

Б. Є. Грицько

ЧИСЛОВО-АНАЛІТИЧНА МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕСТАЦІОНАРНОЇ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ У ЛОКАЛЬНО- НЕОДНОРІДНИХ СЕРЕДОВИЩАХ

Запропоновано спосіб спільного використання методів розщеплення, граничних елементів, покрової часової схеми та ітераційної FD (Finite-Discrete) процедури для побудови інтегрального зображення розв'язку нестационарної задачі теплопровідності для замкненої області з заданою на межі умовою Діріхле, всередині якої знаходиться локально-неоднорідна підобласть з залежними від координат фізичними характеристиками. Виконано різносторонній чисельний аналіз цього підходу з урахуванням впливу на теплове поле залежностей від координат коефіцієнта теплопровідності та питомої теплоємності матеріалу.

Знизити матеріаломісткість неоднорідних елементів конструкцій, які працюють в умовах значних теплових або механічних навантажень, та оцінити їх міцність і надійність важливо в різних галузях економіки й техніці, зокрема, в машино- і приладобудуванні та тепловій енергетиці. Для цього необхідно знайти теплові поля в об'єктах довільної форми, тобто побудувати розв'язки нестационарних задач теплопровідності. Лінійні математичні моделі, що ґрунтуються на припущенні кусково-постійної залежності теплофізичних характеристик матеріалів від координат, не завжди адекватно описують реальні процеси [1, 2, 10, 11]. Достовірніші ті, що враховують залежність коефіцієнта теплопровідності та питомої теплоємності матеріалу середовища від координат чи температури, приводять до диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами або до нелінійних [8, 9, 12–15]. Одним з підходів для знаходження розв'язків отриманих крайових задач математичної фізики, є виділення оператора, що характеризує вплив неоднорідності, і застосування до нього ітераційних методів з дискретизацією локальної області, в якій фізичні характеристики залежать від координат [4–7].

Формулювання задачі та вибір числово-аналітичної методики її розв'язування. Припустимо, що коефіцієнт теплопровідності $\lambda(x)$ та питома теплоємність $c(x)$ матеріалу тіла, що займає область $\Omega \subset \mathbf{R}^2$, залежать від координат у деякій її частині $\Omega_1 \subset \Omega$, тобто [4, 7]

$$\lambda(x) = \lambda_0 + \lambda_g(x)\chi(x), \quad c(x) = c_0 + c_g(x)\chi(x), \quad (1)$$

де $c_0 = \text{const}$, $\lambda_0 = \text{const}$, $c(x) \in C^1(\Omega)$, $\lambda(x) \in C^1(\Omega)$, $x = (x_1, x_2)$ – декартові координати; $\chi(x) = 0$, $x \in \Omega / \Omega_1$, $\chi(x) = 1$, $x \in \Omega_1$, $\chi(x)$ – характеристична функція області Ω_1 , $\Gamma \cap \Gamma_1 = \emptyset$, Γ, Γ_1 – межі областей Ω, Ω_1 , $\lambda_g(x), c_g(x)$ – функції, рівні нулю на межі Γ_1 .

Виділивши у диференціальному рівнянні зі змінними коефіцієнтами оператор, що характеризує вплив локальної неоднорідності [9], для знаходження невідомої температури $u(x, t)$ у локально-неоднорідному тілі одержимо рівняння [6]

$$a_0 \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \Delta u(x, t) = \frac{f(x, t)}{\lambda(x)} + P_x u(x, t) - P_t u(x, t), \quad (2)$$

крайові

$$u(x, t) = g(x, t), \quad (x, t) \in \Gamma \times (0, T], \quad (3)$$

та початкові

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (4)$$

умови. Тут $T = \{t : 0 < t < \infty\}$, t – час; $a_0 = \frac{c_0}{\lambda_0}$, $P_x u(x, t) = \frac{1}{\lambda(x)} \frac{\partial \lambda(x)}{\partial x_i} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_i}$,

$P_t u(x, t) = \frac{c_g(x)\lambda_0 - c_0\lambda_g(x)}{\lambda(x)\lambda_0} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$, $f(x, t)$ – потужність заданих внутрішніх

джерел в області Ω ; $u = u(x, t) \in C^2(\Omega \times (0, T]) \cap C(\Omega \times (0, T])$, $g(x, t) \in C(\Gamma)$, $u_0(x) \in C(\Omega)$, $C^m(A)$ – клас функцій, неперервно диференційовних з похідною степеня m в області A ; використовуємо правило підсумовування Ейнштейна за індексами, що повторюються.

