УДК 512.643.4

Н. Б. Ладзоришин

# ЦІЛОЧИСЛОВІ РОЗВ'ЯЗКИ МАТРИЧНИХ ЛІНІЙНИХ ОДНОСТОРОННІХ І РІЗНОСТОРОННІХ РІВНЯНЬ НАД КВАДРАТИЧНИМИ КІЛЬЦЯМИ

*Для матричних лінійних рівнянь $AX + BY = C$ і $AX + YB = C$ над квадратичними кільцями $\mathbb{Z}[\sqrt{k}]$ встановлено необхідні та достатні умови існування цілочислових розв'язків, тобто розв'язків $X$, $Y$ над кільцем цілих чисел $\mathbb{Z}$. Наведено критерій єдиності цілочислових розв'язків цих рівнянь і спосіб їх побудови.*

Матричні лінійні рівняння $AX + BY = C$ і $AX + YB = C$, де $A$, $B$, $C$ – матриці над різними областями (над полями, кільцями поліномів та іншими кільцями), знаходять застосування у багатьох прикладних задачах, зокрема, теорії керування, теорії динамічних систем [6, 9–11, 15, 17].

Відомі критерії існування та деякі способи знаходження розв'язків таких матричних лінійних рівнянь над полями [12], кільцями поліномів [9], кільцями головних ідеалів [13]. Встановлені також умови єдиності, у певному розумінні, розв'язків цих рівнянь над кільцями поліномів [1, 3, 5] та деякими іншими кільцями [7].

У цій статті розглядаються такі рівняння над квадратичними кільцями, зокрема, досліджуються цілочислові розв'язки, тобто розв'язки $X$, $Y$, які є матрицями над кільцем цілих чисел $\mathbb{Z}$. Встановлюються необхідні та достатні умови існування і єдиності таких розв'язків.

Нехай $\mathbb{Z}$ – кільце цілих чисел, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 1$ і $k$ не ділиться на квадрат простого числа. Тоді $\mathbb{K} = \mathbb{Z}[\sqrt{k}]$ – квадратичне кільце, яке складається з елементів вигляду

$$\mathbb{Z}[\sqrt{k}] = \{a + b\sqrt{k},\ a, b \in \mathbb{Z}\}, \qquad \text{якщо } k \equiv 2, 3 \pmod 4,$$

$$\mathbb{Z}[\sqrt{k}] = \left\{ \frac{a}{2} + \frac{b}{2}\sqrt{k},\ a, b \in \mathbb{Z},\ 2 \mid (a - b) \right\}, \qquad \text{якщо } k \equiv 1 \pmod 4.$$

Відомо, що існує скінченна кількість евклідових квадратичних кілець, які, очевидно, є кільцями головних ідеалів [8]. Однак кільця $\mathbb{Z}[\sqrt{k}]$ при $k = -19, -43, -67, -163$ є кільцями головних ідеалів, але не є евклідовими. Існують також квадратичні кільця, які не є кільцями головних ідеалів, наприклад, кільце $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

Надалі через $M(m, n, \mathbb{K})$ і $M(n, \mathbb{K})$ позначатимемо множини $(m \times n)$- і $(n \times n)$-матриць над кільцем $\mathbb{K}$, відповідно. Нехай $A \in M(m, n, \mathbb{K})$, $C \in M(m, \ell, \mathbb{K})$. Тоді ці матриці можна записати у вигляді

$$A = A_1 + A_2\sqrt{k}, \qquad C = C_1 + C_2\sqrt{k}, \qquad \text{якщо } k \equiv 2, 3 \pmod 4, \tag{1}$$

$$A = \frac{1}{2}(A_1 + A_2\sqrt{k}), \qquad C = \frac{1}{2}(C_1 + C_2\sqrt{k}), \qquad \text{якщо } k \equiv 1 \pmod 4, \tag{2}$$

де $A_i \in M(m, n, \mathbb{Z})$, $C_i \in M(m, \ell, \mathbb{Z})$, $i = 1, 2$.

