

**НАПРУЖЕННЯ В АНІЗОТРОПНІЙ ПІВПЛОЩИНІ З ВИРІЗАМИ**

*Розроблено алгоритм визначення напружень в анізотропній півплощині з вирізами, який базується на методі граничних інтегральних рівнянь. Інтегральні рівняння розв'язано чисельно за допомогою методу механічних квадратур. Проведено дослідження напружень біля вирізів різної форми. Встановлено характерні особливості в розподілі напружень залежно від форми і розмірів вирізів, а також механічних характеристик матеріалу пластинок. Запропоновано асимптотичні співвідношення для визначення коефіцієнтів концентрації напружень для звужених вирізів еліптичної форми.*

Питання дослідження напружень в ізотропних пластинках біля вирізів достатньо повно вивчені в літературі [5, 9]. Для визначення напружено-деформованого стану (НДС) таких пластинок ефективним виявився метод граничних інтегральних рівнянь (МГІР) [5, 6]. Значно менше вивчено такі задачі для композитних пластинок із вирізами. У пропонованій роботі розроблено алгоритм визначення НДС анізотропної півплощини з вирізами. Алгоритм ґрунтується на підходах, наведених у роботах [5, 6].

**Постановка задачі.** Розглядається задача про визначення НДС анізотропних пластинок із вирізами, межі яких розміщені вздовж кривих  $L_j$ ,  $j = 1, \dots, J$ . Приймемо, що пластинка перебуває: під дією зусиль на нескінченності; зосереджених сил; прикладених до межі вирізу зусиль  $(X_T, Y_T)$ . Область, яку займає пластинка, позначимо через  $D$ , а її межу – через  $L_D$ . У розробленому підході пластинку з вирізами будемо розглядати як пластинку з крайовими тріщинами. У зв'язку з цим спочатку запишемо інтегральні рівняння для пластинки з тріщинами.

**Інтегральні рівняння задачі.** Застосуємо підхід до визначення напружень через комплексні потенціали Лехніцького  $\Phi(z_1)$ ,  $\Psi(z_2)$ , де  $z_j = x + s_j y$ ,  $s_j$  – корені характеристичного рівняння [1, 4]

$$\Delta(s) = \alpha_{11}s^4 - 2\alpha_{16}s^3 + (2\alpha_{12} + \alpha_{66})s^2 - 2\alpha_{26}s + \alpha_{22} = 0, \quad \text{Im } s_j > 0, \quad (1)$$

де  $\alpha_{ij}$  – пружні сталі матеріалу.

Розглянемо довільну криву  $\Gamma$ , яка лежить в області  $D$  і виберемо на цій кривій додатний напрям обходу. Введемо вектор напружень  $\mathbf{S}_\Gamma$  на площинці, дотичній до кривої  $\Gamma$ , нормаль до якої розміщена справа відносно вибраного напрямку обходу. Проекції  $(X, Y)$  вектора напружень  $\mathbf{S}_\Gamma$  і похідні від переміщень  $u, v$  за дуговою координатою на кривій визначаються через комплексні потенціали Лехніцького за формулами [1, 2]

$$X = 2 \operatorname{Re} [s_1 \Phi(z_1) z'_1 + s_2 \Psi(z_2) z'_2], \quad Y = -2 \operatorname{Re} [\Phi(z_1) z'_1 + \Psi(z_2) z'_2],$$

$$u' = 2 \operatorname{Re} [p_1 \Phi(z_1) z'_1 + p_2 \Psi(z_2) z'_2], \quad v' = 2 \operatorname{Re} [q_1 \Phi(z_1) z'_1 + q_2 \Psi(z_2) z'_2], \quad (2)$$

де  $u' = \frac{du}{ds}$ ,  $v' = \frac{dv}{ds}$ ,  $p_j = \alpha_{11}s_j^2 - \alpha_{16}s_j + \alpha_{12}$ ,  $q_j = \alpha_{12}s_j - \alpha_{26} + \frac{\alpha_{22}}{s_j}$ ,  $z'_j =$

$= \frac{dx}{ds} + s_j \frac{dy}{ds}$ ,  $ds$  – диференціал дуги на кривій  $\Gamma$ .

На основі співвідношень (2) запишемо взаємозв'язок [1, 2]

$$\Phi(z_1) = \frac{-v' + s_1 u' + p_1 X + q_1 Y}{\Delta_1 z'_1}, \quad \Psi(z_2) = \frac{-v' + s_2 u' + p_2 X + q_2 Y}{\Delta_2 z'_2}, \quad (3)$$

де  $\Delta_1 = a_{11}(s_1 - \bar{s}_1)(s_1 - s_2)(s_1 - \bar{s}_2)$ ,  $\Delta_2 = a_{11}(s_2 - \bar{s}_1)(s_2 - s_1)(s_2 - \bar{s}_2)$ .

У правильності формул (3) можна перекоонатись, підставивши їх безпосередньо у співвідношення (2) і використавши значення величин  $2 \operatorname{Re}(s_1^j/\Delta_1 + s_2^j/\Delta_2) = R_j$ , наведені у табл. 1.

Таблиця 1

$j \backslash$	-2	-1	0	1	2	3
$R_j$	$-2a_{26}/a_{22}^2$	$-1/a_{22}$	0	0	0	$1/a_{11}$

Величини  $R_j$  знайдено шляхом розкладу виразів  $\mathcal{D}_k(s) = s^k/\Delta(s)$ ,  $k = -1, 0, \dots, 5$ , на прості дроби та з подальшим застосуванням граничного переходу при  $s \rightarrow 0$ .

