УДК 539.3

Г. С. Кіт, Р. М. Андрійчук

ВПЛИВ СТАЦІОНАРНОГО ДЖЕРЕЛА ТЕПЛА НА НАПРУЖЕНИЙ СТАН ПІВПРОСТОРУ З ЖОРСТКО, ГЛАДКО АБО ГНУЧКО ЗАКРІПЛЕНОЮ МЕЖЕЮ

З використанням термопружного потенціалу переміщень і бігармонічної функції Лява визначено зумовлені стаціонарним джерелом тепла температуру, переміщення і напруження у півбезмежному тілі, межа якого жорстко, гладко або гнучко закріплена, за умов або нульової температури на ній, або теплоізоляції. Побудовано графіки залежностей осьових, радіальних, колових і дотичних напружень на межі тіла від віддалі джерела тепла до цієї межі.

У монографії [7] з використанням бігармонічної функції Лява побудовано функції Ґріна задач стаціонарної теплопровідності та термопружності для півбезмежного тіла, на вільній від навантаження межі якого задана нульова температура або теплоізоляція. Такі функції Ґріна використано у працях [2, 6] при розв'язуванні задач стаціонарної теплопровідності для кусково-однорідного простору та півпростору за тепловиділення у круговій області, а також при визначенні термопружного стану півпросторів із паралельними або перпендикулярними до їх межі теплоактивними тріщинами, на яких задана температура або тепловий потік [1, 4, 5, 9]. Метод розв'язування задачі термопружності у півпросторі за дії стаціонарного точкового джерела тепла з використанням функції Буссінеска наведено у праці [10].

У цій статті в замкнутому вигляді побудовано функції Ґріна задач термопружності для півбезмежного тіла, межа якого жорстко, гладко або гнучко закріплена: ***1***) за умов нульової температури на ній або ***2***) теплоізоляції.

Постановка задачі. Розглянемо півпростір з жорстко, гладко або гнучко закріпленою межею, на якій підтримується нульова температура або теплоізоляція. Введемо циліндричну систему координат з початком на межі півпростору і віссю Oz, перпендикулярною до неї. На віддалі h від межі півпростору знаходиться джерело тепла одиничної потужності. У цій системі координат граничні умови для $T(r,z)$ при $z=0$ мають вигляд

$$\boldsymbol{1})\qquad T(r,z)\big|_{z=0}=0\,,\qquad\qquad \boldsymbol{2})\qquad \left.\frac{\partial T(r,z)}{\partial z}\right|_{z=0}=0\,.$$

Умови закріплення подамо так:

– *для жорстко закріпленої межі*

$$u_r(r,0)=0,\qquad u_z(r,0)=0\,; \tag{1}$$

– *для гладко закріпленої межі*

$$u_z(r,0)=0,\qquad \sigma_{rz}(r,0)=0\,; \tag{2}$$

– *для гнучко закріпленої межі*

$$u_r(r,0)=0,\qquad \sigma_{zz}(r,0)=0\,. \tag{3}$$

Температурне поле запишемо у вигляді [7]

$$T(r,z)=\frac{1}{4\pi\lambda}\left(\frac{1}{R_1(r,z)}+\frac{(-1)^k}{R_2(r,z)}\right),\qquad R_{1,2}(r,z)=\sqrt{r^2+(z\mp h)^2}\,, \tag{4}$$

де λ – коефіцієнт теплопровідності, $k=1$ відповідає випадкові нульової температури межі тіла, а $k=2$ – її теплоізоляції.

Для обох задач компоненти вектора переміщень і тензора напружень шукаємо у вигляді суми

$$u(r,z)=\bar{u}(r,z)+\bar{\bar{u}}(r,z),\qquad \sigma(r,z)=\bar{\sigma}(r,z)+\bar{\bar{\sigma}}(r,z)\,, \tag{5}$$

де доданки $\bar{u}(r,z)$, $\bar{\sigma}(r,z)$ характеризують напружено-деформований стан

ISSN 0130–9420. Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2015. – 58, № 4. – С. 78-86.

безмежного тіла, зумовлений дзеркально розміщеними відносно площини $z = 0$ двома джерелами або джерелом і стоком тепла, а доданки $\bar{\bar{u}}(r, z)$, $\bar{\bar{\sigma}}(r, z)$ – переміщення і напруження у півпросторі $z \ge 0$, які забезпечують виконання умов (1)–(3).