**Лема 1.** *Матричне рівняння $AX = C$ над квадратичним кільцем $\mathbb{K}$ з матрицями $A$, $C$ вигляду (1) або (2) має розв'язок $X \in M(n, \ell, \mathbb{K})$ тоді й тільки тоді, коли матриці*

$$\left\| \begin{matrix} A_1 & A_2 k & \tilde{C}_1 \\ A_2 & A_1 & \tilde{C}_2 \end{matrix} \right\| \qquad \text{і} \qquad \left\| \begin{matrix} A_1 & A_2 k & \mathbf{0} \\ A_2 & A_1 & \mathbf{0} \end{matrix} \right\|,$$

*де*

$$\tilde{C}_i = \begin{cases} C_i, & k \equiv 2,3 \pmod 4, \\ 2C_i, & k \equiv 1 \pmod 4, \end{cases} \qquad i = 1,2,$$

*є еквівалентними над кільцем цілих чисел* $\mathbb{Z}$, *тобто, коли інваріантні множники цих матриць збігаються.*

*Розв'язок матричного рівняння* $AX = C$ *єдиний тоді й тільки тоді, коли* $m \geq n$ *і* $\operatorname{rang}\left\| \begin{matrix} A_1 & A_2k \\ A_2 & A_1 \end{matrix} \right\| = 2n$.

Д о в е д е н н я. Нехай $k \equiv 2,3 \pmod 4$. Запишемо невідому матрицю у вигляді $X = X_1 + X_2\sqrt{k}$, де $X_i \in M(n, \ell, \mathbb{Z})$, $i = 1,2$. Підставивши в рівняння $AX = C$ замість матриць $A$, $C$ вирази з (1), отримаємо

$$(A_1 + A_2\sqrt{k})X_1 + (A_1\sqrt{k} + A_2k)X_2 = C_1 + C_2\sqrt{k}.$$

З цієї рівності легко записати систему матричних лінійних рівнянь

$$A_1X_1 + A_2X_2k = C_1,$$

$$A_2X_1 + A_1X_2 = C_2, \tag{3}$$

з якої можемо одержати матричне рівняння над кільцем цілих чисел $\mathbb{Z}$:

$$\left\| \begin{matrix} A_1 & A_2k \\ A_2 & A_1 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} X_1 \\ X_2 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} C_1 \\ C_2 \end{matrix} \right\|. \tag{4}$$

Легко переконатися, що матричні рівняння $AX = C$ і (4) еквівалентні, тобто рівняння $AX = C$ над квадратичним кільцем має розв'язок тоді й тільки тоді, коли є розв'язним рівняння (4) над кільцем цілих чисел і кожному розв'язку рівняння (4) відповідає розв'язок рівняння $AX = C$, і навпаки.

З огляду на результати праці [2] матричне рівняння (4) має розв'язок над $\mathbb{Z}$ тоді й тільки тоді, коли матриці

$$\left\| \begin{matrix} A_1 & A_2k & C_1 \\ A_2 & A_1 & C_2 \end{matrix} \right\| \quad \text{і} \quad \left\| \begin{matrix} A_1 & A_2k & \mathbf{0} \\ A_2 & A_1 & \mathbf{0} \end{matrix} \right\|$$

еквівалентні.

Якщо $k \equiv 1 \pmod 4$, то, враховуючи (2), з рівняння $AX = C$ отримаємо рівняння

$$\frac{1}{2}(A_1 + A_2\sqrt{k})\frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}(A_1\sqrt{k} + A_2k)\frac{1}{2}X_2 = \frac{1}{2}(C_1 + C_2\sqrt{k}).$$

Помноживши обидві частини цього рівняння на 4, зведемо отримане рівняння до еквівалентного матричного рівняння

$$\left\| \begin{matrix} A_1 & A_2k \\ A_2 & A_1 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} X_1 \\ X_2 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 2C_1 \\ 2C_2 \end{matrix} \right\|. \tag{5}$$

Застосувавши аналогічні міркування, як для випадку $k \equiv 2,3 \pmod 4$, завершимо доведення необхідних і достатніх умов існування розв'язку матричного лінійного рівняння $AX = C$ над кільцем $\mathbb{K}$.