Для побудови загального розв'язку задачі спочатку розглянемо нескінченну пластинку, що містить тріщини, розміщені на кривих  $L_j$ ,  $j = 1, \dots, J$ . Приймемо, що зусилля, прикладені до берегів тріщин, є однаковими та протилежно напрямленими. На основі співвідношень (3) запишемо вирази для стрибків потенціалів на берегах тріщин у допоміжних площинах  $z_{1,2}$ :

$$[\Phi(z_1)] = \frac{-g'_2 + s_1 g'_1}{\Delta_1 z'_1}, \quad [\Psi(z_2)] = \frac{-g'_2 + s_2 g'_1}{\Delta_2 z'_2},$$

де  $g_1, g_2$  – стрибки переміщень  $u, v$  на тріщинах. Тоді отримуємо інтегральні подання для комплексних потенціалів у вигляді [3]

$$\begin{aligned} \Phi(z_1) &= \frac{1}{2\pi\Delta_1 i} \int_L \frac{-g'_2 + s_1 g'_1}{t_1 - z_1} ds + \Phi_S(z_1), \\ \Psi(z_2) &= \frac{1}{2\pi\Delta_2 i} \int_L \frac{-g'_2 + s_2 g'_1}{t_2 - z_2} ds + \Psi_S(z_2), \end{aligned} \quad (4)$$

де  $ds$  – диференціал дуги,  $L = L_1 + L_2 + \dots + L_J$ . Комплексні потенціали з індексом  $S$  визначають напружений стан суцільної пластинки, який виникає від дії тільки зосереджених сил і навантаження на нескінченності.

Підставимо зображення (4) у формули для визначення вектора напружень на берегах тріщини (2). Використовуючи формули Сохоцького при граничному переході, отримуємо систему інтегральних рівнянь для визначення стрибків переміщень при  $(x, y) \in L$ :

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} [\Phi(z_1)z'_1 + \Psi(z_2)z'_2] + C_1 &= -Y_T, \\ 2 \operatorname{Re} [s_1 \Phi(z_1)z'_1 + s_2 \Psi(z_2)z'_2] + C_2 &= X_T, \end{aligned} \quad (5)$$

де  $C_1 = (-g'_2 R_0 + g'_1 R_1)/2$ ,  $C_2 = (-g'_2 R_1 + g'_1 R_2)/2$ , а функції  $\Phi, \Psi$  визначаються за формулами (4), в яких інтеграли розглядаються в сенсі головного значення за Коші. Використовуючи дані, наведені у табл. 1, маємо, що  $C_1 = C_2 = 0$ .

Перепишемо зображення (4) у вигляді

$$\begin{aligned} \Phi(z_1) &= \int_L [g'_1 \Phi_1(z_1, t_1) + g'_2 \Phi_2(z_1, t_1)] ds + \Phi_S(z_1), \\ \Psi(z_2) &= \int_L [g'_1 \Psi_1(z_2, t_2) + g'_2 \Psi_2(z_2, t_2)] ds + \Psi_S(z_2), \end{aligned} \quad (6)$$

де

$$\Phi_1 = \frac{A_1}{t_1 - z_1}, \quad \Phi_2 = \frac{A_2}{t_1 - z_1}, \quad \Psi_1 = \frac{B_1}{t_2 - z_2}, \quad \Psi_2 = \frac{B_2}{t_2 - z_2},$$

$$A_1 = -\frac{is_1}{2\pi\Delta_1}, \quad A_2 = \frac{i}{2\pi\Delta_1}, \quad B_1 = -\frac{is_2}{2\pi\Delta_2}, \quad B_2 = \frac{i}{2\pi\Delta_2}.$$

Розглянемо тепер випадок, коли пружна анізотропна пластинка займає задану область  $D$ . Запишемо інтегральні рівняння для цієї пластинки з тріщинами таким чином, щоб однорідні умови на межі області  $D$  виконувались автоматично. З цією метою спочатку побудуємо комплексні потенціали Лехніцького  $\Phi_j^D(z_1)$ ,  $\Psi_j^D(z_2)$ ,  $j = 1, 2$ , які є розв'язком задачі теорії пружності для області  $D$  з вільною від навантаження межею, за умови, що ці функції мають такі особливості:

$$\Phi_j^D(z_1) \sim -\frac{A_j}{z_1 - z_{10}}, \quad \Psi_j^D(z_2) \sim -\frac{B_j}{z_2 - z_{20}}, \quad (7)$$

де  $z_{10} = x_0 + s_1 y_0$ ,  $z_{20} = x_0 + s_2 y_0$ ;  $(x_0, y_0)$  – деяка точка, що лежить в області  $D$ . Далі ці потенціали будемо позначати як  $\Phi_j^D(z_1, x_0, y_0)$ ,  $\Psi_j^D(z_2, x_0, y_0)$ .

Тоді загальний розв'язок задачі теорії пружності для області  $D$  з тріщинами матиме вигляд

$$\begin{aligned} \Phi(z_1) &= \int_L [\Phi_1^D(z_1, \xi, \eta)g_1'(s) + \Phi_2^D(z_1, \xi, \eta)g_2'(s)] ds + \Phi_D(z_1), \\ \Psi(z_2) &= \int_L [\Psi_1^D(z_2, \xi, \eta)g_1'(s) + \Psi_2^D(z_2, \xi, \eta)g_2'(s)] ds + \Psi_D(z_2), \end{aligned} \quad (8)$$

де  $(\xi, \eta)$  – біжуча точка контуру інтегрування, потенціали  $\Phi_D(z_1)$ ,  $\Psi_D(z_2)$  відповідають прикладеному до пластинки навантаженню за умови, що межа області  $D$  вільна від навантаження, причому ця область вважається суцільною (прикладені до берегів тріщини зусилля тут не враховуються).

За побудовою загальний розв'язок (8) тотожно задовольняє умову відсутності напружень на межі області  $D$ . Потенціали  $\Phi_j^D(z_1, x_0, y_0)$ ,  $\Psi_j^D(z_2, x_0, y_0)$  складаються з суми особливих складових, які містять потенціали  $\Phi$ ,  $\Psi$ , визначені формулою (6) для нескінченних пластинок, та регулярних функцій. Тому загальний розв'язок (8) визначає такий же стрибок переміщень на контурах  $L$ , як і наведене вище подання (6).

