УДК 517.524

Т. М. Антонова[1], О. М. Сусь[2]

ДОСТАТНІ УМОВИ ЕКВІВАЛЕНТНОЇ ЗБІЖНОСТІ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ РІЗНИХ НАБЛИЖЕНЬ ДВОВИМІРНИХ НЕПЕРЕРВНИХ ДРОБІВ

За допомогою методу фундаментальних нерівностей досліджується еквівалентна збіжність двох фігурних наближень двовимірних неперервних дробів – наближень, які одержано із задачі відповідності двовимірних неперервних дробів деякому формальному подвійному степеневому ряду та задачі еквівалентності двох двовимірних неперервних дробів. Встановлено деякі достатні умови, за яких ці два наближення двовимірних неперервних дробів будуть збігатися до однієї границі.

Неперервні дроби та їх двовимірні узагальнення – двовимірні неперервні дроби (ДНД), є одним із методів наближення функцій від одної і двох змінних відповідно. Хоча наближення неперервних дробів будуються однозначно, проте для розв'язування різних задач аналізу розглядають неперервні дроби різної структури. Зокрема, огляд різних неперервних дробів для одного і того ж відношення гіпергеометричних функцій Ґаусса та дослідження властивостей послідовностей їх наближень наведено у [10]. Послідовності певним чином побудованих наближень неперервного дробу виникають при дослідженні проблеми прискорення збіжності неперервного дробу [8, 9].

У роботі [3] описано наближення, які найчастіше зустрічаються у задачах з аналітичної теорії ДНД. У [4, 5] розглянуто питання еквівалентної збіжності звичайних і фігурних наближень для ДНД з додатними елементами. У роботах [1, 2] встановлено деякі достатні умови еквівалентної збіжності звичайних наближень і фігурних наближень, які виникли із задачі відповідності для ДНД з дійсними елементами. Проблема збіжності фігурних наближень ДНД з комплексними елементами, розглянутих в роботі [3], потребує детального вивчення.

Відомо, що основними методами дослідження збіжності багатовимірних узагальнень неперервних дробів і, зокрема, ДНД є метод мажорант, різні аналоги методу фундаментальних нерівностей, а також метод, який базується на використанні багатовимірного аналогу теореми Монтеля [4, 5].

Метод фундаментальних нерівностей для дослідження збіжності послідовностей різних наближень ДНД, зокрема звичайних і тих фігурних наближень, які одержано із задачі відповідності, розглядались у роботах [6, 7]. У цій роботі за допомогою методу фундаментальних нерівностей і методики, розглянутої в роботах [1, 2], яка дозволяє довести еквівалентність збіжності різних наближень, встановлено достатні умови, за яких два фігурні наближення, що виникають із задачі відповідності [5] та із задачі еквівалентності [3], є збіжними до однієї і тієї ж самої границі.

Розглянемо ДНД вигляду

$$\mathop{D}_{j=1}^{\infty}\frac{a_{j,0}}{b_{j,0}}+\mathop{D}_{j=1}^{\infty}\frac{a_{0,j}}{b_{0,j}}+\mathop{D}_{k=1}^{\infty}\frac{a_{k,k}}{b_{k,k}+\mathop{D}\limits_{j=1}^{\infty}\frac{a_{k+j,k}}{b_{k+j,k}}+\mathop{D}\limits_{j=1}^{\infty}\frac{a_{k,k+j}}{b_{k,k+j}}}, \tag{1}$$

де $a_{j,k}$, $b_{j,k}$, $j,k=0,1,\ldots$, $j+k\ge 1$, – комплексні числа, $b_{j,k}\neq 0$ і його фігурні наближення:

– наближення, одержане із задачі відповідності:

$$f_n=\mathop{D}_{j=1}^{n}\frac{a_{j,0}}{b_{j,0}}+\mathop{D}_{j=1}^{n}\frac{a_{0,j}}{b_{0,j}}+\mathop{D}_{k=1}^{[n/2]}\frac{a_{k,k}}{b_{k,k}+\mathop{D}\limits_{j=1}^{n-2k}\frac{a_{k+j,k}}{b_{k+j,k}}+\mathop{D}\limits_{j=1}^{n-2k}\frac{a_{k,k+j}}{b_{k,k+j}}},\quad n=1,2,\ldots; \tag{2}$$