Нехай матричне рівняння $AX = C$, де $A$, $C$ − матриці вигляду (1) або (2), має розв'язок. Згідно з [16], матричне рівняння (4) має єдиний розв'язок $\left\| \begin{matrix} X_1 \\ X_2 \end{matrix} \right\|$ тоді й тільки тоді, коли $\operatorname{rang}\left\| \begin{matrix} A_1 & A_2k \\ A_2 & A_1 \end{matrix} \right\| = 2n$. Очевидно, що ця умова єдиності розв'язку справджується також і для матричного рівняння (5). Отже, рівняння $AX = C$ має єдиний розв'язок

$$X = \begin{cases} X_1 + X_2\sqrt{k}, & k \equiv 2,3 \pmod 4, \\ \frac{1}{2}(X_1 + X_2\sqrt{k}), & k \equiv 1 \pmod 4, \end{cases} \qquad X_1, X_2 \in M(n,\ell,\mathbb{Z}),$$

тоді й тільки тоді, коли $\operatorname{rang}\begin{Vmatrix} A_1 & A_2 k \\ A_2 & A_1 \end{Vmatrix} = 2n$. Лему доведено. ♦

**Лема 2.** *Матричне рівняння* $AX = C$ *над квадратичним кільцем* $\mathbb{K}$ *з матрицями* $A$, $C$ *вигляду* (1) *або* (2) *має цілочисловий розв'язок* $X_0 \in$ $\in M(n,\ell,\mathbb{Z})$ *тоді й тільки тоді, коли матриці*

$$\begin{Vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{Vmatrix} \quad і \quad \begin{Vmatrix} A_1 & \mathbf{0} \\ A_2 & \mathbf{0} \end{Vmatrix}$$

*еквівалентні. Цілочисловий розв'язок цього рівняння є єдиним тоді й тільки тоді, коли* $m \ge n$ *і* $\operatorname{rang}\begin{Vmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Vmatrix} = n$.

Д о в е д е н н я. Нехай $k \equiv 2,3 \pmod 4$. Запишемо, як і у лемі 1, невідому матрицю $X \in M(n,\ell,\mathbb{K})$ у вигляді $X = X_1 + X_2\sqrt{k}$, де $X_i \in$ $\in M(n,\ell,\mathbb{Z})$, $i = 1,2$. Поклавши $X_2 = 0$, з рівняння $AX = C$ можна легко отримати матричне рівняння над кільцем цілих чисел $\mathbb{Z}$:

$$\begin{Vmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Vmatrix} X_1 = \begin{Vmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Vmatrix}, \tag{6}$$

яке має розв'язок тоді й тільки тоді, коли матриці $\begin{Vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{Vmatrix}$ і $\begin{Vmatrix} A_1 & \mathbf{0} \\ A_2 & \mathbf{0} \end{Vmatrix}$ еквівалентні.

Якщо $k \equiv 1 \pmod 4$, то невідому матрицю $X \in M(n,\ell,\mathbb{K})$ запишемо як $X = \frac{1}{2}(X_1 + X_2\sqrt{k})$. Нехай $X_2 = 0$. Зауважимо, що у цьому випадку $X_1 = 2\tilde{X}_1$, оскільки, за визначенням елементів над квадратичними кільцями, всі елементи матриці $X_1 - X_2$ діляться на 2. Аналогічно, як у попередній лемі, звівши матричне рівняння $AX = C$ до вигляду (5) і врахувавши, що $X_1 = 2\tilde{X}_1$, отримаємо

$$2\begin{Vmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Vmatrix} \tilde{X}_1 = \begin{Vmatrix} 2C_1 \\ 2C_2 \end{Vmatrix},$$