Щоб оптимізувати розв'язування сформульованої задачі, враховуючи універсальність підходу, заснованого на безпосередньому розв'язуванні диференціальних крайових задач, та позитивні сторони методів інтегральних рівнянь для кусково-однорідних середовищ, пропонуємо поєднати їх переваги в одній числово-аналітичній методиці. Її ефективність зумовлена переходом до інтегрального зображення розв'язку (замість числового диференціювання в методах скінченних різниць та скінченних елементів) та дискретизацією лише області локальної неоднорідності і межі тіла.

Побудова інтегральних зображень розв'язку задачі непрямим методом граничних елементів (НМГЕ). Надалі для спрощення викладок покладемо $f(x, t) \equiv 0$. Використавши НМГЕ [2] і ввівши невідомі фіктивні джерела тепла, для знаходження температури запишемо інтегральне зображення розв'язку задачі (6), (3), (4):

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \int_{\Gamma} \int_0^t E(x, t, y, \tau) \varphi(y, \tau) d\tau d\Gamma(y) + \int_{\Omega} E(x, t, y, 0) u_0(y) d\Omega(y) + \\ & + \int_{\Omega_1} \int_0^t E(x, t, y, \tau) P_x u(y, \tau) d\tau d\Omega_1(y) - \\ & - \int_{\Omega_1} \int_0^t E(x, t, y, \tau) P_t u(y, \tau) d\tau d\Omega_1(y), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T], \quad (5) \end{aligned}$$

де $E(x, t, y, \tau) = e^{-\frac{r^2(x, y)}{4a_0(t-\tau)}} / (4\pi a_0(t-\tau))$ – фундаментальний розв'язок рів-

няння (2), $r^2(x, y) = \sum_{i=1}^2 (x_i - y_i)^2$.

Оскільки оператори $P_x u(x, t)$, $P_t u(x, t)$ містять невідомі похідні шуканої функції за просторовими координатами і часом, одержимо на основі (5) для них такі інтегральні зображення ($(x, t) \in \Omega \times (0, T]$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_j} = & \int_{\Gamma} \int_0^t \frac{\partial E(x, t, y, \tau)}{\partial x_j} \varphi(y, \tau) d\tau d\Gamma(y) + \int_{\Omega} \frac{\partial E(x, t, y, 0)}{\partial x_j} u_0(y) d\Omega(y) + \\ & + \int_{\Omega_1} \int_0^t \frac{\partial E(x, t, y, \tau)}{\partial x_j} P_x u(y, \tau) d\tau d\Omega_1(y) - \\ & - \int_{\Omega_1} \int_0^t \frac{\partial E(x, t, y, \tau)}{\partial x_j} P_t u(y, \tau) d\tau d\Omega_1(y). \quad (6) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \int_{\Gamma} \int_0^t \frac{\partial E(x, t, y, \tau)}{\partial t} \varphi(y, \tau) d\tau d\Gamma(y) + \int_{\Omega} \frac{\partial E(x, t, y, 0)}{\partial t} u_0(y) d\Omega(y) +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\Omega_1} \int_0^t \frac{\partial E(x, t, y, \tau)}{\partial t} P_x u(y, \tau) d\tau d\Omega_1(y) - \\
& - \int_{\Omega_1} \int_0^t \frac{\partial E(x, t, y, \tau)}{\partial t} P_t u(y, \tau) d\tau d\Omega_1(y). \tag{7}
\end{aligned}$$