Інтегральні рівняння також матимуть вигляд (5), у якому потенціали  $\Phi$ ,  $\Psi$  визначаються за формулами (8), причому сингулярні інтеграли розглядаються в сенсі головного значення за Коші.

Для внутрішніх тріщин необхідно забезпечити умови однозначності переміщень, які матимуть вигляд

$$\int_L g_1' ds = 0, \quad \int_L g_2' ds = 0. \quad (9)$$

**Дислокаційний розв'язок для півплощини з вільним краєм.** Розглянемо детально випадок, коли вирізи розміщені біля межі півплощини  $y < 0$ .

Для знаходження потенціалів Лехніцького  $\Phi_j^D$ ,  $\Psi_j^D$ ,  $j = 1, 2$ , необхідно побудувати розв'язок задачі теорії пружності для області  $D$  (півплощина  $y < 0$ ) з вільною від навантаження межею за умови, що ці функції мають полюси (7). На підставі співвідношень, наведених в [1], маємо

$$\begin{aligned} \Phi_j^D(z_1) &= -\left( \frac{A_j}{z_1 - z_{10}} + \alpha_1 \frac{\bar{A}_j}{z_1 - \bar{z}_{10}} + \beta_1 \frac{\bar{B}_j}{z_1 - \bar{z}_{20}} \right), \\ \Psi_j^D(z_2) &= -\left( \frac{B_j}{z_2 - z_{20}} + \alpha_2 \frac{\bar{A}_j}{z_2 - \bar{z}_{10}} + \beta_2 \frac{\bar{B}_j}{z_2 - \bar{z}_{20}} \right), \end{aligned} \quad (10)$$

де  $\alpha_1 = \frac{\bar{s}_1 - s_2}{\Delta}$ ,  $\beta_1 = \frac{\bar{s}_2 - s_2}{\Delta}$ ,  $\beta_2 = \frac{s_1 - \bar{s}_2}{\Delta}$ ,  $\alpha_2 = \frac{s_1 - \bar{s}_1}{\Delta}$ ,  $\Delta = s_2 - s_1$ .

Розглянемо випадок, коли до пластинки прикладено зосереджені сили. Тоді для випадку, коли сила  $(X, Y)$  прикладена в точці  $(x_0, y_0)$ , потенціали визначатимуться за формулами (10), у яких покладаємо [1]

$$A_j = \frac{i(p_1 X + q_1 Y)}{2\pi\Delta_1}, \quad B_j = \frac{i(p_2 X + q_2 Y)}{2\pi\Delta_2}.$$

Розглянемо півплощину з вирізом, обмеженим контуром  $L_N$ , до межі якого прикладено зусилля  $(X_T, Y_T)$ . Точки, у яких межа вирізу перетинає межу півплощини, позначимо через  $A_N$ ,  $B_N$ . Для розв'язання цієї задачі розглянемо півплощину з крайовою тріщиною, яка лежить на контурі  $L_N$  з гирлом у точці  $A_N$  і вершиною у точці  $B$ , причому ця точка є внутрішньою і  $B \rightarrow B_N$ . Прийнемо, що до протилежних берегів цієї тріщини прикладено однакові зусилля  $(X_T, Y_T)$ .

**Числовий алгоритм розв'язування інтегральних рівнянь.** У рівняння (5) входять сингулярні інтеграли вигляду

$$I(z_1, z_2) = \int_{\Gamma} F(\xi, \eta) f(z_1, z_2, \xi, \eta) ds,$$

де функція  $f$  складається з ядер типу Коші та регулярних функцій, а  $F$  – гладка функція з кореневими особливостями на кінцях кривої. Розглянемо випадок, коли контур інтегрування задано у параметричному вигляді  $\xi = \alpha(\theta)$ ,  $\eta = \beta(\theta)$ ,  $-1 \leq \theta \leq 1$ , а  $F(\alpha(\theta), \beta(\theta)) = W(\theta)/\sqrt{1-\theta^2}$ , де  $W(\theta)$  – гладка обмежена функція. Для обчислення цих інтегралів використаємо квадратурну формулу Лобатто [1]:

$$I(z_{1v}, z_{2v}) = \sum_{k=1}^N C_k f(z_{1v}, z_{2v}, \xi_k, \eta_k) W_k s'_k, \quad (11)$$

де  $W_k = W(\theta_k)$ ,  $\xi_k = \alpha(\theta_k)$ ,  $\eta_k = \beta(\theta_k)$ ,  $z_{jv} = \omega_j(\tau_v)$ ,  $j = 1, 2$ ,  $s'_k = s'(\theta_k)$ ,  $\theta_k = -\cos(\pi_N(k-1))$ ,  $\tau_v = \cos[\pi_N(v-0.5)]$ ;  $C_k = \pi_N$  при  $k \neq 1$  і  $k \neq N$ ,  $C_1 = C_N = 0.5\pi_N$ ;  $k = 1, \dots, N$ ;  $v = 1, \dots, N-1$ ;  $s'(\theta) = \sqrt{\alpha'(\theta)^2 + \beta'(\theta)^2}$ ,  $\omega_j(\theta) = \alpha(\theta) + s_j\beta(\theta)$ ,  $\pi_N = \pi/(N-1)$ ,  $N$  – вибрана кількість вузлових точок.

