

ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОЦЕСІВ АКУСТИЧНОЇ ВЗАЄМОДІЇ ОБОЛОНОК З РІДИНОЮ

Побудовано математичну модель акустичної взаємодії оболонки обертання з рідиною за осесиметричного навантаження. В основу моделі покладено лінійні співвідношення оболонок Тимошенка – Міндліна та акустичне наближення рідини. Сформульовано початково-крайову та відповідну їй варіаційну задачу взаємодії двох середовищ. Для розв'язування варіаційної задачі акустичної взаємодії оболонок обертання з рідиною побудовано проекційно-сіткову схему, у якій використано напівдискретизацію Гальоркіна із залученням апроксимацій методу скінченних елементів за просторовими змінними та однокрокову рекурентну схему інтегрування за часом. Проаналізовано напружено-деформований стан оболонки під дією нормального гідростатичного тиску. Наведено порівняння результатів обчислень прогинів, отриманих за запропонованою методикою і за відомим аналітичним розв'язком.

Вступ. Складність задач акустичної взаємодії оболонкових конструкцій з рідиною зумовлена необхідністю одночасно враховувати зміни фізико-механічних полів у різних фізичних системах.

Для моделювання сумісних коливань оболонок з рідиною зазвичай використовують математичні моделі тонких оболонок, що ґрунтуються на класичних гіпотезах Кірхгофа – Лява і Тимошенка – Міндліна [4, 8], та акустичне наближення для опису процесів у рідині [7, 10]. Широкого розповсюдження набувають уточнені математичні моделі оболонок, які враховують поперечні лінійні та зсувні деформації [2, 6].

Методика розв'язування задач взаємодії досить складна та, зазвичай, потребує числових методів, заснованих, зокрема, на варіаційних постановках розглядуваних задач [1, 9, 11].

Більшість публікацій присвячена зовнішнім задачам взаємодії [12, 13]. Нижче розглянуто внутрішню задачу акустичної взаємодії оболонки з рідиною, дослідження якої започатковано раніше [2, 3].

Формулювання початково-крайової задачі. Розглянемо замкнену ізоτροпну оболонку обертання сталої товщини h , повністю заповнену рідиною. Вважаємо, що координатні лінії серединної поверхні оболонки збігаються з лініями головних кривин оболонки, а товщина h істотно менша, ніж інші її розміри. Віднесемо оболонку до циліндричної системи координат (r, z, θ) так, щоб вісь Oz збігалася із віссю симетрії оболонки (див. рис. 1). Тоді серединна поверхня оболонки однозначно визначається меридіаном Γ_S , який описуємо параметричним заданням $r = r(z) \forall z \in [0, L]$. Позначимо через $\Omega = \Omega_F \cup \Gamma_S$ меридіанний перетин цієї конструкції при $\theta = \text{const}$. Вважаємо, що границя Γ області Ω неперервна за Лїпшицем і $n = (\cos(n, r), \sin(n, r))$ – одиничний вектор зовнішньої нормалі до Ω . Очевидно, що $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_S$, де Γ_0 – частина границі Γ , що лежить на осі Oz .

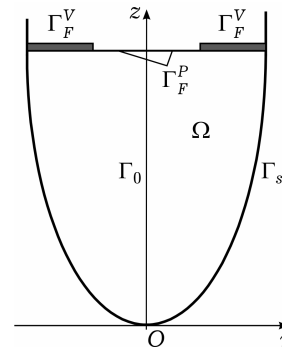


Рис. 1

Оболонка реагує на дію, з одного боку, вектора $f = (\tilde{f}_1, \tilde{f}_3, \tilde{f}_4)$ зовнішнього навантаження, а з іншого – тиску p рідини. Оскільки рідина нев'язка, а отже, відсутнє тертя між нею і оболонкою, то тангенціальне навантаження на оболонку складається лише з тангенціальної компоненти $f_1 = \tilde{f}_1$