Спрямувавши в (5) точку x до межі тіла, отримаємо граничне інтегральне рівняння:

$$\begin{aligned}
g(x, t) = & -\frac{1}{2} \varphi(y, \tau) + \int_{\Gamma} \int_0^t E(x, t, y, \tau) \varphi(y, \tau) d\tau d\Gamma(y) + \\
& + \int_{\Omega} E(x, t, y, 0) u_0(y) d\Omega(y) + \\
& + \int_{\Omega_1} \int_0^t E(x, t, y, \tau) P_x u(y, \tau) d\tau d\Omega_1(y) - \\
& - \int_{\Omega_1} \int_0^t E(x, t, y, \tau) P_t u(y, \tau) d\tau d\Omega_1(y), \quad (x, t) \in \Gamma \times (0, T], \tag{8}
\end{aligned}$$

з розв'язку якого можна знайти введені невідомі фіктивні джерела тепла та обчислити, використовуючи (6), (7), температуру у внутрішніх точках тіла і на його межі.

Побудова дискретно-континуальної моделі. Для аналітичного інтегрування за часом розіб'ємо проміжок $(0, T]$ на K рівних проміжків $t_k = k\Delta t$, $t_K = T$ і використаємо схему послідовності початкових умов (СППУ) [2], згідно з якою в кінці кожного проміжку часу шукатимемо значення $u_k(x, t)$ і використовуватимемо їх як початкові для наступного кроку в (5). Межу тіла дискретизуємо на криволінійні ермітові елементи другого порядку [3]: $\Gamma = \bigcup_{i=1}^N \Gamma_i$, $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$, $i \neq j$, а область Ω_1 – на восьмивузлові ермітові елементи другого порядку [3], $\Omega = \bigcup_{q=1}^{N_{\text{inside}}} \Omega_q$, $\Omega_q \cap \Omega_j = \emptyset$, $q \neq j$. Невідому функцію густини розподілу на кожному часовому інтервалі апроксимуємо бета-сплайнами нульового порядку (постійними):

$$\varphi_k(x) = \sum_{j=1}^N \chi_{kj}(x) d_{kj}, \quad \chi_{ij} = \begin{cases} 1, & x \in \Gamma_j, \\ 0, & x \notin \Gamma_j, \end{cases} \quad d_{kj} = \text{const},$$

тобто на кожному кроці по часу визначатимемо вектор невідомих $d_k = (d_{k1}, \dots, d_{kN})$.

На останньому кроці побудови дискретно-континуальної моделі використаємо ітераційну FD процедуру. За початкове наближення на кожному часовому кроці беремо розв'язок однорідної задачі

$$\begin{aligned}
u_k^0(x, t) = & \sum_{i=1}^N d_{ki} \int_{\Gamma_i} E_{\tau}(x, t, y) d\Gamma_i(y) + \\
& + \int_{\Omega} E(x, t, y, 0) u_{k-1}(y, (k-1)\Delta t) d\Omega(y). \tag{9}
\end{aligned}$$

Тоді інтегральні зображення (5)–(7) для p -ї ($p = 1, \dots, N_{\text{iter}}$) ітерації k -го часового проміжку мають вигляд $((x, t) \in \Omega \times (t_{k-1}, t_k])$:

$$u_k^p(x, t) = \sum_{i=1}^N d_{ki}^p \int_{\Gamma_i} E_{\tau}(x, t, y) d\Gamma_i(y) +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\Omega} E(x, t, y, 0) u_{k-1}(y, (k-1)\Delta t) d\Omega(y) + \\
& + \int_{\Omega_1} \int_0^t E(x, t, y, \tau) P_x u_k^{p-1}(y, \tau) d\tau d\Omega_1(y) - \\
& - \int_{\Omega_1} \int_0^t E(x, t, y, \tau) P_t u_k^{p-1}(y, \tau) d\tau d\Omega_1(y), \tag{10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_k^p(x, t)}{\partial x_j} &= \sum_{i=1}^N d_{ki}^p \int_{\Gamma_i} Q_{j\tau}(x, t, y) d\Gamma_i(y) + \\
& + \int_{\Omega} \frac{\partial E(x, t, y, 0)}{\partial x_j} u_{k-1}(y, (k-1)\Delta t) d\Omega(y) + \\
& + \int_{\Omega_1} \int_0^t \frac{\partial E(x, t, y, 0)}{\partial x_j} P_x u_k^{p-1}(y, \tau) d\tau d\Omega_1(y) - \\
& - \int_{\Omega_1} \int_0^t \frac{\partial E(x, t, y, 0)}{\partial x_j} P_t u_k^{p-1}(y, \tau) d\tau d\Omega_1(y), \tag{11}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_k^p(x, t)}{\partial t} &= \sum_{i=1}^N d_{ki}^p \int_{\Gamma_i} Q_{t\tau}(x, t, y) d\Gamma_i(y) + \\
& + \int_{\Omega} \frac{\partial E(x, t, y, 0)}{\partial t} u_{k-1}(y, (k-1)\Delta t) d\Omega(y) + \\
& + \int_{\Omega_1} \int_0^t \frac{\partial E(x, t, y, 0)}{\partial t} P_x u_k^{p-1}(y, \tau) d\tau d\Omega_1(y) - \\
& - \int_{\Omega_1} \int_0^t \frac{\partial E(x, t, y, 0)}{\partial t} P_t u_k^{p-1}(y, \tau) d\tau d\Omega_1(y). \tag{12}
\end{aligned}$$

Тут $\Phi_{\tau}(x, t, y) = \int_0^t \Phi(x, t, y, \tau) d\tau$, $\Phi \in \{E, Q_j, Q_t\}$, $d_k^p = (d_{k1}^p, \dots, d_{kN}^p)$ – інтенсив-

ність невідомих джерел тепла на p -й ітерації k -го часового проміжку.

Якщо послідовність (10) інтегральних зображень збіжна, тобто $\exists \lim_{p \rightarrow \infty} u_k^p(x, t) = u_k(x, t)$, то легко бачити, що (10) задовольняє рівняння (2).

Виберемо на межі тіла множину точок колокації $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ і задовольнимо на ній граничне інтегральне рівняння (8). Для знаходження невідомих джерел тепла, введених у граничних елементах, отримаємо систему лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР)

$$Ad_k^p = B_p, \tag{13}$$

де $A = \{a_{ij}\}$, $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, N$, $d_p^k = \{d_{kj}^p\}$, $j = 1, \dots, N$, $B_p = \{b_i^p\}$, $i = 1, \dots, N$, – коефіцієнти матриці і правої частини для p -го кроку ітерації ($p = 1, \dots, N_{\text{iter}}$) визначимо так:

$$a_{ij} = \int_{\Gamma_j} \int_0^{\Delta t} E(x_i, \Delta t, y, \tau) d\tau d\Gamma_j(y),$$

$$\begin{aligned}
b_i^p &= g(x_i, k\Delta t) - \int_{\Omega} E(x_i, \Delta t, y, 0) u_{k-1}(y) d\Omega(y) - \\
&\quad - \int_{\Omega_1} \int_0^{\Delta t} E(x_i, \Delta t, y, \tau) P_x u_k^{p-1}(y, \tau) d\tau d\Omega_1(y) + \\
&\quad + \int_{\Omega_1} \int_0^{\Delta t} E(x_i, \Delta t, y, \tau) P_t u_k^{p-1}(y, \tau) d\tau d\Omega_1(y).
\end{aligned}$$

Зрозуміло, що під час знаходження початкового наближення СЛАР має аналогічний (13) вигляд $Ad_k^0 = B_0$, а значення b_i^0 з урахуванням (9) задають формули:

$$b_i = g(x_i, k\Delta t) - \int_{\Omega} E(x_i, \Delta t, y, 0) u_{k-1}(y) d\Omega(y).$$

Після завершення ітераційного процесу знаходимо значення шуканої функції, а також її похідних за координатами і часом на множині $\Omega \times (t_{k-1}, t_k]$, використовуючи (10)–(12) відповідно.

Зазначимо, що при $f(x, t) \neq 0$ не виникає жодних принципових труднощів, лише в інтегральному зображенні (5) і, відповідно, в правій частині СЛАР (13) появляться доданки

$$a_0 \int_{\Omega} \int_0^t E(x, t, y, \tau) f(y, \tau) d\tau d\Omega(y) \text{ та } -a_0 \int_{\Omega} \int_0^{\Delta t} E(x_i, \Delta t, y, \tau) f(y, \tau) d\tau d\Omega(y).$$

Числові дослідження. Запропонований числово-аналітичний підхід апробували для області Ω , вибраної у вигляді круга одиничного радіуса з центром в $(0, 0)$. Залежність коефіцієнта теплопровідності та питомої теплоємності від координат у прямокутнику Ω_1 розміром $2k_1 \times 2k_2$ з центром в $(0, 0)$ задавали функціями

$$\begin{aligned}
\lambda(x) &= \lambda_0 + k_{\lambda g} [1 + \cos(\pi x_1 / k_1)] [1 + \cos(\pi x_2 / k_2)], \\
c(x) &= c_0 + k_{cg} [1 + \cos(\pi x_1 / k_1)] [1 + \cos(\pi x_2 / k_2)],
\end{aligned}$$

де $\lambda_0 = 1$ Вт/(м $^\circ$ С), $c_0 = 2$ Дж/(кг $^\circ$ С), $k_1 = 0.25$, $k_2 = 0.25$, $k_{\lambda g}$, k_{cg} – сталі.

Розмірності всіх величин подано в системі СІ, за винятком температури, яку задано в градусах Цельсія. Крок розбиття за часом вибирали $\Delta t = 0.05$, кількість граничних елементів $N = 24$, елементів дискретизації області локальної неоднорідності $N_{\text{inside}} = 48$, кроків для ітераційної процедури $N_{\text{iter}} = 3$, крайову (3) і початкову (4) умови у вигляді

$$g(x, t) = x_2, \quad u_0(x) = \begin{cases} 0, & r(x, 0) < 0.95, \\ x_2 \left(\frac{r(x, 0) - 0.95}{0.05} \right), & r(x, 0) \geq 0.95, \end{cases} \quad (14)$$

$$g(x, t) = x_2 \left(1 + \frac{t}{4\Delta t} \right), \quad u_0(x) = x_2, \quad (15)$$

тобто в першому випадку початкова умова рівна нулю майже скрізь всередині круга, крім внутрішнього примежового шару, де вона лінійно спадає від значення x_2 на межі до 0, в другому – крайову умову вибирали так, щоб наприкінці четвертого часового проміжку значення температури на межі подвоювалось.

Рис. 1 ілюструє поширення тепла у локально-неоднорідному тілі з урахуванням лише залежності коефіцієнта теплопровідності від координат на другому та четвертому кроках за часом за умов (14).