Зобразимо похідні від стрибків переміщень у вигляді

$$g'_1 = \frac{dg_1}{d\theta} \frac{1}{s'} = \frac{U(\theta)}{s'\sqrt{1-\theta^2}}, \quad g'_2 = \frac{dg_2}{d\theta} \frac{1}{s'} = \frac{V(\theta)}{s'\sqrt{1-\theta^2}}.$$

Тоді, використавши формулу (11), отримуємо

$$\begin{aligned} \Phi(z_{1v}) &= \sum_{k=1}^N C_k [\Phi_1(z_{1v}, \xi_k, \eta_k) U_k + \Phi_2(z_{1v}, \xi_k, \eta_k) V_k] + \Phi_D(z_{1v}), \\ \Psi(z_{2v}) &= \sum_{k=1}^N C_k [\Psi_1(z_{2v}, \xi_k, \eta_k) U_k + \Psi_2(z_{2v}, \xi_k, \eta_k) V_k] + \Psi_D(z_{2v}). \end{aligned} \quad (12)$$

Підставивши співвідношення (12) у рівняння (5) та поклавши  $x = x_v = \alpha(\tau_v)$ ,  $y = y_v = \beta(\tau_v)$ ,  $v = 1, \dots, N-1$ , отримуємо систему алгебричних рівнянь

$$\sum_{k=1}^N C_k (q_{vk}^{(1)} U_k + q_{vk}^{(2)} V_k) = q_v - q_v^D, \quad v = 1, \dots, N-1, \quad (13)$$

де

$$\begin{aligned}
q_v &= i(X_v + iY_v), \quad X_v = X_T(x_v, y_v), \quad Y_v = Y_T(x_v, y_v), \\
U_k &= U(\theta_k), \quad V_k = V(\theta_k), \\
q_{vk}^{(j)} &= (1 + is_1)z'_{1v} \Phi_j(z_{1v}, \xi_k, \eta_k) + (1 + i\bar{s}_1)\overline{z'_{1v}} \overline{\Phi_j(z_{1v}, \xi_k, \eta_k)} + \\
&\quad + (1 + is_2)z'_{2v} \Psi_j(z_{2v}, \xi_k, \eta_k) + (1 + i\bar{s}_2)\overline{z'_{2v}} \overline{\Psi_j(z_{2v}, \xi_k, \eta_k)}, \\
q_v^D &= (1 + is_1)z'_{1v} \Phi_D(z_{1v}) + (1 + i\bar{s}_1)\overline{z'_{1v}} \overline{\Phi_D(z_{1v})} + \\
&\quad + (1 + is_2)z'_{2v} \Psi_D(z_{2v}) + (1 + i\bar{s}_2)\overline{z'_{2v}} \overline{\Psi_D(z_{2v})}, \quad (14) \\
z'_{jv} &= x'_v + s_j y'_v, \quad x'_v = \alpha'(\tau_v), \quad y'_v = \beta'(\tau_v).
\end{aligned}$$

Доповнимо цю систему для внутрішніх тріщин двома рівняннями, які випливають із умови однозначності переміщень:

$$\sum_{k=1}^N C_k (U_k + iV_k) = 0. \quad (15)$$

При розгляді крайової тріщини у загальному випадку інтегральні рівняння необхідно модифікувати, додавши до них відповідні складові [2]. Однак у випадку півплощини ці складові дорівнюють нулеві, у зв'язку з чим наведені вище співвідношення для внутрішніх тріщин будуть виконуватись і для крайових тріщин. Прийmemo, що вершині  $A_N$  (гирлу крайової тріщини) відповідає перша вузлова точка. Тоді, використовуючи умову обмеженості напружень у цій вузловій точці [2, 5, 6], замість умови (15) запишемо рівняння

$$U_1 = 0, \quad V_1 = 0. \quad (16)$$

Таким чином, отримуємо замкнену систему алгебричних рівнянь (13), (16) для випадку тріщин.

При розгляді пластинки з вирізом необхідно, крім цього, щоб напруження були обмеженими і у вершині  $B_N$ . З метою забезпечення цієї умови прийmemo, що до області  $D_N$ , яку займає виріз, у точці  $M(c, d)$  прикладено дві невідомі зосереджені сили  $P$  і  $Q$ , які діють у напрямках осей  $Ox$  і  $Oy$ . Тоді за загальний розв'язок приймаємо інтегральне подання (8), до якого додаємо складові вигляду

$$\Phi_\Delta = P\Phi_P + Q\Phi_Q, \quad \Psi_\Delta = P\Psi_P + Q\Psi_Q,$$

де функції  $\Phi_P$ ,  $\Psi_P$  визначаються за формулами (10) при

$$A_j = \frac{ip_1}{2\pi\Delta_1}, \quad B_j = \frac{ip_2}{2\pi\Delta_2},$$

функції  $\Phi_Q$ ,  $\Psi_Q$  – за формулами (10) при

$$A_j = \frac{iq_1}{2\pi\Delta_1}, \quad B_j = \frac{iq_2}{2\pi\Delta_2},$$

а в співвідношеннях (10)  $x_0 = c$ ,  $y_0 = d$ .

Система алгебричних рівнянь (13) набуде вигляду

$$\sum_{k=1}^N C_k (q_{vk}^{(1)} U_k + q_{vk}^{(2)} V_k) + Pq_v^P + Qq_v^Q = q_v - q_v^D, \quad v = 1, \dots, N-1, \quad (17)$$

де коефіцієнти  $q_v^P, q_v^Q$  визначатимуться за формулою (14), у якій  $\Phi_D, \Psi_D$  замінено на  $\Phi_P, \Psi_P$  та  $\Phi_Q, \Psi_Q$  відповідно.

Два додаткові рівняння (крім рівнянь (16)) отримуємо на основі умови обмеженості напружень у точці  $B_N$  вирізу:

$$U_N = 0, \quad V_N = 0. \quad (18)$$

Зазначимо, що наведений алгоритм можна розглядати як метод регуляризації підходу до розв'язування інтегральних рівнянь за допомогою квадратурних (наближених) формул. При цьому додаткові сили вводяться для забезпечення рівноваги області, яку займає виріз. Проведені розрахунки показали, що додаткові сили є малими за величиною:  $\sim 10^{-7}$ . Якщо ці сили виявлялись більшими, то розрахунки виконувались з більшою кількістю вузлових точок, що покращувало точність обчислень. Це означає, що введені додаткові сили у розробленому підході можна розглядати як додатковий засіб контролю за точністю розрахунків.