Напружено-деформований стан безмежного тіла. Переміщення і напруження у безмежному тілі в осесиметричному випадку визначаються термопружним потенціалом переміщень [3]

$$\Phi(r,z) = -A\int_0^\infty \frac{1}{\alpha^2}\left[e^{-\alpha|z-h|}(1+\alpha|z-h|) + (-1)^k e^{-\alpha|z+h|} \times\right.$$

$$\left.\times (1+\alpha|z+h|)\right]J_0(\alpha, r)\,d\alpha = A\left[R_1(r,z) + (-1)^k R_2(r,z)\right],$$

$$A = \frac{m}{8\pi\lambda}, \qquad m = \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_t, \tag{6}$$

де α_t і ν – коефіцієнти лінійного теплового розширення і Пуассона; $J_0(u)$ – функція Бесселя, за формулами [7]

$$\bar{u}_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \qquad \bar{u}_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \tag{7}$$

$$\bar{\sigma}_{rr} = -2G\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Phi, \qquad \bar{\sigma}_{\varphi\varphi} = -2G\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Phi,$$

$$\bar{\sigma}_{zz} = -2G\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)\Phi, \qquad \bar{\sigma}_{rz} = 2G\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial z}, \tag{8}$$

де G – модуль зсуву.

Після відповідних обчислень маємо

$$\bar{u}_r = Ar\left[\frac{1}{R_1} + \frac{(-1)^k}{R_2}\right], \qquad \bar{u}_z = A\left[\frac{z-h}{R_1} + (-1)^k\frac{z+h}{R_2}\right], \tag{9}$$

$$\bar{\sigma}_{rr} = -2GA\left[\frac{1}{R_1}\left(1 + \frac{r^2}{R_1^2}\right) + \frac{(-1)^k}{R_2}\left(1 + \frac{r^2}{R_2^2}\right)\right],$$

$$\bar{\sigma}_{\varphi\varphi} = -2GA\left(\frac{1}{R_1} + \frac{(-1)^k}{R_2}\right), \qquad \bar{\sigma}_{rz} = -2GAr\left[\frac{z-h}{R_1^3} + (-1)^k\frac{z+h}{R_2^3}\right],$$

$$\bar{\sigma}_{zz} = -2GA\left[\frac{1}{R_1}\left(2 - \frac{r^2}{R_1^2}\right) + \frac{(-1)^k}{R_2}\left(2 - \frac{r^2}{R_2^2}\right)\right]. \tag{10}$$

Із аналізу цих формул випливає, що ними при дзеркальному розташуванні відносно площини $z = 0$ джерела і стоку тепла або двох джерел тепла описується також напружено-деформований стан півпростору з джерелом тепла, межа якого перебуває за нульової температури ($k = 1$) і закріплена гнучкою нерозтяжною плівкою ($u_r = 0$, $\sigma_{zz} = 0$, $\sigma_{rr} = 0$, $\sigma_{\varphi\varphi} = 0$) або теплоізольована ($k = 2$) і гладко закріплена ($u_z = 0$, $\sigma_{rz} = 0$).

Вирази (9) та (10), використовуючи подання (6)–(8), запишемо ще у вигляді

$$\bar{u}_r = A\int_0^\infty \frac{J_1(\alpha r)}{\alpha}\left[e^{-\alpha|z-h|}(1+\alpha|z-h|) + (-1)^k e^{-\alpha|z+h|}(1+\alpha|z+h|)\right]d\alpha,$$

$$\bar{u}_z = A\int_0^\infty J_0(\alpha r)\left[e^{-\alpha|z-h|}(z-h) + (-1)^k e^{-\alpha|z+h|}(z+h)\right]d\alpha, \tag{11}$$

$$\overline{\sigma}_{zz} = -2GA\int_0^\infty J_0(\alpha r)\left[e^{-\alpha|z-h|}(1+\alpha|z-h|)+\right.$$

$$\left.+(-1)^k e^{-\alpha|z+h|}(1+\alpha|z+h|)\right]d\alpha\,,$$

$$\overline{\sigma}_{rz} = 2GA\int_0^\infty \alpha^2 J_1(\alpha r)\left[e^{-\alpha|z-h|}(z-h)+(-1)^k e^{-\alpha|z+h|}(z+h)\right]d\alpha\,. \qquad (12)$$

Визначення переміщень і напружень через функцію Лява. Переміщення $\overline{\overline{u}}(r,z)$ і напруження $\overline{\overline{\sigma}}(r,z)$ визначимо за допомогою функції Лява φ, яка задовольняє бігармонічне рівняння $\Delta^2\varphi = 0$ у пружному півпросторі [7]:

$$\overline{\overline{u}}_r = -\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\partial z}, \qquad \overline{\overline{u}}_z = \frac{1}{1-2\nu}\left[2(1-\nu)\Delta\varphi - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right], \qquad (13)$$

$$\overline{\overline{\sigma}}_{rr} = \frac{2G}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\Delta\varphi - \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\right),$$

$$\overline{\overline{\sigma}}_{\varphi\varphi} = \frac{2G}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\Delta\varphi - \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right),$$

$$\overline{\overline{\sigma}}_{zz} = \frac{2G}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial z}\left((2-\nu)\Delta\varphi - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right),$$

$$\overline{\overline{\sigma}}_{rz} = \frac{2G}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial r}\left((1-\nu)\Delta\varphi - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right). \qquad (14)$$

Подамо функцію φ у вигляді інтеграла Ганкеля

$$\varphi(r,z) = \int_0^\infty e^{-\alpha z}(C + D\alpha z)J_0(\alpha r)\,d\alpha\,. \qquad (15)$$

Тут $C(\alpha)$ і $D(\alpha)$ − невідомі функції.