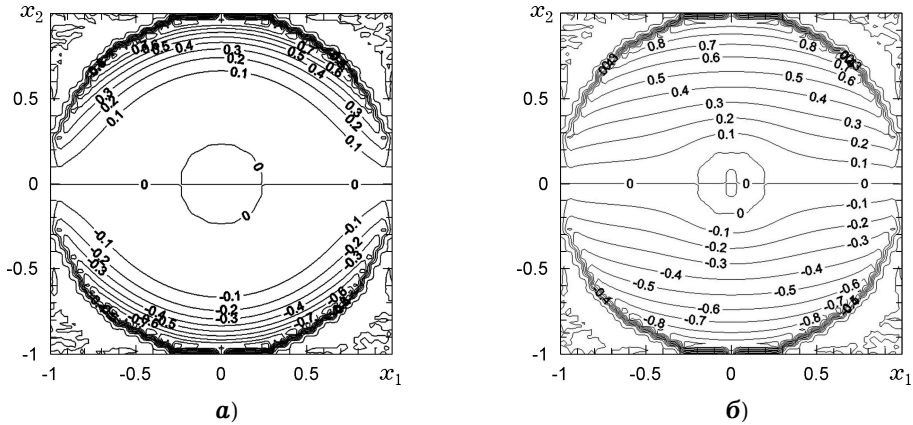


Рис. 1. Поширення теплового поля в неоднорідному крузі одиничного радіуса ($\lambda_0 = 1 \text{ Вт/(м}^\circ\text{С)}$, $c_0 = 2$, $k_{\lambda,g} = 2$, $k_{c,g} = 0$) в різні моменти часу: а – 0.1; б – 0.2 с.

Як бачимо, наприкінці четвертого часового проміжку процес став майже стаціонарним, причому у прямокутнику Ω_1 , де коефіцієнт теплопровідності вищий за λ_0 , встановлюється рівномірніша температура, бо ізотерми огинають його. Зауважимо, що і в однорідному крузі ($k_{\lambda,g} = 0$, $k_{c,g} = 0$) процес стає стаціонарним в кінці четвертого кроку.

Дослідимо окремо вплив залежності від координат коефіцієнта теплопровідності ($k_{\lambda,g} = 2$, $k_{c,g} = 0$) в цьому ж крузі для умов (14) (рис. 2а) і (15) (рис. 2б). Частина отриманих результатів подана на рис. 2 для різних моментів часу: $t = 0.05$ (\blacklozenge), 0.1 (\blacksquare), 0.15 (\bullet , \circ) та 0.2 (\blacktriangle , \triangle), причому на рис. 2а порівняно з однорідним випадком (графіки з контурними символами). Відзначимо, що в локально-неоднорідному тілі (рис. 2б) через високу теплопровідність всередині області Ω_1 температура в ній майже всюди однакова (горизонтальні лінії), чого не зафіксовано в однорідному тілі. Отже, зміна температури на межі призводить до слабших змін всередині тіла внаслідок суттєвої його теплоємності.

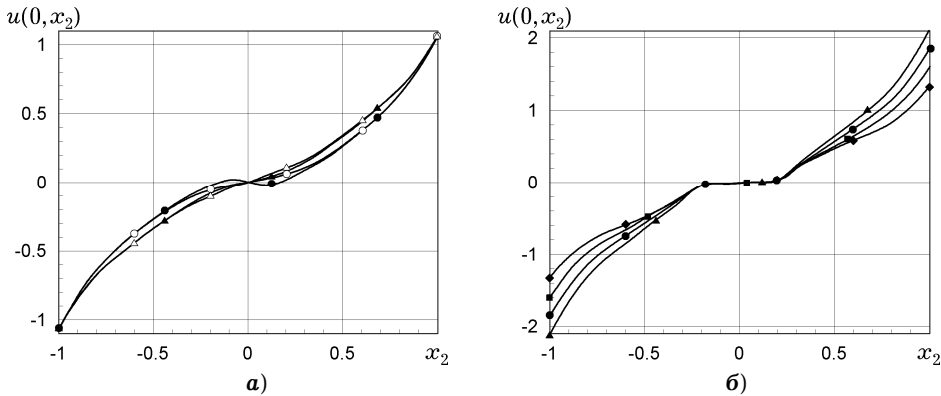


Рис. 2. Оцінка впливу залежності від координат коефіцієнта теплопровідності на розподіл температури в неоднорідному крузі одиничного радіуса в різні моменти часу для граничних і початкових умов: (14) – а; (15) – б.

Також досліджували вплив залежності від координат коефіцієнта питомої теплоємності ($k_{\lambda,g} = 0$, $k_{c,g} = 5$) у цьому ж крузі та сумарний вплив залежності від координат обох коефіцієнтів для умов (14). Частина отриманих результатів подана на рис. 3 для різних моментів часу порівняно з однорідним випадком.