– наближення, яке виникає із задачі еквівалентності:

$$\hat{f}_n = \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{[\sqrt{n}]} \frac{a_{j,0}}{b_{j,0}} + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{[\sqrt{n-1}]} \frac{a_{0,j}}{b_{0,j}} +$$

$$+ \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{[\sqrt{n+1}]-1} \frac{a_{k,k}}{b_{k,k} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{[\sqrt{n-2k}]-k} \dfrac{a_{k+j,k}}{b_{k+j,k}} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{[\sqrt{n-2k-1}]-k} \dfrac{a_{k,k+j}}{b_{k,k+j}}},$$

$$n = 1, 2, \ldots . \tag{3}$$

Нагадаємо деякі позначення. Вирази

$$Q_{k+j,k}^{(p+1)} = b_{k+j,k} + \frac{a_{k+j+1,k}}{Q_{k+j+1,k}^{(p)}}, \qquad Q_{k,k+j}^{(p+1)} = b_{k,k+j} + \frac{a_{k,k+j+1}}{Q_{k,k+j+1}^{(p)}}, \tag{4}$$

де

$$Q_{k+j,k}^{(0)} = b_{k+j,k}, \quad Q_{k,k+j}^{(0)} = b_{k,k+j}, \quad k, p = 0, 1, \ldots, \quad j = 1, 2, \ldots,$$

називають *одновимірними* залишками ДНД (1), а вирази

$$Q_j^{(p+2)} = b_{j,j} + \frac{a_{j+1,j}}{Q_{j+1,j}^{(p+1)}} + \frac{a_{j,j+1}}{Q_{j,j+1}^{(p+1)}} + \frac{a_{j+1,j+1}}{Q_{j+1}^{(p)}}, \quad j = 1, 2, \ldots, \quad p = 0, 1 \ldots, \tag{5}$$

де

$$Q_j^{(0)} = b_{j,j}, \qquad Q_j^{(1)} = b_{j,j} + \frac{a_{j+1,j}}{Q_{j+1,j}^{(0)}} + \frac{a_{j,j+1}}{Q_{j,j+1}^{(0)}}, \qquad j = 1, 2, \ldots,$$

а також вирази

$$\hat{Q}_j^{(p)} = b_{j,j} + \frac{a_{j+1,j}}{Q_{j+1,j}^{([\sqrt{p}]-1)}} + \frac{a_{j,j+1}}{Q_{j,j+1}^{([\sqrt{p-1}]-1)}} + \frac{a_{j+1,j+1}}{\hat{Q}_{j+1}^{(\alpha(p))}}, \quad j = 1, 2, \ldots, \quad p = 3, 4 \ldots,$$

$$\hat{Q}_j^{(0)} = b_{j,j}, \quad \hat{Q}_j^{(1)} = b_{j,j} + \frac{a_{j+1,j}}{b_{j+1,j}}, \quad \hat{Q}_j^{(2)} = b_{j,j} + \frac{a_{j+1,j}}{b_{j+1,j}} + \frac{a_{j,j+1}}{b_{j,j+1}}, \quad j = 1, 2, \ldots, \tag{6}$$

де

$$\alpha(p) = \begin{cases} \ell^2 - 1, & \ell^2 + 2\ell \le p \le \ell^2 + 2\ell + 2, \\ p - 3 - 2\ell, & \ell^2 + 2\ell + 3 \le p \le \ell^2 + 4\ell + 2, \end{cases} \qquad \ell \in \mathbb{Z}_+, \tag{7}$$

називають *двовимірними залишками* фігурних наближень (2), (3) відповідно. Побудову двовимірних залишків (6) для фігурних наближень (3) ДНД (1) розглянуто у роботі [3].