Підставляючи вираз (15) у формули (13) і (14), одержимо

$$\overline{\overline{u}}_r = -\frac{1}{1-2\nu}\int_0^\infty \alpha^2 e^{-\alpha z}\left[C - D(1-\alpha z)\right]J_1(\alpha r)\,d\alpha\,,$$

$$\overline{\overline{u}}_z = -\frac{1}{1-2\nu}\int_0^\infty \alpha^2 e^{-\alpha z}\left[C + D(2-4\nu+\alpha z)\right]J_0(\alpha r)\,d\alpha\,, \qquad (16)$$

$$\overline{\overline{\sigma}}_{rr} = -\frac{2G}{1-2\nu}\left\{\int_0^\infty \alpha^3 e^{-\alpha z}\left[C - D(1+2\nu+\alpha z)\right]J_0(\alpha r)\,d\alpha - \right.$$

$$\left. - \int_0^\infty \alpha^2 e^{-\alpha z}\left[C - D(1-\alpha z)\right]\frac{J_1(\alpha r)}{r}\,d\alpha\right\},$$

$$\overline{\overline{\sigma}}_{\varphi\varphi} = \frac{2G}{1-2\nu}\left\{\int_0^\infty 2\nu\alpha^3 e^{-\alpha z} D J_0(\alpha r)\,d\alpha - \right.$$

$$\left. - \int_0^\infty \alpha^2 e^{-\alpha z}\left[C - D(1-\alpha z)\right]\frac{J_1(\alpha r)}{r}\,d\alpha\right\},$$

$$\overline{\overline{\sigma}}_{zz} = \frac{2G}{1-2\nu}\int_0^\infty \alpha^3 e^{-\alpha z}\left[C + D(1-2\nu+\alpha z)\right]J_0(\alpha r)\,d\alpha\,,$$

$$\overline{\overline{\sigma}}_{rz} = \frac{2G}{1-2\nu}\int_0^\infty \alpha^3 e^{-\alpha z}\left[C - D(2\nu-\alpha z)\right]J_1(\alpha r)\,d\alpha\,. \qquad (17)$$

Півпростір з нульовою температурою на жорстко закріпленій межі. Використовуючи умову (1), подання (5), (11) при $k = 1$ і (16) та прирівнюючи підінтегральні вирази до нуля, маємо систему лінійних алгебричних рівнянь для визначення невідомих C і D:

$$D - C = 0,$$

$$\frac{3-4v}{1-2v}\alpha^2 D + 2Ahe^{-\alpha h} = 0,$$

розв'язком якої є

$$C = D = -\frac{2A(1-2\nu)he^{-\alpha h}}{(3-4\nu)\alpha^2}. \tag{18}$$

Підставивши вираз (18) у формули (16) і (17), маємо

$$\bar{\bar{u}}_r = \frac{Bhrz}{R_2^3}, \quad \bar{\bar{u}}_z = \frac{Bh\left[z(z+h)+(3-4\nu)R_2^2\right]}{R_2^3}, \quad B = \frac{2A}{3-4\nu}, \tag{19}$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{rr} = 2BGh\left(\frac{(1-2\nu)z-2\nu h}{R_2^3} - \frac{3zr^2}{R_2^5}\right),$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{\varphi\varphi} = \frac{2BGh}{R_2^3}\left[(1-2\nu)z-2\nu h\right],$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{zz} = 2BGh\left[\frac{2\nu(z+h)-2(2z+h)}{R_2^3} + \frac{3zr^2}{R_2^5}\right],$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{rz} = -2BGhr\left[\frac{1-2\nu}{R_2^3} + \frac{3z(z+h)}{R_2^5}\right]. \tag{20}$$

Напружено-деформований стан півпростору визначаємо за формулами (5), (9), (10) і (19), (20).

Напруження σ_{zz} збігається з наведеним у праці [8], в якій використовувалась декартова система координат.