У початкові моменти часу, поки тепло ще не встигло поширитись в область неоднорідності, розв'язки збігаються, в більш пізні – відрізняються, причому з часом процес виходить на стаціонарний режим.

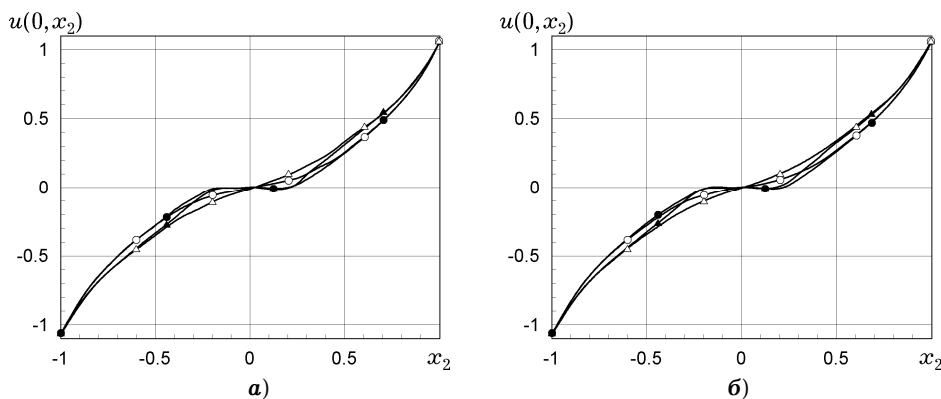


Рис. 3. Оцінка впливу залежності від координат коефіцієнта питомої теплоємності (а) та сумарного впливу залежності від координат обох коефіцієнтів (б) на розподіл температури в неоднорідному крузі одиничного радіуса в різні моменти часу.

Висновки. Для знаходження розв'язків нестационарних задач теплопровідності у локально-неоднорідних середовищах розроблено числово-аналітичну методіку, яка поєднує непрямий метод граничних елементів (з урахуванням його переваг для кусково-однорідних середовищ) з виділенням оператора, що характеризує вплив локальної області геометричної неоднорідності, та подальшою дискретизацією лише цієї області. Складніша математична модель, що призводить до диференціального рівняння зі змінними коефіцієнтами, та ітераційна FD процедура дають можливість використати переваги вказаних методів, оптимізувати обчислення під час визначення температури і теплового потоку у локально-неоднорідних об'єктах довільної форми. Розроблена числово-аналітична методіка суттєво зменшує похибки, пов'язані з апроксимацією крайової задачі, оскільки фундаментальний розв'язок абсолютно точно задовольняє вихідне рівняння (2) в області $\Omega \setminus \Omega_1$ та початкові умови (4). Вплив похибок, зумовлених дискретизацією і числовим інтегруванням, несуттєвий і є достатньо контрольованим через довільність вибору кількості граничних елементів, кількості елементів дискретизації області локальної неоднорідності Ω_1 і кроку за часом.

Обчислювальні експерименти засвідчили доцільність урахування залежності коефіцієнтів теплопровідності та питомої теплоємності матеріалу області від координат, оскільки відносна похибка значень теплового поля, отриманих з таким урахуванням і без нього, досягає $8 \div 10\%$ і не зменшується з бігом часу.

Модульний принцип програмної реалізації цього підходу дозволив уніфікувати розробку його складових і сприятиме підвищенню універсальності й гнучкості побудованої математичної моделі для розв'язування подібних задач у кусково-однорідних тілах з локальними областями неоднорідності. Результати можна використати під час створення сучасних методик ідентифікації локальних неоднорідностей у твердих термопружних тілах.

1. *Беляев Н. М., Рядно А. А.* Математические методы теплопроводности. – Киев: Вища шк., 1993. – 416 с.
2. *Бенерджи П., Баттерфилд Р.* Метод граничных элементов в прикладных науках. – Москва: Мир, 1984. – 494 с.
3. *Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л.* Методы граничных элементов. – Москва: Мир, 1987. – 524 с.
4. *Грицько Б., Гудзь Р., Журавчак Л.* Моделювання розподілу температурного поля у неоднорідних середовищах за допомогою граничних, приграничних та скінченних елементів // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. математики та інформатики. – 2009. – Вип. 15. – С. 208–223.