вектора зовнішнього навантаження. Нормальне ж навантаження на оболонку дорівнює сумі нормальної складової вектора зовнішнього навантаження та акустичного тиску:

$$f_3 = \tilde{f}_3 + p = \tilde{f}_3 - \frac{\partial \Psi}{\partial t}.$$

Припустимо, що в кожен момент часу $t \in [0, T]$, $0 < T < +\infty$, зовнішнє навантаження викликає лише осесиметричні переміщення конструкції. Тоді вектор переміщень $s = (u, w, \gamma)$ серединної поверхні оболонки [8] і потенціал швидкостей Ψ рідини [10] визначаємо із

– *рівнянь руху*:

$$\begin{aligned} A_1 A_2 \left(\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \tilde{f}_1 \right) - \left\{ \frac{\partial}{\partial z} (A_2 N_1) - N_2 \frac{\partial A_2}{\partial z} + A_1 A_2 \frac{N_{13}}{R_1} \right\} &= 0, \\ \frac{1}{\rho_0 c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) &= f_0 \quad \text{в} \quad \Omega \times (0, T], \\ A_1 A_2 \left(\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \tilde{f}_3 + \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) - \left\{ \frac{\partial}{\partial z} (A_2 N_{13}) - A_1 A_2 \left(\frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} \right) \right\} &= 0, \\ A_1 A_2 \left(\frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} - \tilde{f}_4 \right) - \left\{ \frac{\partial}{\partial z} (A_2 M_1) - M_2 \frac{\partial A_2}{\partial z} - A_1 A_2 N_{13} \right\} &= 0; \end{aligned} \quad (1)$$

– *співвідношень Коші*, які пов'язують компоненти вектора деформацій з компонентами вектора переміщень:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{w}{R_1}, \quad \varepsilon_2 = \frac{u}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial z} + \frac{w}{R_2}, \quad \varepsilon_{13} = \gamma + \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{u}{R_1}, \\ \alpha_1 &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial \gamma}{\partial z}, \quad \alpha_2 = \frac{\gamma}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial z} \quad \text{на} \quad \Gamma_S \times (0, T]; \end{aligned} \quad (2)$$

– *співвідношень пружності*, які пов'язують зусилля з деформаціями:

$$\begin{aligned} N_1 &= B(\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2), \quad N_2 = B(\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1), \quad N_{13} = B_C \varepsilon_{13}, \\ M_1 &= D(\alpha_1 + \nu \alpha_2), \quad M_2 = D(\alpha_2 + \nu \alpha_1) \quad \text{на} \quad \Gamma_S \times (0, T]. \end{aligned} \quad (3)$$

Сталі

$$B = \frac{Eh}{1 - \nu^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}, \quad B_C = Ghk'$$

визначають коефіцієнти жорсткості оболонки. Тут G і k' – модуль і коефіцієнт зсуву відповідно. Для ізотропного матеріалу $G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$, $k' = 5/6$ [8].

Задачу доповнимо крайовими та початковими умовами:

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \Psi}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial t} \quad \text{на} \quad \Gamma_S \times [0, T], \quad (4)$$

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_0 \times [0, T], \quad (5)$$

$$\Psi = \tilde{\Psi} \quad \text{на} \quad \Gamma_F^P \times [0, T], \quad (6)$$

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \Psi}{\partial n} = v_n \quad \text{на} \quad \Gamma_F^V \times [0, T], \quad (7)$$

$$\begin{aligned} u|_{z=0} = 0, \quad u|_{z=L} = 0, \quad \gamma|_{z=0} = 0, \quad \gamma|_{z=L} = 0, \\ N_{13}|_{z=0} = 0, \quad w|_{z=L} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_S \times [0, T], \end{aligned} \quad (8)$$

$$\Psi|_{t=0} = \Psi_0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t}|_{t=0} = \Psi_1 \quad \text{в} \quad \Omega, \quad s|_{t=0} = s_0, \quad \frac{\partial s}{\partial t}|_{t=0} = s_1 \quad \text{на} \quad \Gamma_S. \quad (9)$$

Крайові умови (8) виражають умови симетрії замкненої оболонки на осі обертання OZ . При цьому допускаємо, що меридіан оболонки при $r = 0$ має дотичну, перпендикулярну до цієї осі.