звідки

$$\begin{Vmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Vmatrix} \tilde{X}_1 = \begin{Vmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Vmatrix}. \tag{7}$$

Нехай матричні рівняння (6) і (7) мають розв'язок при відповідних значеннях $k$. Тоді рівняння $AX = C$ має цілочисловий розв'язок

$$X_0 = \begin{cases} X_1, & k \equiv 2,3 \pmod 4, \\ \frac{1}{2} X_1, & k \equiv 1 \pmod 4, \end{cases}$$

і навпаки. Зауважимо, що рівняння (6) і (7) мають єдиний розв'язок тоді й тільки тоді, коли $\operatorname{rang}\begin{Vmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Vmatrix} = n$. Лему доведено. ♦

Розглянемо одностороннє лінійне матричне рівняння

$$AX + BY = C, \tag{8}$$

де $A, B, C \in M(n,\mathbb{K})$ − відомі, а $X, Y \in M(n,\mathbb{K})$ − невідомі матриці над квадратичним кільцем $\mathbb{K}$. Матриці $A$, $B$, $C$ і $X$, $Y$ можна записати у вигляді

$$A = A_1 + A_2\sqrt{k}, \quad B = B_1 + B_2\sqrt{k}, \quad C = C_1 + C_2\sqrt{k}, \tag{9}$$

$$X = X_1 + X_2\sqrt{k}, \quad Y = Y_1 + Y_2\sqrt{k}, \tag{10}$$

якщо $k \equiv 2,3 \pmod 4$,

$$A = \frac{1}{2}(A_1 + A_2\sqrt{k}), \quad B = \frac{1}{2}(B_1 + B_2\sqrt{k}), \quad C = \frac{1}{2}(C_1 + C_2\sqrt{k}), \tag{11}$$

$$X = \frac{1}{2}(X_1 + X_2\sqrt{k}), \quad Y = \frac{1}{2}(Y_1 + Y_2\sqrt{k}), \tag{12}$$

якщо $k \equiv 1 \pmod 4$, де $A_i, B_i, C_i, X_i, Y_i \in M(n,\mathbb{Z})$, $i = 1,2$.

**Теорема 1.** *Матричне рівняння* (8) *над квадратичним кільцем* $\mathbb{K}$ *з матрицями* $A$, $B$, $C$ *вигляду* (9) *або* (11) *має цілочисловий розв'язок* $X_0, Y_0 \in M(n,\mathbb{Z})$ *тоді й тільки тоді, коли матриці*

$$\begin{Vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{Vmatrix} \quad i \quad \begin{Vmatrix} A_1 & B_1 & \mathbf{0} \\ A_2 & B_2 & \mathbf{0} \end{Vmatrix}$$

*еквівалентні над кільцем цілих чисел* $\mathbb{Z}$.

Д о в е д е н н я. Нехай $k \equiv 2,3 \pmod 4$. Аналогічно, як у лемі 1, поклавши в (10) $X_2 = 0$ і $Y_2 = 0$ з рівняння (8) отримаємо

$$(A_1X_1 + B_1Y_1) + (A_2X_1 + B_2Y_1)\sqrt{k} = C_1 + C_2\sqrt{k}.$$

З цього рівняння одержуємо систему матричних лінійних рівнянь

$$A_1X_1 + B_1Y_1 = C_1,$$

$$A_2X_1 + B_2Y_1 = C_2,$$

з якої випливає матричне рівняння над кільцем цілих чисел $\mathbb{Z}$:

$$\begin{Vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Vmatrix}. \tag{13}$$

Отже, критерій існування цілочислового розв'язку $X_0 = X_1$ і $Y_0 = Y_1$ рівняння (8) у випадку, коли $k \equiv 2,3 \pmod 4$, доведено.

Нехай $k \equiv 1 \pmod 4$. Поклавши в (12) $X_2 = 0$ і $Y_2 = 0$, зазначимо, що $X_1 = 2\tilde{X}_1$ і $Y_1 = 2\tilde{Y}_1$, оскільки всі елементи матриць $X_1 - X_2$ і $Y_1 - Y_2$ діляться на 2. Тоді з рівняння (8) отримаємо рівняння

$$\frac{1}{2}(A_1 + A_2\sqrt{k})\tilde{X}_1 + \frac{1}{2}(B_1 + B_2\sqrt{k})\tilde{Y}_1 = \frac{1}{2}(C_1 + C_2\sqrt{k}),$$

яке зведемо до матричного рівняння

$$\begin{Vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \tilde{X}_1 \\ \tilde{Y}_1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Vmatrix}. \tag{14}$$

Отже, матричне рівняння (8) має цілочисловий розв'язок

$$X_0 = \begin{cases} X_1, & k \equiv 2,3 \pmod 4, \\ \frac{1}{2}X_1, & k \equiv 1 \pmod 4, \end{cases} \qquad Y_0 = \begin{cases} Y_1, & k \equiv 2,3 \pmod 4, \\ \frac{1}{2}Y_1, & k \equiv 1 \pmod 4, \end{cases}$$

тоді й тільки тоді, коли матриці $\begin{Vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{Vmatrix}$ і $\begin{Vmatrix} A_1 & B_1 & \mathbf{0} \\ A_2 & B_2 & \mathbf{0} \end{Vmatrix}$ еквівалентні над кільцем цілих чисел $\mathbb{Z}$. Доведення теореми завершено. ♦

**Теорема 2.** *Цілочисловий розв'язок* $X_0, Y_0 \in M(n, \mathbb{Z})$ *матричного рівняння* (8), *де матриці* $A$, $B$, $C$ *мають вигляд* (9) *або* (11), *є єдиним тоді й тільки тоді, коли матриця* $\begin{Vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{Vmatrix}$ *є неособливою.*

Д о в е д е н н я. Нехай матричне рівняння (8) має цілочисловий розв'язок. Тоді з теореми 1 випливає, що рівняння (13) і (14) мають розв'язки, причому ці розв'язки є єдиними тоді й тільки тоді, коли

$$\det \begin{Vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{Vmatrix} \neq 0 .$$

Теорему доведено. ♦

Нагадаємо, що добутком Кронекера $P \otimes Q$ двох матриць $P = \| p_{ij} \|_1^{m,n}$ і $Q = \| q_{ij} \|_1^{k,\ell}$ є блочна $(mk \times n\ell)$- матриця вигляду

$$P \otimes Q = \begin{Vmatrix} p_{11}Q & \dots & p_{1n}Q \\ \dots & \dots & \dots \\ p_{m1}Q & \dots & p_{mn}Q \end{Vmatrix} .$$

Надалі через $\mathrm{Row}_i(A)$ будемо позначати $i$-й рядок, а через $\mathrm{Col}_j(A)$ − $j$-й стовпчик матриці $A$.

Розглянемо матричне лінійне різностороннє рівняння

$$AX + YB = C , \tag{15}$$

де $A, B, C \in M(n, \mathbb{K})$ − матриці вигляду (9) або (11), а матриці $X, Y \in \in M(n, \mathbb{K})$ мають вигляд (10) або (12).