Теорема 1. *Нехай елементи ДНД* (1) *є такими, що*

$$Q_{i+k,i}^{(p)} \ne 0, \quad Q_{i,i+k}^{(p)} \ne 0, \quad Q_k^{(p)} \ne 0, \quad \hat{Q}_k^{(p)} \ne 0,$$

$$i = 0, 1, \ldots, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad p = 0, 1, \ldots, \tag{8}$$

та існують додатні сталі h', h'', h, H, H', H'', ρ_j', ρ_j'', ρ_j, $j = 1, 2, \ldots,$ *такі, що справджуються нерівності*

$$\left|Q_{1,0}^{(p)}\right| \ge h', \quad \left|Q_{0,1}^{(p)}\right| \ge h'', \quad \left|Q_1^{(p)}\right| \ge h, \quad \left|\hat{Q}_1^{(p)}\right| \ge h, \quad p = 0, 1, \ldots, \tag{9}$$

$$\frac{\left|a_{k+j+1,k}\right|}{\left|Q_{k+j,k}^{(m+1)} Q_{k+j+1,k}^{(m)}\right|} \le \rho_{j+1}' \le 1,$$

$$\frac{|a_{k,k+j+1}|}{\left|Q_{k,k+j}^{(m+1)}Q_{k,k+j+1}^{(m)}\right|} \le \rho''_{j+1} \le 1\,,$$

$$j = 1,2,\ldots, \quad k = 0,1,\ldots, \quad m = 0,1,\ldots, \tag{10}$$

$$\frac{|a_{j+1,j+1}|}{\left|Q_j^{(p+2)}\right|\left|Q_{j+1}^{(p)}\right|} \le \rho_{j+1}, \quad j = 1,2,\ldots, \quad p = 0,1,\ldots, \tag{11'}$$

$$\frac{|a_{j+1,j+1}|}{\left|\hat{Q}_j^{(\alpha_j(r))}\right|\left|\hat{Q}_{j+1}^{(\alpha_{j+1}(r))}\right|} \le \rho_{j+1}, \quad j = 1,2,\ldots, \quad r = 3,4,\ldots, \tag{11''}$$

де $\alpha_j(r)$ *визначаються за такими рекурентними формулами* [3]:

$$\alpha_0(r) = r, \quad \alpha_j(r) = \alpha(\alpha_{j-1}(r)), \quad j = 1,2,\ldots, \quad r = 3,4,\ldots, \tag{11'''}$$

$$\frac{|a_{k+1,k}|}{\left|Q_{k+1,k}^{(n-1)}Q_k^{(n)}\right|} \le H', \quad \frac{|a_{k+1,k}|}{\left|Q_{k+1,k}^{([\sqrt{(\alpha_k(n)}]-1)}\hat{Q}_k^{(\alpha_k(n))}\right|} \le H', \quad k = 1,2,\ldots, \tag{12'}$$

$$\frac{|a_{k,k+1}|}{\left|Q_{k,k+1}^{(n-1)}Q_k^{(n)}\right|} \le H'', \quad \frac{|a_{k,k+1}|}{\left|Q_{k,k+1}^{([\sqrt{(\alpha_k(n)-1}]-1)}\hat{Q}_k^{(\alpha_k(n))}\right|} \le H'', \quad k = 1,2,\ldots. \tag{12''}$$

Тоді, якщо виконуються умови

$$\lim_{p\to\infty} p\prod_{j=1}^{p}\rho'_{j+1} = 0, \quad \lim_{p\to\infty} p\prod_{j=1}^{p}\rho''_{j+1} = 0, \quad \lim_{p\to\infty} p\prod_{j=1}^{p}\rho_{j+1} = 0\,, \tag{13}$$

то послідовності $\{f_n\}$, $\{\hat{f}_n\}$ *збігаються, причому*

$$|f_n - f_{4r}| \le \frac{|a_{1,0}|}{h'}\prod_{j=2}^{4r+1}\rho'_j + \frac{|a_{0,1}|}{h''}\prod_{j=2}^{4r+1}\rho''_j + \frac{|a_{1,1}|}{h}\prod_{j=2}^{2r+1}\rho_j +$$

$$+ r\frac{|a_{1,1}|}{h}\left(H'\prod_{j=2}^{2r+1}\rho'_j + H''\prod_{j=2}^{2r+1}\rho''_j + (H'+H'')\prod_{j=2}^{r+1}\rho_j\right),$$

$$r = 1,2,\ldots, \quad n \ge 4r+1\,, \tag{14}$$

і

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty}\hat{f}_n = f\,.$$

Д о в е д е н н я. Щоб довести збіжність $\{f_n\}$, $n = 1,2,\ldots$, і виконання нерівності (14), використаємо формулу різниці між фігурними підхідними дробами ДНД (1):