Визначивши величини  $U_k, V_k$ , потенціали (а на основі них і напруження) у довільних точках пластинки можна обчислити за формулами (12). Суттєво спрощеться знаходження напружень на межі ненавантаженого вирізу: потенціали у вузлових точках визначаються безпосередньо на основі співвідношень (3):

$$\Phi(t_{1k}) = \frac{-V_k + s_1 U_k}{\Delta_1 t'_{1k} s'_k}, \quad \Psi(t_{2k}) = \frac{-V_k + s_2 U_k}{\Delta_2 t'_{2k} s'_k},$$

$$t'_{jk} = \omega'_j(\theta_k), \quad k = 1, \dots, N.$$

Напруження через ці потенціали у вузлових точках визначаємо за формулами (2).

**Результати розрахунків.** Розглянемо півплощину  $y < 0$ , послаблену вирізом, що має форму сегмента круга радіуса  $R$ , за розтягу в горизонтальному напрямку зусиллями  $p$ . У табл. 2 наведено розраховані коефіцієнти концентрації напружень (ККН) для випадку півкругового вирізу ( $\sigma/p$ ) й нескінченної пластинки з круговим отвором ( $\sigma_0/p$ ) для ізотропного матеріалу та композитних матеріалів EF-32-301, ETF, CF2, CF1 (склопластики) і LU-1 (вуглепластик), для яких відношення максимального і мінімального модулів Юнга змінюються від 1.56 до 46.4 [7]. Тут і надалі через  $\sigma$  і  $\sigma_0$  позначено максимальні напруження на межі вирізу і отвору відповідно. Зазначимо, що для розглянутого випадку величина  $\sigma_0$  для нескінченної анізотропної пластинки з еліптичним отвором із півосями  $a$  (на горизонтальній осі) та  $b$  визначається за формулою  $\sigma_0/p = 1 + \text{Im}(s_1 + s_2)b/a$  [4]. У табл. 2 наведено дані для випадків, коли матеріал пластинки жорсткіший у вертикальному або в горизонтальному напрямку (тут  $E_x, E_y$  – модулі Юнга в горизонтальному та вертикальному напрямках відповідно).

Таблиця 2

Матеріал	$E_x < E_y$			$E_x > E_y$			$E_{\max}/E_{\min}$
	$\sigma/p$	$\sigma_0/p$	$\sigma/\sigma_0$	$\sigma/p$	$\sigma_0/p$	$\sigma/\sigma_0$	
Ізотропія	3.0653	3.0	1.0238	3.0653	3.0	1.0238	1.0
EF-32-301	3.2926	3.2288	1.0198	3.8790	3.7786	1.0266	1.56
ETF	2.9645	2.9145	1.0172	4.0529	3.9335	1.0303	2.37
LU-1	3.2050	3.1698	1.0111	7.6621	7.2450	1.0576	8.89
CF2	2.8777	2.8526	1.0088	8.5109	7.9576	1.0695	15.47
CF1	2.8423	2.8244	1.0063	13.752	11.891	1.1565	46.40

Із наведеного в табл. 2 відношення величин  $\sigma/\sigma_0$  бачимо, що ККН для кругового отвору і півкругового вирізу для розглянутих композитних матеріалів є близькими. При цьому у випадку, коли жорсткість матеріалу менша у горизонтальному напрямку ( $E_x < E_y$ ), ККН практично збігаються. Максимальним є відхилення для ізотропного матеріалу і не перевищує 2.4%. Деяко істотніше відрізняються ККН у випадку, коли модуль Юнга в горизонтальному напрямку більший, ніж у вертикальному ( $E_x > E_y$ ). При цьому різниця між ККН зростає при збільшенні відношення модулів пружності  $E_{\max}/E_{\min}$  і досягає 11.5% для істотно анізотропного матеріалу CF1.

Розглянуто вирізи, що мають форму сегмента круга радіуса  $R$ , коли кут  $\varphi$  між піввіссю  $Ox$  і дотичною до межі вирізу в точці її перетину з межею півплощини змінюється в діапазоні  $10^\circ$ – $180^\circ$ . Розраховані залежності від кута  $\varphi$  максимальних напружень біля вирізу (віднесені до  $\sigma_0$ ) для випадку, коли жорсткість матеріалу більша в горизонтальному напрямку ( $E_x > E_y$ ), наведено на рис. 1а. Криві 1–6 відповідають результатам обчислень, отриманим для таких матеріалів: ізотропного, ЕФ 32-301 (крапки), ЕТФ, LU-1, CF2, CF1. (Такі ж позначення кривих зберігаються і на рис. 2, рис. 3.)

Аналогічні результати для випадку, коли жорсткість матеріалу менша у горизонтальному напрямку ( $E_x < E_y$ ), наведено на рис. 1б.

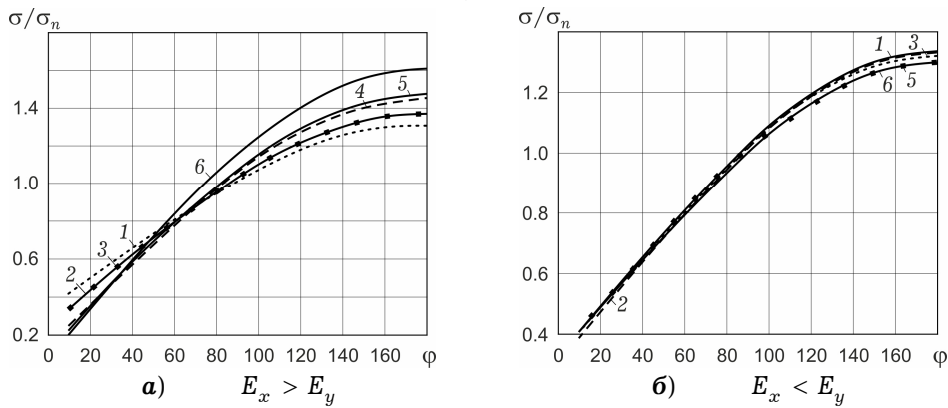


Рис. 1. Відносні ККН для сегментних вирізів.