5. Гудзь Р. В., Журавчак Л. М., Петльований А. Т. Розв'язування плоскої статичної задачі термопружності для локально-неоднорідного тіла поєднанням методів граничних, приграничних та скінченних елементів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – **49**, № 2. – С. 148–156.
6. Журавчак Л. М., Грицько Є. Г. Метод приграничних елементів у прикладних задачах математичної фізики. – Львів: Карпат. відділення Ін-ту геофізики ім. С. І. Субботіна НАН України, 1996. – 220 с.
7. Журавчак Л. М., Гудзь Р. В., Грицько Б. Є. Стационарне температурне поле в кусково-однорідному тілі з локальними неоднорідностями // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2009. – Вип. 7. – С. 111–120.
8. Коляно Ю. М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. – Киев: Наук. думка, 1992. – 280 с.
9. Кушнір Р. М., Попович В. С. Термопружність термочутливих тіл. – Львів: Сполум, 2009. – 412 с. – Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під заг. ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра: В 5 т. – Т. 3.
10. Подстригач Я. С., Ломакин В. А., Коляно Ю. М. Термоупругость тел неоднородной структуры. – Москва: Наука, 1984. – 368 с.
11. Kushnir R. M. Generalized conjugation problems in mechanics of piecewise-homogeneous elements of constructions // Z. angew. Math. Mech. – 1996. – **76**, No. S5. – P. 283–284.
12. Kushnir R. M., Popovych V. S. Heat conduction problems of thermosensitive solids under complex heat exchange // In: Heat conduction – Basic research / V. S. Vikhrenko (ed.). – Rijeka: InTech (Croatia), 2011. – 350 p. – (Chap. 6. – P. 131–154.) – <http://www.intechopen.com/books/show/title/heat-conduction-basic-research>.
13. Kushnir R. M., Popovych V. S., Vovk O. M. The thermoelastic state of a thermosensitive sphere and space with a spherical cavity subject to complex heat exchange // J. Eng. Math. – 2008. – **61**, No. 2-4. – P. 357–369.
14. Kushnir R., Protsiuk B. Determination of the thermal fields and stresses in multi-layer solids by means of the constructed Green functions // In: R. B. Hetnarski (ed.). Encyclopedia of Thermal Stresses. – Springer, 2014. – Vol. 2. – P. 924–931.
15. Sutradhar A., Paulino G. H. The simple boundary element method for transient heat conduction in functionally graded materials // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. – 2004. – **193**, No. 42-44. – P. 4511–4539.

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ЛОКАЛЬНО-НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

Предложен способ совместного использования методов расщепления, граничных элементов, пошаговой временной схеммы последовательности начальных условий и итерационной FD (Finite-Discrete) процедуры для построения интегрального представления решения нестационарной задачи теплопроводности для области с заданным на границе условием Дирихле, внутри которой находится локально-неоднородная подобласть с зависимыми от координат физическими характеристиками. Разработанный подход проанализирован с учетом влияния на тепловое поле зависимостей от координат коэффициента теплопроводности и удельной теплоемкости материала.

THE NUMERICALLY-ANALYTICAL TECHNIQUE FOR SOLVING OF NON-STATIONARY HEAT-CONDUCTION PROBLEM IN LOCALLY-INHOMOGENEOUS MEDIA

A combination of dissociation method, boundary elements method, step-by-step time scheme and finite-discrete iteration procedure are used for creation of integral representation of solution of non-stationary heat conductivity problem for a domain with Dirichlet's boundary condition and sub-domain, in which thermal properties are dependent on coordinates. Various numerical analysis of proposed approach for coordinate-dependent heat conductance and heat volume coefficients has been done.

Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів

Одержано
31.10.14