$$f_n - f_{2m} = \varphi_{0,1}^{(n)} - \varphi_{0,1}^{(2m)} + \varphi_{0,2}^{(n)} - \varphi_{0,2}^{(2m)} + \sum_{k=1}^{m}\Big(\big(\varphi_{k,1}^{(n-2k)} - \varphi_{k,1}^{(2m-2k)}\big) +$$

$$+ \big(\varphi_{k,2}^{(n-2k)} - \varphi_{k,2}^{(2m-2k)}\big)\Big)\prod_{j=1}^{k}\frac{a_{j,j}}{Q_j^{(2m-2j)}Q_j^{(n-2j)}} +$$

$$+ \frac{\prod_{j=1}^{m+1} a_{j,j}}{\prod_{j=1}^{m} Q_j^{(2m-2j)}\prod_{j=1}^{m+1} Q_j^{(2n-2j)}}, \qquad n > 2m+1\,, \tag{15}$$

де

$$\varphi_{k,1}^{(p)} = \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{p} \frac{a_{k+j,k}}{b_{k+j,k}}, \qquad \varphi_{k,2}^{(p)} = \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{p} \frac{a_{k,k+j}}{b_{k,k+j}},$$

$$\varphi_{k,1}^{(0)} = \varphi_{k,2}^{(0)} = 0, \quad k = 0,1,\dots, \quad p = 1,2,\dots, \tag{16}$$

а величини $Q_j^{(p)}$, $j = 1,2,\dots$, $p = 0,1,\dots$, визначаються за формулами (5).

Використовуючи формулу різниці для звичайних неперервних дробів та умови (10) теореми, одержимо

$$\left|\varphi_{k,1}^{(n)} - \varphi_{k,1}^{(2m)}\right| \le \frac{\prod\limits_{j=1}^{2m+1} \left|a_{k+j,k}\right|}{\prod\limits_{j=1}^{2m+1} \left|Q_{k+j,k}^{(n-j)}\right| \prod\limits_{j=1}^{2m} \left|Q_{k+j,k}^{(2m-j)}\right|} =$$

$$= \frac{\left|a_{k+1,k}\right|}{\left|Q_{k+1,k}^{(n-1)}\right|} \prod_{j=1}^{2m} \frac{\left|a_{k+j+1,k}\right|}{\left|Q_{k+j+1,k}^{(n-j-1)} Q_{k+j,k}^{(2m-j)}\right|} = \frac{\left|a_{k+1,k}\right|}{\left|Q_{k+1,k}^{(n-1)}\right|},$$

$$\prod_{j=1}^{m} \frac{\left|a_{k+2j,k}\right|}{\left|Q_{k+2j-1,k}^{(2m-2j+1)} Q_{k+2j,k}^{(2m-2j)}\right|} \prod_{j=1}^{m} \frac{\left|a_{k+2j+1,k}\right|}{\left|Q_{k+2j,k}^{(n-2j)} Q_{k+2j+1,k}^{(n-2j-1)}\right|} \le$$

$$\le \frac{\left|a_{k+1,k}\right|}{\left|Q_{k+1,k}^{(n-1)}\right|} \prod_{j=1}^{2m} \rho'_{j+1}, \quad n > 2m,\ m = 1,2,\dots,\ k = 0,1,\dots. \tag{17}$$

Аналогічно отримуємо

$$\left|\varphi_{k,2}^{(n)} - \varphi_{k,2}^{(2m)}\right| \le \frac{\left|a_{k,k+1}\right|}{\left|Q_{k,k+1}^{(n-1)}\right|} \prod_{j=1}^{2m} \rho''_{j+1}, \quad n > 2m, \quad m = 1,2,\dots, \quad k = 0,1,\dots. \tag{18}$$

Аналізуючи вираз

$$\prod_{j=1}^{k} \frac{\left|a_{j,j}\right|}{\left|Q_j^{(2m-2j)} Q_j^{(n-2j)}\right|},$$

зауважимо, що при виконанні умов (9), (11′) теореми одержимо

а) якщо $k = 2p$, то

$$\prod_{j=1}^{2p} \frac{\left|a_{j,j}\right|}{\left|Q_j^{(2m-2j)} Q_j^{(n-2j)}\right|} = \frac{\left|a_{1,1}\right|}{\left|Q_1^{(n-2)} Q_{2p}^{(n-4p)}\right|} \times$$

$$\times \prod_{j=1}^{p} \frac{\left|a_{2j,2j}\right|}{\left|Q_{2j-1}^{(2m-4j+2)} Q_{2j}^{(2m-4j)}\right|} \prod_{j=1}^{p-1} \frac{\left|a_{2j+1,2j+1}\right|}{\left|Q_{2j}^{(n-4j)} Q_{2j+1}^{(n-4j-2)}\right|} \le$$

$$\le \frac{\left|a_{1,1}\right|}{\left|Q_1^{(n-2)} Q_{2p}^{(n-4p)}\right|} \prod_{j=1}^{2p-1} \rho_{j+1} \le \frac{\left|a_{1,1}\right|}{h\left|Q_k^{(n-2k)}\right|} \prod_{j=1}^{k-1} \rho_{j+1}; \tag{19}$$

б) якщо $k = 2p-1$, то

$$\prod_{j=1}^{2p-1} \frac{\left|a_{j,j}\right|}{\left|Q_j^{(2m-2j)} Q_j^{(n-2j)}\right|} = \frac{\left|a_{1,1}\right|}{\left|Q_1^{(2m-2)} Q_{2p-1}^{(n-4p+2)}\right|} \times$$

$$\times \prod_{j=1}^{p-1} \frac{\left|a_{2j,2j}\right|}{\left|Q_{2j-1}^{(n-4j+2)} Q_{2j}^{(n-4j)}\right|} \prod_{j=1}^{p-1} \frac{\left|a_{2j+1,2j+1}\right|}{\left|Q_{2j}^{(2m-4j)} Q_{2j+1}^{(2m-4j-2)}\right|} \le$$

$$\le \frac{|a_{1,1}|}{\left|Q_1^{(2m-2)}Q_{2p-1}^{(n-4p+2)}\right|}\prod_{j=1}^{2p-2}\rho_{j+1} \le \frac{|a_{1,1}|}{h\left|Q_k^{(n-2k)}\right|}\prod_{j=1}^{k-1}\rho_{j+1}\,. \qquad (20)$$

Крім того, маємо

а) якщо $k = 2p$, то

$$\prod_{j=1}^{k+1}\frac{|a_{j,j}|}{\left|Q_j^{(2m-2j)}Q_j^{(n-2j)}\right|} = \frac{|a_{1,1}|}{\left|Q_1^{(n-2)}\right|}\prod_{j=1}^{p}\frac{|a_{2j,2j}|}{\left|Q_{2j-1}^{(2m-4j+2)}Q_{2j}^{(2m-4j)}\right|}\times$$

$$\times\prod_{j=1}^{p}\frac{|a_{2j+1,2j+1}|}{\left|Q_{2j}^{(n-4j)}Q_{2j+1}^{(n-4j-2)}\right|} \le \frac{|a_{1,1}|}{h}\prod_{j=1}^{k}\rho_{j+1}\,; \qquad (21)$$

б) якщо $k = 2p-1$, то

$$\prod_{j=1}^{k+1}\frac{|a_{j,j}|}{\left|Q_j^{(2m-2j)}Q_j^{(n-2j)}\right|} = \frac{|a_{1,1}|}{\left|Q_1^{(2m-2)}\right|}\prod_{j=1}^{p}\frac{|a_{2j,2j}|}{\left|Q_{2j-1}^{(n-4j+2)}Q_{2j}^{(n-4j)}\right|}\times$$

$$\times\prod_{j=1}^{p-1}\frac{|a_{2j+1,2j+1}|}{\left|Q_{2j}^{(2m-4j)}Q_{2j+1}^{(2m-4j-2)}\right|} \le \frac{|a_{1,1}|}{h}\prod_{j=1}^{k}\rho_{j+1}\,. \qquad (22)$$