Із результатів розрахунків, наведених на рис. 1б, випливає, що відносні ККН для всіх анізотропних матеріалів практично такі ж, як і для ізотропного матеріалу, якщо жорсткість матеріалу менша у горизонтальному напрямку. У випадку, коли матеріал жорсткіший у горизонтальному напрямку, анізотропія впливає істотніше на ККН.

Для контролю за точністю обчислень виконано розрахунки ККН для ізотропної пластинки із сегментним вирізом за точною формулою [8]

$$\frac{\sigma}{p} = 2c \frac{1 - \cos \gamma}{\gamma^2} \int_0^\infty \frac{t \operatorname{ch} t - d \operatorname{sh} t}{\operatorname{sh}^2 t - c^2 t^2} t dt, \quad (19)$$

де  $c = \sin \gamma / \gamma$ ,  $d = \cos \gamma / c$ ,  $\gamma = \pi - \varphi$ .

Виконані обчислення показали, що ККН, визначені за формулою (19) і з використанням МГПР при  $N = 60$ , відрізнялись на четвертій значущій цифрі.

Розглянемо пластинку з півеліптичним вирізом із півосями  $a$  та  $b$  за розтягу зусиллями  $p$  у напрямку осі  $Ox$ . Обчислено значення відносних ККН  $\sigma/\sigma_0$  для різних матеріалів і різних відношень півосей. Отримані ре-

зультати для відносних максимальних напружень описували за наближеною формулою

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = a_1 \frac{1 + a_2 \varepsilon}{1 + a_3 \varepsilon}, \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1, \quad (20)$$

де  $a_1, a_2, a_3$  – невідомі коефіцієнти,  $\varepsilon = a/b$ .

При розрахунках розглядали витягнуті вирізи, біля яких виникає висока концентрація напружень. З метою підвищення точності визначення ККН для таких вирізів проводилась запропонована в роботі [5] відповідна зміна параметризації рівняння контуру вирізу, що приводить до згущення вузлових точок в області, де напруження є максимальними.

Коефіцієнти  $a_1, a_2, a_3$  для матеріалів з максимальною жорсткістю матеріалу в горизонтальному напрямку ( $E_x > E_y$ ), визначені методом найменших квадратів, наведено у табл. 3. У таблиці наведено також дані і для випадку матеріалів, коли жорсткість є максимальною у вертикальному напрямку (відмічено індексом «90»).

Таблиця 3

Матеріал	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$K$	$\sigma/\sigma_T, \varepsilon = 1$
Ізотропія	1.1226	2.0576	2.3607	1.1215	0.9997
EF-32-301	1.0933	2.3213	2.5733	1.0927	0.9998
EF-32-301 <sub>90</sub>	1.0930	1.8054	2.0032		0.9999
ETF	1.0550	3.6993	3.9216	1.0551	0.9999
ETF <sub>90</sub>	1.0550	1.2495	1.3247		1.0000
LU-1	1.0567	4.2828	4.5496	1.0566	0.9999
LU-1 <sub>90</sub>	1.0565	1.0509	1.1169		1.0000
CF2	1.0394	5.5350	5.7670	1.040	1.0000
CF2 <sub>90</sub>	1.0397	0.8732	0.9092		1.0000

У табл. 3 наведено також величину  $K = K_I/p\sqrt{\pi b}$  – відношення КІН  $K_I$  для півплощини з крайовою тріщиною довжини  $b$  до КІН у нескінченній пластинці з тріщиною півдовжини  $b$  [1]. Бачимо, що ці величини добре узгоджуються між собою:  $a_1 \approx K$ .

Зазначимо, що КІН, отримані в [1] для півплощини з крайовою тріщиною, є однаковими для випадків, коли напрямок з максимальною жорсткістю матеріалу є паралельним до горизонтальної або вертикальної осі координат. Дані табл. 3 підтверджують цей фізично неочевидний результат.

У табл. 3 наведено також значення відношення  $\sigma/\sigma_T$  максимальних напружень біля півкругового вирізу, де  $\sigma_T$  обчислено за формулою (20), а  $\sigma$  – з використанням МГІР. Наведені результати додатково свідчать про високу точність формули (20).

Розраховані залежності відносних напружень від відношення півосей  $b/a$  зображено на рис. 2. Тут рис. 2а відповідає результатам обчислень для випадку, коли  $E_x < E_y$ , а рис. 2б – аналогічні дані, коли  $E_x > E_y$ .

Крапками на рис. 2 зображено напруження, розраховані МГІР, а суцільними лініями – отримані за формулою (20). Узгодження цих даних вказує на високу точність формули (20) для визначення ККН. Обчислення показали, що для вирізів у вигляді сегмента круга, для яких центральний кут змінюється від 20 до 360°, похибка формули (20) не перевищує 1.6%.

На рис. 2 прямими горизонтальними лініями наведено значення відносних напружень, визначені за формулою (20) при  $b/a \rightarrow \infty$  (тоді  $\sigma/\sigma_0 = a_1$ ). Ці прямі є асимптотами для відносних напружень при звуженні вирізів.