Співвідношення (1)–(9) утворюють замкнену систему рівнянь початково-крайової задачі акустичної взаємодії оболонки та нев'язкої стисливої рідини [2].

Варіаційне формулювання задачі. Введемо функціональні простори

$$\begin{aligned} V &= \{v \in H^1((0, L)) \mid v(0) = v(L) = 0\}, \quad Y = \{y \in H^1((0, L)) \mid y(0) = 0\}, \\ \Xi &= \{\xi \in H^1((0, L)) \mid \xi(0) = \xi(L) = 0\}, \quad S = V \times Y \times \Xi, \quad G = [L^2((0, L))]^3, \\ \Phi &= \{\varphi \in H^1(\Omega)\}, \quad H = L^2(\Omega), \quad Q = S \times \Phi, \quad X = G \times H, \end{aligned}$$

де $H^m(D)$ – простір Соболева функцій, інтегровних з квадратом у заданій області D зі всіма своїми узагальненими похідними до m -го порядку включно.

Згідно з принципом віртуальних робіт [5], помножимо рівняння задачі (1) на довільні функції $\varphi \in \Phi$ та $g = (v, y, \xi) \in S$ і результат їх суми проінтегруємо по відповідних областях з використанням інтегрування частинами:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_F} \left\{ \frac{1}{\rho_0 c^2} \Psi'' + \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) - f_0 \varphi \right\} r dr dz - \\ & - \int_{\Gamma_F} \frac{\varphi}{\rho_0} r \left(\frac{\partial \Psi}{\partial r} \cos(n, r) + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \cos(n, z) \right) d\Gamma_F + \\ & + \int_0^L \left\{ A_1 A_2 (\rho h u'' - \tilde{f}_1) v - \left[-\frac{\partial v}{\partial z} A_2 N_1 - N_2 \frac{\partial A_2}{\partial z} v + \right. \right. \\ & \left. \left. + A_1 A_2 \frac{N_{13}}{R_1} v \right] \right\} dz + \int_0^L \left\{ A_1 A_2 (\rho h w'' - \tilde{f}_3 + \psi') y - \right. \\ & \left. - \left[-\frac{\partial y}{\partial z} A_2 N_{13} - A_1 A_2 \left(\frac{N_1}{R_1} y + \frac{N_2}{R_2} y \right) \right] \right\} dz + \\ & + \int_0^L \left\{ A_1 A_2 \left(\frac{\rho h^3}{12} \gamma'' - \tilde{f}_4 \right) \xi - \left[-\frac{\partial \xi}{\partial z} A_2 M_1 - M_2 \frac{\partial A_2}{\partial z} \xi - \right. \right. \\ & \left. \left. - A_1 A_2 N_{13} \xi \right] \right\} dz - A_2 (N_1 v + N_{13} y + M_1 \xi) \Big|_0^L = 0. \end{aligned}$$

Зазначимо, що вираз у круглих дужках у контурному інтегралі по Γ_F описує нормальну похідну потенціалу швидкостей $\frac{\partial \Psi}{\partial n}$. При врахуванні граничних умов слід пам'ятати, що $\Gamma_F = \Gamma_0 \cup \Gamma_F^V \cup \Gamma_F^P \cup \Gamma_S$, а також, що при переході від інтеграла по контуру до означеного інтеграла для елемента дуги маємо вираз $d\Gamma_F = A_1 dz$.