Підставляючи оцінки (17)–(22) у формулу (15) і враховуючи умови (9)–(11′), при $n > 2m+1$ одержимо

$$|f_n - f_{2m}| \le \sum_{k=0}^{m}\left(\left|\varphi_{k,1}^{(n-2k)} - \varphi_{k,1}^{(2m-2k)}\right| + \left|\varphi_{k,2}^{(n-2k)} - \varphi_{k,2}^{(2m-2k)}\right|\right)\times$$

$$\times\prod_{j=1}^{k}\frac{|a_{j,j}|}{\left|Q_j^{(2m-2j)}Q_j^{(n-2j)}\right|} + \frac{\prod_{j=1}^{m+1}|a_{j,j}|}{\prod_{j=1}^{m}\left|Q_j^{(2m-2j)}\right|\prod_{j=1}^{m+1}\left|Q_j^{(2n-2j)}\right|} \le$$

$$\le \frac{|a_{1,0}|}{h'}\prod_{j=1}^{2m}\rho'_{j+1} + \frac{|a_{0,1}|}{h''}\prod_{j=1}^{2m}\rho''_{j+1} + \frac{|a_{1,1}|}{h}\prod_{j=1}^{m}\rho_{j+1} +$$

$$+\frac{|a_{1,1}|}{h}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{|a_{k+1,k}|}{\left|Q_{k+1,k}^{(n-2k-1)}\right|\left|Q_k^{(n-2k)}\right|}\prod_{j=1}^{2m-2k}\rho'_{j+1} +\right.$$

$$\left.+\frac{|a_{k,k+1}|}{\left|Q_{k,k+1}^{(n-2k-1)}\right|\left|Q_k^{(n-2k)}\right|}\prod_{j=1}^{2m-2k}\rho''_{j+1}\right)\prod_{j=1}^{k-1}\rho_{j+1} \le$$

$$\le \frac{|a_{1,0}|}{h'}\prod_{j=1}^{2m}\rho'_{j+1} + \frac{|a_{0,1}|}{h''}\prod_{j=1}^{2m}\rho''_{j+1} + \frac{|a_{1,1}|}{h}\prod_{j=1}^{m}\rho_{j+1} +$$

$$+\frac{|a_{1,1}|}{h}\sum_{k=1}^{m}\left(H_1\prod_{j=1}^{2m-2k}\rho'_{j+1} + H_2\prod_{j=1}^{2m-2k}\rho''_{j+1}\right)\prod_{j=1}^{k-1}\rho_{j+1}\,.$$

Звідси

$$|f_n - f_{4r}| \le \frac{|a_{1,0}|}{h'}\prod_{j=2}^{4r+1}\rho'_j + \frac{|a_{0,1}|}{h''}\prod_{j=2}^{4r+1}\rho''_j + \frac{|a_{1,1}|}{h}\prod_{j=2}^{2r+1}\rho_j +$$

$$+\frac{|a_{1,1}|}{h}\sum_{k=1}^{2r}\left(H'\prod_{j=2}^{4r-2k+1}\rho_j'+H''\prod_{j=2}^{4r-2k+1}\rho_j''\right)\prod_{j=2}^{k}\rho_j\,,$$

$$r=1,2,\ldots,\qquad n>4r+1\,.$$

Оцінимо

$$\sum_{k=1}^{2r}\prod_{j=2}^{k}\rho_j\prod_{j=2}^{4r-2k+1}\rho_j'=\sum_{k=1}^{r}\prod_{j=2}^{k}\rho_j\prod_{j=2}^{4r-2k+1}\rho_j'+\sum_{k=r+1}^{2r}\prod_{j=2}^{k}\rho_j\prod_{j=2}^{4r-2k+1}\rho_j'\le$$

$$\le\sum_{k=1}^{r}\prod_{j=2}^{4r-2k+1}\rho_j'+\sum_{k=r+1}^{2r}\prod_{j=2}^{k}\rho_j\le\sum_{k=1}^{r}\prod_{j=2}^{2r+1}\rho_j'+\sum_{k=r+1}^{2r}\prod_{j=2}^{r+1}\rho_j=$$

$$=r\left(\prod_{j=2}^{2r+1}\rho_j'+\prod_{j=2}^{r+1}\rho_j\right).$$

Аналогічно отримуємо

$$\sum_{k=1}^{2r}\prod_{j=2}^{k}\rho_j\prod_{j=2}^{4r-2k+1}\rho_j''\le r\left(\prod_{j=2}^{2r+1}\rho_j''+\prod_{j=2}^{r+1}\rho_j\right).$$

Тому остаточно маємо

$$|f_n-f_{4r}|\le\frac{|a_{1,0}|}{h'}\prod_{j=2}^{4r+1}\rho_j'+\frac{|a_{0,1}|}{h''}\prod_{j=2}^{4r+1}\rho_j''+\frac{|a_{1,1}|}{h}\prod_{j=2}^{2r+1}\rho_j+r\frac{|a_{1,1}|}{h}\times$$

$$\times\left(H'\prod_{j=2}^{2r+1}\rho_j'+H''\prod_{j=2}^{2r+1}\rho_j''+(H'+H'')\prod_{j=2}^{r+1}\rho_j\right),$$

$$r=1,2,\ldots,\qquad n\ge 4r+1\,.$$

Спрямовуючи $r\to\infty$ і враховуючи умови (13) теореми, доходимо до висновку про фігурну збіжність ДНД (1).

Покажемо, що послідовність фігурних підхідних дробів $\{\hat{f}_n\}$ вигляду (3) за умов теореми є збіжною. Для цього встановимо формулу різниці $\hat{f}_n-f_{4r}$:

$$\hat{f}_n-f_{4r}=\sum_{k=0}^{2r}(-1)^k\left(\left(\varphi_{k,1}^{([\sqrt{\alpha_k(n)}])}-\varphi_{k,1}^{(4r-2k)}\right)+\left(\varphi_{k,2}^{([\sqrt{\alpha_k(n)-1}])}-\varphi_{k,2}^{(4r-2k)}\right)\right)\times$$

$$\times\prod_{j=1}^{k}\frac{a_{j,j}}{Q_j^{(4r-2j)}\hat{Q}_j^{(\alpha_j(n))}}+\frac{\prod\limits_{j=1}^{2r+1}a_{j,j}}{\prod\limits_{j=1}^{2r}Q_j^{(4r-2j)}\prod\limits_{j=1}^{2r+1}\hat{Q}_j^{(\alpha_j(n))}},$$

$$r=1,2,\ldots,\qquad n\ge 16r^2+8r+2\,, \tag{23}$$

де $\varphi_{k,1}^{(p)}$, $\varphi_{k,2}^{(p)}$, $k=0,1,\ldots$, $p=0,1,\ldots$, визначаються за формулами (16), $\alpha_j(n)$, $j=1,2,\ldots,2r+1$, обчислюються за рекурентними формулами (11‴) і оцінимо різницю $\hat{f}_n-f_{4r}$ за абсолютною величиною.

Використовуючи наведену вище методику доведення збіжності послідовності фігурних наближень $\{f_n\}$, $n=1,2,\ldots$, легко переконатись у правильності таких нерівностей:

$$\prod_{j=1}^{k} \frac{|a_{j,j}|}{\left|Q_j^{(4r-2j)} \hat{Q}_j^{(\alpha_j(n))}\right|} \le \frac{|a_{1,1}|}{\left|\hat{Q}_k^{(\alpha_k(n))}\right|} \prod_{j=1}^{k-1} \rho_{j+1} ,$$

$$\frac{\prod\limits_{j=1}^{k+1} |a_{j,j}|}{\prod\limits_{j=1}^{k} \left|Q_j^{(4r-2j)}\right| \prod\limits_{j=1}^{k+1} \left|\hat{Q}_j^{(\alpha_j(n))}\right|} \le \frac{|a_{1,1}|}{h} \prod_{j=1}^{k} \rho_{j+1} .$$

Підставляючи ці нерівності разом з оцінками (17), (18) у формулу (23) і враховуючи умови (11), (12) теореми, доходимо до висновку, що

$$\left|\hat{f}_n - f_{4r}\right| \le \frac{|a_{1,0}|}{h'} \prod_{j=2}^{4r+1} \rho'_j + \frac{|a_{0,1}|}{h''} \prod_{j=2}^{4r+1} \rho''_j + \frac{|a_{1,1}|}{h} \prod_{j=2}^{2r+1} \rho_j + r \frac{|a_{1,1}|}{h} \times$$

$$\times \left(H' \prod_{j=2}^{2r+1} \rho'_j + H'' \prod_{j=2}^{2r+1} \rho''_j + (H' + H'') \prod_{j=2}^{r+1} \rho_j \right),$$

при $r = 1, 2, \ldots$, $n \ge 16r^2 + 8r + 2$. Звідси з урахуванням умов (13) випливає збіжність послідовності $\{\hat{f}_n\}$, причому $\lim\limits_{n\to\infty} \hat{f}_n = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$.

Теорему доведено. ♦

Висновки. З використанням методики дослідження умов еквівалентності звичайної і фігурної збіжностей для двовимірних неперервних дробів з дійсними елементами, наведеної у роботах [1, 2], встановлено умови (фундаментальні нерівності), за яких збіжність фігурних наближень (2) і (3) є еквівалентною, тобто виконується рівність $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = \lim\limits_{n\to\infty} \hat{f}_n$, $n = 1, 2, \ldots$.

1. *Антонова Т. М., Сусь О. М.* Деякі достатні умови збіжності двовимірних неперервних дробів з дійсними елементами // Наук. вісн. Ужгород. нац. ун-ту. Сер. Математика і інформатика. – 2008. – Вип. 16. – С. 5–15.
2. *Антонова Т. М., Сусь О. М.* Достатні умови збіжності двовимірних неперервних дробів спеціального вигляду з дійсними елементами // Наук. вісн. Ужгород. нац. ун-ту. Сер. Математика і інформатика. – 2010. – Вип. 21. – С. 4–18.
3. *Антонова Т. М., Сусь О. М.* Формула різниці для одного з фігурних наближень двовимірних неперервних дробів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2012. – **55**, № 1. – С. 7–18.
   Те саме: *Antonova T. M., Sus' O. M.* A formula of difference for one of the figured approximants of two-dimensional continued fractions // J. Math. Sci. – 2013. – **190**, No. 5. – P. 631–645.
4. *Боднар Д. И.* Ветвящиеся цепные дроби. – Киев: Наук. думка, 1986. – 176 с.
5. *Кучмінська Х. Й.* Двовимірні неперервні дроби. – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2010. – 218 с.
6. *Кучмінська Х. Й., Сусь О. М., Возна С. М.* Апроксимативні властивості двовимірних неперервних дробів // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 1. – С. 30–44.
   Те саме: *Kuchmins'ka Kh. I., Sus' O. M., Vozna S. M.* Approximation properties of two-dimensional continued fractions // Ukr. Math. J. – 2003. – **55**, No. 1. – P. 36–54.
7. *Сусь О. М.* Про один з аналогів методу фундаментальних нерівностей для двовимірних неперервних дробів // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2007. – Вип. 5. – С. 71–76.
8. *Jacobsen L.* A method for convergence acceleration of continued fractions $K(a_n/1)$ // Lect. Notes Math. – Berlin: Springer-Verlag, 1982. – **932**. – P. 74–86. – Analytic theory of continued fractions: Proc. Seminar-Workshop (Eds: William B. Jones, W. J. Thron, Haakon Waadeland), Loen, Norway, 1981.
9. *Jacobsen L.* Convergence acceleration for continued fractions $K(a_n/1)$ // Trans. Amer. Math. Soc. – 1983. – **275**, No. 1. – P. 265–285.
10. *Lorentzen L., Waadeland H.* Continued fractions. – Vol. 1: Convergence Theory. – Amsterdam – Paris: Atlantis Press/Word Scientific, 2008. – 308 p.

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ЭКВИВАЛЕНТНОЙ СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ РАЗНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ДВУМЕРНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ДРОБЕЙ

С помощью метода фундаментальных неравенств исследуется эквивалентная сходимость двух фигурных приближений двумерных непрерывных дробей – приближений, полученных из задачи соответствия двумерных непрерывных дробей некоторому формальному двойному степенному ряду и задачи эквивалентности двух двумерных непрерывных дробей. Получены некоторые достаточные условия, при которых эти два приближения будут сходиться к одному пределу.

SUFFICIENT CONDITIONS FOR EQUIVALENT CONVERGENCE OF SEQUENCE OF DIFFERENT APPROXIMANTS FOR TWO-DIMENSIONAL CONTINUED FRACTIONS

Using the method of fundamental inequalities, equivalent convergence of two figured approximants for two-dimensional continued fractions is investigated, namely, approximants obtained from problem of correspondence for two-dimensional continued fractions to some double power series and from problem of equivalence for two two-dimensional continued fractions. Some sufficient conditions under which these two approximants will converge to same limit are obtained.

[1] Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів,
[2] Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано 12.06.14