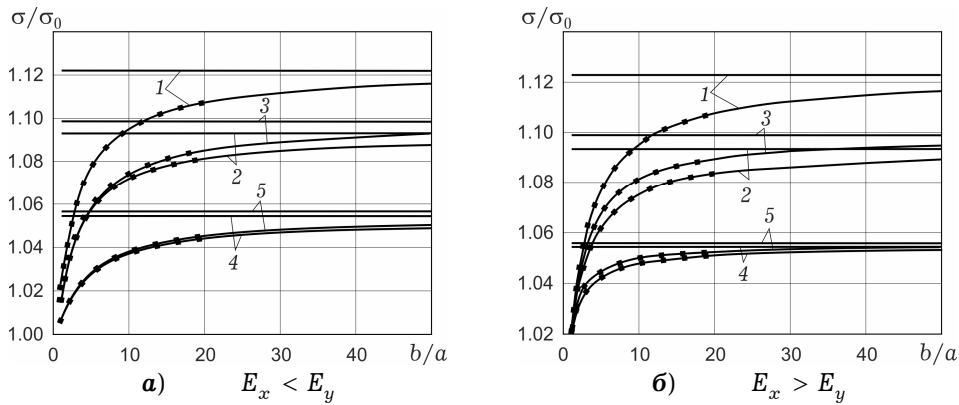


Рис. 2. Відносні ККН для півеліптичного вирізу.

Розглянуто пластинки, послаблені періодичною системою вирізів із періодом  $d$ . Зауважимо, що в інтегральні зображення для поодиноких тріщин входять потенціали (10), які містять складові вигляду  $C/(z_j - c)$ ,  $j = 1, 2$ , де  $C$ ,  $c$  – сталі. У випадку періодичної системи тріщин їх необхідно замінити на

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{C}{z_j - c - nd} = \frac{C\pi}{d} \operatorname{ctg} \frac{\pi(z_j - c)}{d}.$$

Розраховано напруження для періодичної системи півеліптичних вирізів. Отримані відносні максимальні напруження описували наближеною формулою (20). Обчислені невідомі коефіцієнти  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  при  $d/b = 1$  для різних матеріалів наведено у табл. 4.

Таблиця 4

Матеріал	$E_x < E_y$				$E_x > E_y$			
	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$K$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$K$
Ізотропія	0.4003	0.9751	0.7190	0.3986	0.4003	0.9751	0.7190	0.3987
EF-32-301	0.3786	1.1863	0.8954	0.3766	0.3395	1.4587	1.1139	0.3371
ETF	0.4079	0.9669	0.7212	0.4062	0.3305	1.5197	1.1632	0.3281
LU-1	0.3833	1.1212	0.8412	0.3813	0.2232	2.0492	1.6271	0.2212
CF2	0.4140	0.9550	0.7187	0.4126	0.2116	0.1643	0.0032	0.2086
CF1	0.4173	0.5012	0.2935	0.4161	0.1618	0.1452	0.0031	0.1597

Знайдені залежності відносних ККН від відношення півосей  $b/a$  для різних анізотропних матеріалів наведено на рис. 3. Кривими на рис. 3 зображено напруження, обчислені за допомогою МГПР, а суцільними кривими – за формулою (20).

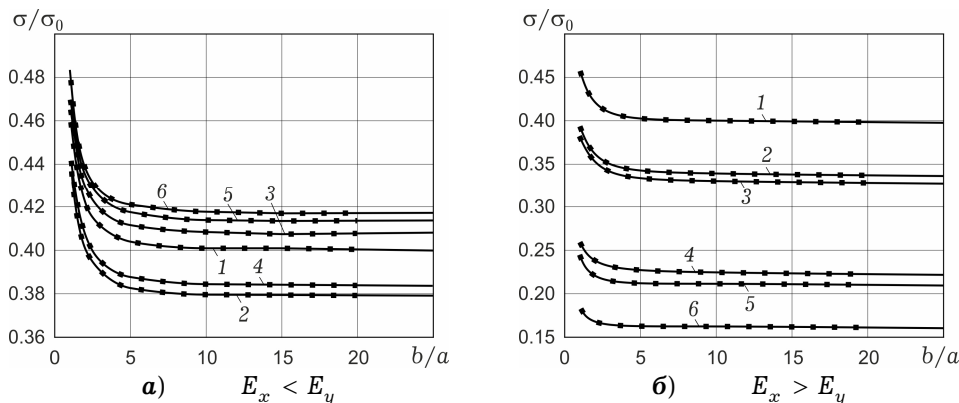


Рис. 3. Відносні ККН для періодичної системи півеліптичних вирізів.

Узгодження отриманих даних свідчить про високу точність цієї формули при  $0 < \varepsilon \leq 1$ .

У табл. 4 наведено також значення величини  $K = K_I / p\sqrt{\pi b}$ , де  $K_I$  – КІН для періодичної системи паралельних тріщин довжини  $b$  з періодом  $d$ . Із таблиці видно, що перший коефіцієнт у формулі (20) можна знайти наближено за формулою  $a_1 \approx K$ . Таким чином, концентрація напружень для звужених еліптичних вирізів (при  $\varepsilon = a/b \rightarrow 0$ ) визначається через коефіцієнт  $a_1$ , який можна знайти на основі простішої задачі – визначення КІН для прямолінійних крайових тріщин. У зв'язку з цим виконано розрахунки КІН для періодичної системи крайових тріщин довжини  $\ell$  з періодом  $d$ . Відносні КІН  $F_I = K_I / p\sqrt{\pi \ell}$  при різних значеннях  $d/\ell$  наведено у табл. 5 для випадків  $E_x < E_y$  і  $E_x > E_y$ .