З урахуванням наведеного вище та крайових умов варіаційне рівняння набуває вигляду

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_F} \left\{ \frac{1}{\rho_0 c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \varphi + \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) - f_0 \varphi \right\} r dr dz + \\
& + \int_0^L \left\{ \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} v + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} y + \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} \xi \right\} A_1 A_2 dz - \int_{\Gamma_F^V} v_n \varphi r d\Gamma_F^V + \\
& + \int_0^L \left\{ \sum_{j=1}^2 [N_j(s) \varepsilon_j(g) + M_j(s) \alpha_j(g)] + N_{13}(s) \varepsilon_{13}(g) \right\} A_1 A_2 dz - \\
& - \int_0^L \frac{\partial w}{\partial t} \varphi A_1 A_2 dz + \int_0^L \frac{\partial \Psi}{\partial t} \varphi A_1 A_2 dz - \\
& - \int_0^L (\tilde{f}_1 v + \tilde{f}_3 y + \tilde{f}_4 \xi) A_1 A_2 dz = 0.
\end{aligned}$$

Введемо такі лінійні та білінійні форми:

$$\begin{aligned}
m(\psi, \varphi) &= \int_{\Omega_F} \frac{1}{\rho_0 c^2} \psi \varphi r dr dz, & b(s, \varphi) &= \int_0^L w \varphi A_1 A_2 dz, \\
\mu(s, g) &= \int_0^L \left\{ \rho h u v + \rho h w y + \frac{\rho h^3}{12} \gamma \xi \right\} A_1 A_2 dz, \\
a(\psi, \varphi) &= \int_{\Omega_F} \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) r dr dz, \\
\eta(s, g) &= \int_0^L \left\{ \sum_{j=1}^2 [N_j(s) \varepsilon_j(g) + M_j(s) \alpha_j(g)] + N_{13}(s) \varepsilon_{13}(g) \right\} A_1 A_2 dz, \\
\langle l, \varphi \rangle &= \int_{\Omega_F} f_0 \varphi r dr dz + \int_{\Gamma_F^V} v_n \varphi r d\Gamma_F^V, \\
\langle \lambda, g \rangle &= \int_0^L (\tilde{f}_1 v + \tilde{f}_3 y + \tilde{f}_4 \xi) A_1 A_2 dz. \tag{10}
\end{aligned}$$

Покладаючи в (10) послідовно $\varphi = 0$ і $g = 0$, отримуємо систему варіаційних рівнянь принципу віртуальних робіт [5], після доповнення якої початковими умовами сформулюємо варіаційну задачу акустичної взаємодії:

$$\begin{aligned}
\text{задано:} \quad \psi_0 &\in \Phi, \quad \psi_1 \in H, \quad s_0 \in S, \quad s_1 \in G, \\
l &\in L^2(0, T; \Phi'), \quad \lambda \in L^2(0, T; S');
\end{aligned}$$

знайти: пару $p = (\psi, s) \in L^2(0, T; \Phi \times S)$ таку, що

$$\begin{aligned}
m(\psi''(t), \varphi) + a(\psi(t), \varphi) - b(s'(t), \varphi) &= \langle l(t), \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \Phi, \\
\mu(s''(t), g) + \eta(s(t), g) + b(g, \psi'(t)) &= \langle \lambda(t), g \rangle \quad \forall g \in S, \\
m(\psi'(0) - \psi_1, \varphi) = 0, \quad \mu(s'(0) - s_1, q) &= 0, \\
a(\psi(0) - \psi_0, \varphi) = 0, \quad \eta(s(0) - s_0, q) &= 0. \tag{11}
\end{aligned}$$

Проекційно-сіткова схема. В основу числової процедури розв'язування варіаційної задачі (11) покладено проекційно-сіткову схему, перший крок якої передбачає напівдискретизацію Гальоркіна за просторовими змінними з використанням апроксимацій методу скінченних елементів [1, 11]. Для дискретизації варіаційної задачі в часі вживають однокрокову реку-

рентну схему [3], в якій застосовується квадратична апроксимація розв'язку на кожному кроці інтегрування і яка дає можливість інтегрувати зі змінним у часі кроком. З використанням матричних позначень отримаємо таке алгебричне подання проекційно-сіткової схеми:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \mathbf{M}_F + \frac{1}{2} \Delta t^2 \beta \mathbf{A}_F & -\frac{1}{2} \Delta t \mathbf{B} \\ \frac{1}{2} \Delta t \mathbf{B}^T & \mathbf{M}_S + \frac{1}{2} \Delta t^2 \beta \mathbf{A}_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi^{j+1/2} \\ G^{j+1/2} \end{bmatrix} = \\
& = -\frac{1}{2} \Delta t \begin{bmatrix} \mathbf{A}_F & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi^j \\ S^j \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \Delta t \begin{bmatrix} L_j \\ \Lambda_j \end{bmatrix} + \\
& + \begin{bmatrix} \mathbf{M}_F + \frac{1}{2} \Delta t^2 (\beta - \theta) \mathbf{A}_F & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_S + \frac{1}{2} \Delta t^2 (\beta - \theta) \mathbf{A}_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi^j \\ G^j \end{bmatrix}, \\
& \begin{bmatrix} \Psi^{j+1} \\ S^{j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi^j \\ S^j \end{bmatrix} + \Delta t \begin{bmatrix} \Phi^{j+1/2} \\ G^{j+1/2} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \Phi^{j+1} \\ G^{j+1} \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} \Phi^{j+1/2} \\ G^{j+1/2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Phi^j \\ G^j \end{bmatrix}, \\
& j = 0, 1, \dots, N_T. \tag{12}
\end{aligned}$$

Зауважимо, що матриці \mathbf{M}_F , \mathbf{A}_F , \mathbf{M}_S , \mathbf{A}_S додатно визначені [2, 3]. Внаслідок цього перше з рівнянь рекурентної схеми (12) має єдиний розв'язок $(\Phi^{j+1/2}, G^{j+1/2})$, що дає можливість з двох наступних рівнянь обчислити пару векторів (Φ^{j+1}, G^{j+1}) , необхідну до подальшого кроку інтегрування. Отже, за рекурентною схемою (12) можемо знаходити (Φ^{j+1}, G^{j+1}) , $j = 0, 1, \dots$, послідовно розв'язуючи системи лінійних алгебричних рівнянь з додатно визначеною матрицею.

Рекурентна схема (12) дозволяє точно задовольнити початкові умови варіаційної задачі, а належний вибір її параметрів Δt , β , θ – забезпечити стійкість і точність обчислень [3].

Числовий приклад. Розглянемо циліндричну оболонку висоти L і радіуса R , нижній край якої жорстко закріпленій у масивній плиті, а верхній край є вільним. Припустимо, що оболонка повністю заповнена рідиною. Проаналізуємо її напружено-деформований стан під дією нормального гідростатичного тиску [8], який змінюється за висотою оболонки згідно з законом

$$q = \rho_0(L - z),$$

де ρ_0 – густина рідини. Подібні задачі виникають під час зберігання рідини в циліндричних резервуарах.

Для цієї задачі з рівнянь руху (1), відкидаючи інерційні члени, отримуємо рівняння рівноваги циліндричної оболонки:

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2 u}{dz^2} + \nu \frac{dw}{dz} = 0, \\
& B \left(\nu \frac{du}{dz} + \frac{w}{R^2} \right) - B_C \left(\gamma + \frac{d^2 w}{dz^2} \right) = q, \\
& D \frac{d^2 \gamma}{dz^2} - B_C \left(\gamma + \frac{dw}{dz} \right) = 0. \tag{13}
\end{aligned}$$

Після інтегрування першого з рівнянь (13) одержимо

$$\frac{du}{dz} + \nu \frac{w}{R} = \text{const.} \tag{14}$$

Порівнюючи (14) з виразом для поздовжнього зусилля, маємо

$$N_1 = \text{const.} \tag{15}$$

Диференціюючи друге рівняння, знаходимо значення $\frac{d^2\gamma}{dz^2}$, після підстановки якого в третє з рівнянь (13) отримуємо вираз для кута повороту нормалі:

$$\gamma = -(1 - 2\varepsilon g^2) \frac{dw}{dz} - \varepsilon \frac{d^3w}{dz^3} - \frac{\varepsilon^2}{D} \frac{dq}{dz}. \quad (16)$$

З урахуванням (16) з другого рівняння (13) знаходимо рівняння для визначення прогину оболонки:

$$\frac{d^4w}{dz^4} - 2g^2 \frac{d^2w}{dz^2} + \lambda^4 w = \frac{1}{D} \left(q - \varepsilon \frac{d^2q}{dz^2} \right) - \nu \frac{1}{R}. \quad (17)$$

Аналітичному розв'язку [8] для цієї задачі надамо вигляду

$$w = \frac{\rho R^2}{Eh} \left\{ L - z - e^{-sz} \left(\cos rz + \left(\frac{s}{r} - \frac{1}{Lr} \right) \sin rz \right) \right\}, \quad (18)$$

де використано такі позначення:

$$s = \sqrt{\frac{g^2 + \lambda^2}{2}}, \quad r = \sqrt{\frac{-g^2 + \lambda^2}{2}}, \quad \lambda^2 = \sqrt{\frac{12(1 - \nu^2)}{R^2 h^2}}, \quad g^2 = \frac{1 + \nu}{k' R^2}, \quad \varepsilon = \frac{D}{B_C}.$$

Розрахунки виконано для ізотропної алюмінієвої оболонки з такими параметрами: $L = 4$ м, $R = 2$ м, $h = 0.12$ м, $E = 7 \cdot 10^{10}$ Па, $\rho = 2.7 \cdot 10^3$ кг/м³, $\nu = 0.3$, $k' = 5/6$. При цьому використовували квадратичні апроксимації на кожному скінченному елементі рівномірної сітки.

Результати обчислень прогинів на основі аналітичного (за формулою 18) і числового (за схемою (12)) розв'язків на послідовно згущуваних сітках, $N = 5, 10, 20$, для різних значень z , $z \in [0, 4.0]$, наведено у табл. 1, де також подано значення відносних похибок, які обчислювали за формулою

$$\delta [\%] = \left(1 - \frac{\tilde{w}}{w} \right) \cdot 100 [\%]$$

(тут w та \tilde{w} – аналітичний і числовий розв'язки відповідно).

Таблиця 1. Поточкова збіжність числового розв'язку до аналітичного.

z	За формулою (18)	Числовий розв'язок за схемою (12)					
		N = 5		N = 10		N = 20	
	$w \cdot 10^7$	$w \cdot 10^7$	$\delta [\%]$	$w \cdot 10^7$	$\delta [\%]$	$w \cdot 10^7$	$\delta [\%]$
0.0	0.0	0.0	–	0.0	–	0.0	–
0.4	8.5208	8.2405	3.29	9.1843	–7.79	9.1186	–7.02
0.8	14.466	15.665	–8.29	14.717	–1.74	14.677	–1.46
1.2	14.087	14.305	–1.55	14.090	–2.04e–2	14.090	–2.13e–2
1.6	11.786	11.594	1.63	11.753	0.282	11.762	0.207
2.0	9.5602	9.4856	0.78	9.5474	0.134	9.5512	9.41e–2
2.4	7.5893	7.5892	9.46e–4	7.5890	3.78e–3	7.5890	3.35e–3
2.8	5.6995	5.7084	–0.156	5.7011	–2.78e–2	5.7005	–1.72e–2
3.2	3.8078	3.8121	–0.112	3.8085	–1.65e–2	3.8082	–9.83e–3
3.6	1.9059	1.9061	–8.37e–3	1.9060	–5.53e–3	1.9060	–5.61e–3
4.0	6.13e–4	–7.76e–4	2.27e+2	7.91e–4	–2.92e+1	9.05e–4	–4.78e+1

Отже, задовільний розв'язок задачі для циліндричної оболонки під дією гідростатичного навантаження отримуємо вже на сітці з п'яти скінченних елементів. За її згущення за просторовою змінною відносні похибки зменшуються. Найбільші похибки при визначенні прогинів спостерігаються біля закріпленого краю.

Висновки. Запропонована методика розв'язування задач акустичної взаємодії оболонки обертання з рідиною дає можливість отримати достовірні результати. У майбутньому доцільно виконати розрахунки для оболонок, заповнених рідиною, складнішої геометрії.

1. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. – Москва: Стройиздат, 1982. – 448 с.
2. Бернакевич І. Є., Вагін П. П., Шинкаренко Г. А. Математична модель акустичної взаємодії оболонки з рідиною. I. Формулювання і розв'язуваність варіаційних задач // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – **45**, № 2. – С. 75–80.
3. Бернакевич І. Є., Вагін П. П., Шинкаренко Г. А. Математична модель акустичної взаємодії оболонки з рідиною. II. Проекційно-сіткові апроксимації та їх збіжність // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – **47**, № 3. – С. 37–44.
4. Бурак Я. Й., Рудавський Ю. К., Сухорольський М. А. Аналітична механіка локально навантажених оболонок. – Львів: Інтеллект-Захід, 2007. – 240 с.
5. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. – Москва: Мир, 1987. – 542 с.
6. Григоренко Я. М., Влайков Г. Г., Григоренко А. Я. Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей. – Киев: Академ-периодика, 2006. – 472 с.
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. – Т. 6. Гидродинамика. – Москва: Наука, 1986. – 736 с.
8. Пелех Б. Л. Обобщенная теория оболочек. – Львов: Виц. шк., 1978. – 160 с.
9. Рикардс Р. Б. Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин. – Рига: Зинатне, 1988. – 284 с.
10. Скучик Е. Основы акустики: В 2 т. – Т. 1. – Москва: Мир, 1976. – 520 с.
11. Babuška I., Whiteman J. R., Strouboulis T. Finite elements: an introduction to the method and error estimation. – Oxford: Oxford Univ. Press, 2011. – xii + 323 p.
12. Iakovlev S. Submerged fluid-filled cylindrical shell subjected to a shock wave: Fluid-structure interaction effects // J. Fluid. Struct. – 2007. – **23**, No. 1. – P. 117–142.
13. Kwak M. K. Free vibration analysis of a finite circular cylindrical shell in contact with unbounded external fluid // J. Fluid. Struct. – 2010. – **26**, No. 3. – P. 377–392.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ АКУСТИЧЕСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ОБОЛОЧЕК С ЖИДКОСТЬЮ

Построена математическая модель акустического взаимодействия оболочки вращения с жидкостью для случая осесимметричной нагрузки. В основу модели положены линейные соотношения оболочек Тимошенко – Миндлина и акустическое приближение жидкости. Сформулированы начально-краевая и соответствующая ей вариационная задачи взаимодействия двух сред. Для решения вариационной задачи акустического взаимодействия оболочки вращения с жидкостью построена проекционно-сеточная схема, в которой использована полудискретизация Галеркина с привлечением аппроксимаций метода конечных элементов по пространственным переменным и одношаговая рекуррентная схема интегрирования по времени. Проанализировано напряженно-деформированное состояние оболочки под действием нормального гидростатического давления. Приведено сравнение результатов вычислений прогибов, полученных по предложенной методике и по известному аналитическому решению.

STUDY OF THE ACOUSTICS FLUID-SHELLS INTERACTION

The mathematical model of the acoustic interaction of a fluid-filled shell of revolution in the case of axisymmetric loading is constructed. The model is based on the linear relations of Timoshenko – Mindlin shells and acoustic approximation of fluid. The initial boundary value problem and the corresponding variational problem of interaction between the two media are formulated. For solution of the variational problem of the acoustic interaction between the shell of revolution and fluid the projection-mesh scheme is constructed. In this scheme Galerkin semidiscretization is used jointly with finite element method approximations by spatial variables and one-step recurrent scheme of integration by time. The stress-strain state of the shell under normal hydrostatic pressure is analyzed. The obtained numerical results are compared with the known analytical solution.

Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів

Одержано
09.08.15