**Теорема 3.** *Матричне рівняння* (15) *над квадратичним кільцем* $\mathbb{K}$ *з матрицями* $A$, $B$, $C$ *вигляду* (9) *або* (11) *має цілочисловий розв'язок* $X_0, Y_0 \in M(n, \mathbb{Z})$ *тоді й тільки тоді, коли є еквівалентними над кільцем цілих чисел* $\mathbb{Z}$ *матриці*

$$\begin{Vmatrix} A_1 \otimes I_n & I_n \otimes B_1^\top & \mathbf{c}_1 \\ A_2 \otimes I_n & I_n \otimes B_2^\top & \mathbf{c}_2 \end{Vmatrix} \quad i \quad \begin{Vmatrix} A_1 \otimes I_n & I_n \otimes B_1^\top & \mathbf{0} \\ A_2 \otimes I_n & I_n \otimes B_2^\top & \mathbf{0} \end{Vmatrix} .$$

*Тут* $\mathbf{c}_i = \| \mathrm{Row}_1(C_i) \ \dots \ \mathrm{Row}_n(C_i) \|^\top$, $i = 1, 2$, *символом* « $\top$ » *позначено операцію транспонування,* $I_n$ − *одинична матриця порядку* $n$.

Д о в е д е н н я. Нехай $k \equiv 2, 3 \pmod 4$. Поклавши в (10) $X_2 = 0$ і $Y_2 = 0$, з рівняння (15) отримаємо

$$(A_1 X_1 + Y_1 B_1) + (A_2 X_1 + Y_1 B_2)\sqrt{k} = C_1 + C_2 \sqrt{k} ,$$

звідки маємо систему матричних рівнянь над кільцем цілих чисел $\mathbb{Z}$ :

$$A_1 X_1 + Y_1 B_1 = C_1 ,$$

$$A_2 X_1 + Y_1 B_2 = C_2 .$$

Розписавши поелементно добутки $A_i X_1$ і $Y_1 B_i$, $i = 1, 2$, і врахувавши означення добутку Кронекера, кожне рівняння $A_i X_1 + Y_1 B_i = C_i$ цієї системи подамо у вигляді

$$\| A_i \otimes I_n \quad I_n \otimes B_i^\top \| \begin{Vmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{Vmatrix} = \| \mathbf{c}_i \| ,$$

де $\mathbf{x} = \|\mathrm{Row}_1(X_1) \ \dots \ \mathrm{Row}_n(X_1)\|^\top$, $\mathbf{y} = \|\mathrm{Row}_1(Y_1) \ \dots \ \mathrm{Row}_n(Y_1)\|^\top$, $\mathbf{c}_i = \|\mathrm{Row}_1(C_i) \ \dots \ \mathrm{Row}_n(C_i)\|^\top$, $i = 1,2$. Отже, отримаємо таке рівняння над кільцем цілих чисел $\mathbb{Z}$:

$$\left\|\begin{matrix} A_1 \otimes I_n & I_n \otimes B_1^\top \\ A_2 \otimes I_n & I_n \otimes B_2^\top \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_2 \end{matrix}\right\|. \tag{16}$$

Оскільки матричне рівняння (16) має розв'язок тоді й тільки тоді, коли є еквівалентними матриці

$$\left\|\begin{matrix} A_1 \otimes I_n & I_n \otimes B_1^\top & \mathbf{c}_1 \\ A_2 \otimes I_n & I_n \otimes B_2^\top & \mathbf{c}_2 \end{matrix}\right\| \quad \text{і} \quad \left\|\begin{matrix} A_1 \otimes I_n & I_n \otimes B_1^\top & \mathbf{0} \\ A_2 \otimes I_n & I_n \otimes B_2^\top & \mathbf{0} \end{matrix}\right\|,$$

то твердження теореми для випадку $k \equiv 2,3 \pmod 4$ доведено.

Для випадку $k \equiv 1 \pmod 4$ доведення теореми проводимо аналогічно, як у теоремі 1. Доведення завершено. ♦

**Теорема 4.** *Цілочисловий розв'язок* $X_0, Y_0 \in M(n, \mathbb{Z})$ *матричного рівняння* (15), *де матриці* $A$, $B$, $C$ *вигляду* (9) *або* (11), *єдиний тоді й тільки тоді, коли матриця* $A_1 \otimes B_2^\top - A_2 \otimes B_1^\top$ *– неособлива.*

Д о в е д е н н я. З доведення теореми 3 випливає, що з матричного рівняння (15) над квадратичним кільцем $\mathbb{K}$ можна отримати матричне рівняння (16) над кільцем цілих чисел $\mathbb{Z}$. Відомо, що, якщо матричне рівняння (16) має розв'язок, то він є єдиним тоді й тільки тоді, коли

$$\det \left\|\begin{matrix} A_1 \otimes I_n & I_n \otimes B_1^\top \\ A_2 \otimes I_n & I_n \otimes B_2^\top \end{matrix}\right\| \neq 0 .$$

Доведемо, що $(A_2 \otimes I_n)(I_n \otimes B_2^\top) = (I_n \otimes B_2^\top)(A_2 \otimes I_n)$. З властивості добутку Кронекера отримаємо рівність $(A_2 \otimes I_n)(I_n \otimes B_2^\top) = A_2 \otimes B_2^\top$. За означенням

$$I_n \otimes B_2^\top = \left\|\begin{matrix} B_2^\top & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & B_2^\top & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & B_2^\top \end{matrix}\right\|,$$

$$A_2 \otimes I_n = \left\|\begin{matrix} a_{11}I_n & a_{12}I_n & \dots & a_{1n}I_n \\ a_{21}I_n & a_{22}I_n & \dots & a_{2n}I_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}I_n & a_{n2}I_n & \dots & a_{nn}I_n \end{matrix}\right\|,$$

де $a_{ij}$, $i,j = 1,\dots,n$, – відповідні елементи матриці $A_2$. Звідси маємо

$$(I_n \otimes B_2^\top)(A_2 \otimes I_n) = \left\|\begin{matrix} a_{11}B_2^\top & a_{12}B_2^\top & \dots & a_{1n}B_2^\top \\ a_{21}B_2^\top & a_{22}B_2^\top & \dots & a_{2n}B_2^\top \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B_2^\top & a_{n2}B_2^\top & \dots & a_{nn}B_2^\top \end{matrix}\right\| = A_2 \otimes B_2^\top .$$

Відомо [14], що

$$\det\begin{Vmatrix} A_1 \otimes I_n & I_n \otimes B_1^\top \\ A_2 \otimes I_n & I_n \otimes B_2^\top \end{Vmatrix} =$$

$$= \det\left\| (A_1 \otimes I_n)(I_n \otimes B_2^\top) - (A_2 \otimes I_n)(I_n \otimes B_1^\top) \right\|,$$

звідки отримуємо

$$\det\begin{Vmatrix} A_1 \otimes I_n & I_n \otimes B_1^\top \\ A_2 \otimes I_n & I_n \otimes B_2^\top \end{Vmatrix} = \det\left\| A_1 \otimes B_2^\top - A_2 \otimes B_1^\top \right\|.$$

Теорему доведено. ♦

Оскільки з матричних рівнянь (8), (15) над квадратичним кільцем $\mathbb{K}$ отримуємо відповідні матричні рівняння (13), (16) над $\mathbb{Z}$, то опис розв'язків цих рівнянь зводиться до опису розв'язків рівняння $\tilde{A}\tilde{X} = \tilde{B}$, де $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ – матриці відповідних розмірів над кільцем цілих чисел $\mathbb{Z}$. Дослідження і знаходження розв'язків цього матричного рівняння над довільними евклідовими кільцями розглядаються у праці [4].


1. *Джалюк Н. С.*, *Петричкович В. М.* Розв'язки матричного діофантового поліноміального рівняння // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2012. – Вип. 10. – С. 55–61.
2. *Казімірський П. С.* Розклад матричних многочленів на множники. – Київ: Наук. думка, 1981. – 224 с.
3. *Петричкович В. М.* Клеточно-треугольная и клеточно-диагональная факторизация клеточно-треугольных и клеточно-диагональных многочленных матриц // Мат. заметки. – 1985. – **37**, № 6. – С. 789–796.
   Те саме: *Petrichkovich V. M.* Cell-triangular and cell-diagonal factorizations of cell-triangular and cell-diagonal polynomial matrices // Math. Notes. – 1985. – **37**, No. 6. – P. 431–435.
4. *Родосский К. А.* Алгоритм Евклида. – Москва: Наука, 1988. – 240 с.
5. *Barnett S.* Regular polynomial matrices having relatively prime determinants // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. – 1969. – **65**, No. 03. – P. 585–590.
6. *Bin Zhou, Zhi-Bin Yan, Guang-Ren Duan.* Unified parametrization for the solutions to the polynomial diophantine matrix equation and the generalized Sylvester matrix equation // Int. J. Control, Autom., Syst. – 2010. – **8**, No. 1. – P. 29–35.
7. *Dzhaliuk N. S.*, *Petrychkovych V. M.* The matrix linear unilateral and bilateral equations with two variables over commutative rings // ISRN Algebra. – **2012**. – Article ID 205478. 14 pages.
8. *Hasse H.* Number theory. – Berlin–New York: Springer-Verlag, 1980. – 640 p.
9. *Kaczorek T.* Polynomial and rational matrices. Applications in dynamical systems theory. – London: Springer, 2007. – 503 p.
10. *Kučera V.* Algebraic theory of discrete optimal control for multivariable systems [I] // Kybernetika. – 1974. – **10**, No. 7. – P. 3–56.
11. *Kučera V.* Algebraic theory of discrete optimal control for single-variable systems. I. Preliminaries // Kybernetika. – 1973. – **9**, No. 2. – P. 94–107.
12. *Lancaster P., Tismenetsky M.* The theory of matrices. – New York: Acad. Press, 1985. – xv+570 p.
13. *Roth W. E.* The equations $AX - YB = C$ and $AX - XB = C$ in matrices // Proc. Amer. Math. Soc. – 1952. – **3**, No. 3. – P. 392–396.
14. *Silvester J. R.* Determinants of block matrices // Math. Gazette. – 2000. – **84**, No. 501. – P. 460–467.
15. *Tzekis P. A.* A new algorithm for the solution of a polynomial matrix Diophantine equation // Appl. Math. Comp. – 2007. – **193**, No. 2. – P. 395–407.
16. *Wai-Sin Ching.* Linear equations over commutative rings // Linear Algebra Appl. – 1977. – **18**, No. 3. – P. 257–266.
17. *Wolovich W. A., Antsaklis P. J.* The canonical Diophantine equations with applications // SIAM J. Control Optim. – 1984. – **22**, No. 5. – P. 777–787.

**ЦЕЛОЧИСЛЕННЫЕ РЕШЕНИЯ МАТРИЧНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОДНОСТОРОННИХ И РАЗНОСТОРОННИХ УРАВНЕНИЙ НАД КВАДРАТИЧНЫМИ КОЛЬЦАМИ**

*Для матричных линейных уравнений* $AX + BY = C$ *и* $AX + YB = C$ *над квадратичными кольцами* $\mathbb{Z}[\sqrt{k}]$ *установлены необходимые и достаточные условия существования целочисленных решений, т. е. решений* $X$, $Y$ *над кольцом целых чисел* $\mathbb{Z}$. *Указан критерий единственности целочисленных решений этих уравнений и способ их построения.*

**THE INTEGER SOLUTIONS OF MATRIX LINEAR UNILATERAL AND BILATERAL EQUATIONS OVER QUADRATIC RINGS**

*The necessary and sufficient conditions for the existence of integer solutions i.e. solutions* $X$, $Y$ *over ring of integers* $\mathbb{Z}$, *of matrix linear equations* $AX + BY = C$ *and* $AX + YB = C$ *over quadratic rings* $\mathbb{Z}[\sqrt{k}]$ *are established. The criterion of uniqueness of integer solutions of these equations and the method of their construction are presented.*



Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів



Одержано
23.10.14