Таблиця 5

Матеріал	$F_I$								
	$E_x < E_y$				$E_x > E_y$				$\infty$
	0.25	0.5	1.5	2.5	0.25	0.5	1.5	2.5	
Ізотропія	0.1995	0.2821	0.4852	0.6253	0.1995	0.2821	0.4852	0.6253	1.1215
EF-32-301	0.1885	0.2666	0.4593	0.5927	0.1686	0.2385	0.412	0.5293	1.0927
ETF	0.2035	0.2878	0.495	0.6408	0.1641	0.232	0.4012	0.5148	1.0985
LU-1	0.191	0.27	0.4663	0.6029	0.1106	0.1564	0.2709	0.3493	1.0551
CF2	0.2068	0.2924	0.5049	0.6527	0.1043	0.1475	0.2554	0.3296	1.0566
CF1	0.2084	0.2946	0.5096	0.6568	0.0798	0.1129	0.1956	0.2525	1.04

Розрахунки показали, що наближені значення для відносних КІН при малих значеннях  $\lambda = d/\ell$  можна подати у вигляді

$$F_I = k\sqrt{\lambda}, \quad (21)$$

де  $k$  – стала. Розраховану методом найменших квадратів сталу  $k$  для різних матеріалів наведено у табл. 6. У таблиці наведено також визначені за формулою (21) відносні КІН  $F_I$  для випадків матеріалів, коли  $E_x < E_y$  і  $E_x > E_y$ , при різних значеннях  $d/\ell$ .

Таблиця 6

Матеріал	$F_I$						$k$	
	$E_x < E_y$			$E_x > E_y$			$E_x < E_y$	$E_x > E_y$
	0.25	0.5	1	0.25	0.5	1		
Ізотропія	0.1994	0.2821	0.3989	0.1995	0.2821	0.3987	0.3989	0.3989
EF-32-301	0.1885	0.2666	0.3776	0.1686	0.2384	0.3371	0.377	0.3372
ETF	0.2035	0.2878	0.4062	0.1641	0.2320	0.3281	0.407	0.3280
LU-1	0.1909	0.27	0.3818	0.1106	0.1564	0.2212	0.3818	0.2212
CF2	0.2068	0.2926	0.4136	0.1042	0.1474	0.2085	0.4138	0.2085
CF1	0.2085	0.2948	0.4169	0.0799	0.1130	0.1598	0.4169	0.1598

Для порівняння вкажемо, що для періодичної системи паралельних півнескінчених тріщин в ізотропній пластинці для КІН справджується точна формула [6]  $K_I = p\sqrt{d/2}$ , тобто для  $d \rightarrow 0$  маємо точну формулу

$$F_I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\lambda} = 0.3989\sqrt{\lambda}.$$

Звідси бачимо, що наведений у табл. 6 коефіцієнт  $k$  для ізотропного матеріалу визначено чисельно з високою точністю.

**Висновки.** Розроблено алгоритм визначення напружень в анізотропних пластинках із вирізами, який базується на методі граничних інтегральних рівнянь. Інтегральні рівняння розв'язано чисельно за допомогою методу механічних квадратур. Проведено дослідження напружень біля вирізів різної форми. Встановлено характерні особливості у розподілі напружень залежно від форми і розмірів поодиноких вирізів або їх періодичних систем. Запропоновано асимптотичні співвідношення для визначення коефіцієнтів концентрації напружень для звужених вирізів еліптичної форми.

1. *Божидарнік В. В., Максимович О. В.* Пружна та гранична рівновага анізотропних пластинок з отворами і тріщинами. – Луцьк: ЛДТУ, 2003. – 226 с.
2. *Максимович О.* Розрахунок напруженого стану анізотропних пластинок з отворами і криволінійними тріщинами при врахуванні контакту їхніх берегів // Вісн. Терноп. держ. техн. ун-ту. – 2009. – **14**, № 3. – С. 36–42.
3. *Мухелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – Москва: Наука, 1966. – 708 с.  
Te same: *Muskhelishvili N. I.* Some basic problems of the mathematical theory of elasticity. – Leyden: Noordhoff Int. Publ., 1977. – 732 p.
4. *Савин Г. Н.* Распределение напряжений около отверстий. – Киев: Наук. думка, 1968. – 888 с.
5. *Саврук М. П., Казберук А.* Единый подход к решению задач о концентрации напряжений около острых и закругленных угловых вырезов // Прикл. механика. – 2007. – **43**, № 2. – С. 70–87.  
Te same: *Savruk M. P., Kazberuk A.* A unified approach to problems of stress concentration near V-shaped notches with sharp and rounded tip // Int. Appl. Mech. – 2007. – **43**, No. 2. – P. 182–197.
6. *Саврук М. П., Осив П. Н., Прокопчук И. В.* Численный анализ в плоских задачах теории трещин. – Киев: Наук. думка, 1989. – 248 с.
7. *Серенсен С. В., Зайцев Г. П.* Несущая способность тонкостенных конструкций из армированных пластиков с дефектами. – Киев: Наук. думка, 1982. – 296 с.
8. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Ленинград: Наука, 1967. – 402 с.
9. *Pilkey W. D.* Peterson's stress concentration factors. – New York: Wiley Intersci. Publ., 1997. – 501 p. .

#### НАПРЯЖЕНИЯ В АНИЗОТРОПНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ С ВЫРЕЗАМИ

Разработан алгоритм определения напряжений в анизотропной полуплоскости с вырезами, который базируется на методе граничных интегральных уравнений. Интегральные уравнения решены численно с помощью метода механических квадратур. Проведено исследование напряжений возле вырезов разной формы. Установлены характерные особенности в распределении напряжений в зависимости от формы и размеров вырезов, а также механических характеристик материала пластинок. Предложены асимптотические соотношения для определения коэффициентов концентрации напряжений для суженных вырезов эллиптической формы.

#### STRESSES IN ANISOTROPIC HALF-PLANE WITH NOTCHES

An algorithm of determination the stresses in anisotropic half-plane with notches is developed. It is based on the method of boundary integral equations. The integral equations are solved numerically by the method of mechanical quadratures. The stresses near notches of different shape are studied. The characteristic features in stress distribution depending on the shapes and sizes of notches, as well as on mechanical characteristics of the plate materials are determined. The asymptotic relations to determine the stress concentration factors for narrowed notches of elliptic shape are proposed.

<sup>1</sup> Луцьк. нац. техн. ун-т, Луцьк,

<sup>2</sup> Ін-т прикл. проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів