тихоновського простору є гомеоморфними просторами. З означення паралельних G-ретрактів випливає, що підпростори, які є паралельними G-ретрактами тихоновського простору, є M-еквівалентними. Покажемо, що існують негомеоморфні паралельні G-ретракти.

Теорема 5. *Нехай підпростір* X_1 *є* G*-ретрактом простору* X*, підпростір* Y_1 *є* G*-ретрактом простору* Y*, а простори* X_1 *та* Y_1 *є M-еквівалентними. Тоді підпростори* X_1 *та* Y_1 *є паралельними* G*-ретрактами простору* $Z = X \oplus Y$*.*

Д о в е д е н н я. Нехай $R_1 : F(X) \to F(X_1)$, $R_2 : F(Y) \to F(Y_1)$ − гомоморфні ретракції, $i : F(X_1) \to F(Y_1)$ − топологічний ізоморфізм. Означимо неперервне відображення $t_1 : Z \to F(X_1)$, поклавши $t_1(z) = R_1(z)$, якщо $z \in X$, і $t_1(z) = i^{-1} \circ R_2(z)$, якщо $z \in Y$. Означимо також неперервне відображення $t_2 : Z \to F(Y_1)$, поклавши $t_2(z) = R_2(z)$, якщо $z \in Y$, і $t_2(z) = i \circ R_1(z)$, якщо $z \in X$. Продовжимо відображення t_1 і t_2 до неперервних гомоморфізмів $T_1 : F(Z) \to F(X_1)$ і $T_2 : F(Z) \to F(Y_1)$. Нехай $x \in X_1$. Тоді $T_1(x) = t_1(x) = R_1(x) = x$. Якщо ж $x \in Y_1$, то $T_2(x) = t_2(x) = R_2(x) = x$. Тобто гомоморфізми T_1 і T_2 є гомоморфними ретракціями. Покажемо, що $T_1 \circ T_2(z) = T_1(z)$ для всіх $z \in Z$.

Нехай $z \in X$. Тоді $T_2(z) = i(z)$, тому

$$T_1 \circ T_2(z) = i^{-1} \circ R_2(i \circ R_1(z)) = i^{-1} \circ i \circ R_1(z) = R_1(z) = t_1(z) = T_1(z).$$

Якщо ж $z \in Y$, то $T_2(z) = R_2(z)$, а тому

$$T_1 \circ T_2(z) = i^{-1} \circ R_2 \circ R_2(z) = i^{-1} \circ R_2(z) = T_1(z).$$

Аналогічно перевіряємо, що $T_2 \circ T_1(z) = T_2(z)$ для всіх $z \in Z$.

Таким чином, гомоморфні ретракції T_1 і T_2 є паралельними. ♦

Поклавши $X_1 = X$ та $Y_1 = Y$ у твердженні 3, отримаємо

Наслідок 5. *Нехай* X *та* Y − M*-еквівалентні простори. Тоді* X *та* Y *є паралельними* G*-ретрактами простору* $Z = X \oplus Y$*.*

Оскільки існують негомеоморфні M-еквівалентні простори, то існують негомеоморфні паралельні G-ретракти.

Зауваження 1. Усі теореми, твердження і наслідки цього розділу є слушними також для G_A-ретрактів та L-ретрактів.

Приклад 1. У роботі [1] побудовано приклад топологічних просторів X, Y та Z таких, що простори X та Y є M-еквівалентними, але простори $X \times Z$ та $Y \times Z$ не є M-еквівалентними. Тоді, за наслідком 5, будемо мати, що підпростори $K_1 = X$ та $K_2 = Y$ є паралельними G-ретрактами простору $T = X \oplus Y$, але підпростори $K_1 \times Z$ та $K_2 \times Z$ не є паралельними G-ретрактами простору $T \times Z$.

Приклад 2. У роботі [1] побудовано приклад топологічних просторів X та Y таких, що простори X та Y є M-еквівалентними, але простори X^2 та Y^2 не є M-еквівалентними. Тоді, згідно з наслідком 5, маємо, що підпростори $K_1 = X$ та $K_2 = Y$ є паралельними G-ретрактами простору $T = X \oplus Y$, але підпростори K_1^2 та K_2^2 не є паралельними G-ретрактами простору T^2.

2. M-еквівалентність і лінійна зв'язність.

Лема 1. *Нехай X, Y та Z − тихоновські простори, такі, що $X \overset{M}{\sim} Y$. Тоді $X \vee Z \overset{M}{\sim} Y \vee Z$.*

Д о в е д е н н я. Скориставшись теоремою 3 з роботи [2], отримаємо

$$F(X \vee Z) \cong F(X) * F_G(Z) \cong F(Y) * F_G(Z) \cong F(Y). \qquad \blacklozenge$$

Теорема 6. *Кожен неодноточковий тихоновський простір X є M-еквівалентний до деякого тихоновського простору, який не є лінійно зв'язним.*

Д о в е д е н н я. Нехай $a, b \in X$ − деякі відмінні точки простору X. Якщо не існує вкладення $t : I \to X$ такого, що $t(0) = a$, $t(1) = b$, то простір X не є лінійно зв'язним і теорему доведено. Тому припустимо протилежне. Нехай існує вкладення $t : I \to X$ таке, що $t(0) = a$, $t(1) = b$. Оскільки простір $t(I)$ є абсолютним ретрактом, то $X \overset{M}{\sim} \big(X/t(I)\big) \vee I$ (див [8]). Оскільки простір I є M-еквівалентним до простору $I \vee I$, то за лемою 2 маємо, що $X/t(I) \vee I \overset{M}{\sim} X/t(I) \vee I \vee I \overset{M}{\sim} X \vee I$. Як встановлено у [8], простір I є M-еквівалентний до підпростору евклідової площини

$$T = \{(0, t) \mid t \in [-1, 1]\} \cup \{(t, \sin(\pi/2t)) \mid t \in (0, 1]\}.$$

Згідно з лемою 2 отримаємо, що $X \vee I \overset{M}{\sim} X \vee T$. Простір $X \vee T$ містить ретракт T, який не є лінійно зв'язним, а отже, сам не є лінійно зв'язним (див. вправу 6.3.9 (b) з [6]). $\blacklozenge$

Таким чином, у довільній нетривіальній вільній топологічній групі, вільній абелевій топологічній групі та вільному локально опуклому просторі можна вибрати вільний базис, який не є лінійно зв'язним.

Теорема 7. *Для кожного тихоновського простору X, що містить не менше як n точок, існує M-еквівалентний до нього простір Y, у якому можна вибрати n точок $y_1, y_2, \ldots, y_n \in Y$ таких, що для жодної пари точок $y_i, y_j \in Y$ не існує вкладення $t : I \to Y$ такого, що $t(0) = y_i$, $t(1) = y_j$.*

Д о в е д е н н я. Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ − довільні точки. Якщо для жодної пари точок $x_i, x_j \in Y$ не існує вкладення $t : I \to X$ такого, що $t(0) = x_i$, $t(1) = x_j$, то теорему доведено. Припустимо протилежне. Якщо існує деяке вкладення $t : I \to X$, то, застосувавши n разів міркування з доведення теореми 6, отримаємо, що простір X є M-еквівалентний до простору $Y = (X, x_0) \vee (T_1, t_1) \vee (T_2, t_2) \vee \ldots \vee (T_{n-1}, t_{n-1})$, де T_i, $i = 1, \ldots, n$, − гомеоморфні копії простору T з теореми 6. Розглянемо підпростори $K_1 = \{(0, t) \mid t \in [-1, 1]\}$ та $K_2 = \{(t, \sin(\pi/2t)) \mid t \in (0,1]\}$ простору T. Для довільних точок $a \in K_1$, $b \in K_2$ не існує вкладення $t : I \to T$ такого, що $t(0) = a$, $t(1) = b$. Таким чином, у просторі T_i можна вибрати точку $y_i \in T_i$ таку, що не існує вкладення $t : I \to T_i$ такого, що $t(0) = t_i$, $t(1) = y_i$. Оскільки підпростори T_i є замкненими в Y, а простір $Y \setminus \{x_0\}$ є прямою сумою своїх підпросторів $X \setminus \{x_0\}$ та $T_i \setminus \{t_i\}$, то простір Y та його точки $x_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ задовольняють умови, вказані у формулюванні теореми. ♦

Зауваження 2. Всі теореми цього розділу та їхні наслідки залишаться слушними, якщо в усіх їхніх формулюваннях поняття G-ретракта замінити на поняття G_A-ретракта (L-ретракта), а відношення M-еквівалентності – відповідно на відношення A-еквівалентності (L-еквівалентності).

1. *Окунев О. Г.* *M*-эквивалентность произведений // Тр. Моск. мат. об-ва. – 1995. – **56**. – С. 192–205.
2. *Пирч Н. М.* Про вільні добутки паратопологічних груп та вільні паратопологічні групи // Вісн. нац. ун-ту «Львів. політехніка». Сер. Фіз.-мат. науки. – 2011. – № 696. – С. 20–25.
3. *Пирч Н. М.* Узагальнені ретракти і ізоморфізми вільних топологічних груп // Мат. студії. – 2010. – **33**, № 1. – С. 29–38.
4. *Пирч Н. М.* Узагальнені ретракти, пов'язані з топологічними групами // Вісн. нац. ун-ту «Львів. політехніка». Сер. Фіз.-мат. науки. – 2007. – № 601. – С. 54–58.
5. *Сипачева О. В.* Топология свободной топологической группы // Фундам. и прикл. математика. – 2003. – **9**, № 2. – С. 99–204.
   Те саме: *Sipacheva O. V.* The topology of free topological groups // J. Math. Sci. – 2005. – **131**, No. 4. – P. 5765–5838.
6. *Энгелькинг Р.* Общая топология. – Москва: Мир, 1986. – 751 с.
   Те саме: *Engelking R.* General topology. – Warszawa: PWN, 1977.
7. *Arkhangel'skiĭ A. V., Tkachenko M.* Topological groups and related structures. – Amsterdam–Paris: Atlantis Press, 2008. – xiv + 781 p.
8. *Okunev O. G.* A method for constructing examples of *M*-equivalent spaces // Topology Appl. – 1990. – **36**, No. 2. – P. 157–171; Correction // Topology Appl. – 1993. – **49**. – P. 191–192.

ОБ ОБОБЩЕННЫХ РЕТРАКТАХ И ИЗОМОРФНОЙ КЛАССИФИКАЦИИ СВОБОДНЫХ ОБЪЕКТОВ. I

Исследуются параллельные обобщенные ретракты, которые в дальнейшем будут использоваться при построении изоморфизмов между свободными (абелевыми) топологическими группами и свободными локально выпуклыми пространствами.

ON GENERALIZED RETRACTS AND ISOMORPHIC CLASSIFICATION OF FREE OBJECTS. I

The parallel generalized retracts which will be further used for constructing isomorphisms between free (abelian) topological groups and free locally convex spaces are studied.

Укр. акад. друкарства, Львів

Одержано
29.05.14