Півпростір з теплоізольованою жорстко закріпленою межею. Використовуючи умову (1), подання (5), (11) при $k = 2$ і (16), маємо систему лінійних алгебричних рівнянь для визначення невідомих C і D:

$$\frac{\alpha^2(C-D)}{1-2\nu} - 2\frac{1}{\alpha}A(1+\alpha h)e^{-\alpha h} = 0,$$

$$C + 2(1-2\nu)D = 0,$$

розв'язавши яку одержимо

$$C = -2(1-2\nu)D, \qquad D = -\frac{2A(1-2\nu)(1+\alpha h)e^{-\alpha h}}{(3-4\nu)\alpha^3}. \tag{21}$$

Підставивши вирази (21) у формули (16) і (17), маємо

$$\bar{\bar{u}}_r = -\frac{Br}{R_2^3}\left[(3-4\nu)R_2^2 - hz - \frac{4(1-\nu)R_2^2 z}{R_2+z+h}\right], \bar{\bar{u}}_z = \frac{Bz\left[h(z+h)+R_2^2\right]}{R_2^3}, \tag{22}$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{rr} = \frac{2BG}{R_2^3}\left\{2(1-\nu)\left[R_2^2 - h(z+h)\right] - \left[R_2^2 + r^2 + h(z+2h)\right] - \right.$$

$$\left. - \frac{3hr^2z}{R_2^2} - \frac{4(1-\nu)R_2^2 z}{R_2+z+h}\right\},$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{\varphi\varphi} = -\frac{2BG}{R_2^3}\left\{(3-2\nu)R_2^2 - h\left[(1-2\nu)z-2\nu h\right] - \frac{4(1-\nu)R_2^2 z}{R_2+z+h}\right\},$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{zz} = \frac{2BG}{R_2^3}\left\{-2\nu\left[h(z+h)+R_2^2\right]+(r^2+2h^2)+\frac{3hzr^2}{R_2^2}\right\},$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{rz} = \frac{4BGr}{R_2^3}\left\{(1-\nu)\left[R_2 - z + \frac{(z+h)^2}{R_2+z+h}\right]-\frac{z\left[R_2^2+3h(z+h)\right]}{2R_2^2}\right\}. \tag{23}$$

Напружено-деформований стан півпростору з теплоізольованою межею визначаємо за формулами (5), (9), (10) і (22), (23). Напруження σ_{zz} збігається з наведеним у праці [8].

Нульова температура і гладке закріплення межі. Використовуючи граничну умову (2), подання (5), (11) і (12) при $k = 1$, (16) і (17), маємо

$$C = -\frac{2A(1-2\nu)he^{-\alpha h}}{\alpha^2}, \qquad D = 0.$$

Тоді за формулами (16) і (17) одержуємо

$$\bar{\bar{u}}_r = \frac{2Ahr}{R_2(R_2+z+h)}, \qquad \bar{\bar{u}}_z = \frac{2Ah}{R_2}, \tag{24}$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{rr} = -\frac{4AGh}{R_2^3}\left[R_2-(z+h)-\frac{R_2(z+h)}{R_2+z+h}\right],$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{\varphi\varphi} = \frac{4AGh}{R_2(R_2+z+h)}, \qquad \bar{\bar{\sigma}}_{zz} = -\frac{4AGh(z+h)}{R_2^3}, \qquad \bar{\bar{\sigma}}_{rz} = -\frac{4AGhr}{R_2^3}. \tag{25}$$

Напружено-деформований стан півпростору з гладко закріпленою межею, яка підтримується за нульової температури, визначаємо з використанням формул (5), (9), (10) і (24), (25).

Теплоізоляція і гнучке закріплення межі. У цьому випадку

$$C = \frac{2A(1-2\nu)(1+\alpha h)e^{-\alpha h}}{\alpha^3}, \qquad D = 0.$$

Тоді

$$\bar{\bar{u}}_r = -\frac{2A(R_2+h)r}{R_2(R_2+z+h)}, \qquad \bar{\bar{u}}_z = 2A\left[\ln(R_2+z+h)-\frac{h}{R_2}\right], \tag{26}$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{rr} = \frac{4AG}{R_2^3}\left[(z^2-h^2)-z\frac{R_2^2+R_2(z+h)+(z+h)^2}{(R_2+z+h)}\right],$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{\varphi\varphi} = -\frac{4AG(R_2+h)}{R_2(R_2+z+h)}, \qquad \bar{\bar{\sigma}}_{zz} = \frac{4AG(R_2^2+zh+h^2)}{R_2^3},$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{rz} = \frac{4ArG}{R_2^3}\left[R_2+h-\frac{R_2(z+h)}{R_2+z+h}\right]. \tag{27}$$

Напружено-деформований стан півпростору з теплоізольованою гнучко закріпленою межею визначаємо за формулами (5), (9), (10) і (26), (27).

Визначення напружень на жорстко закріпленій межі. Якщо на межі півпростору при $z = 0$ задано нульову температура, то з формул (10) при $k = 1$ і (20) одержуємо згідно з (5) такі вирази для напружень:

$$\sigma_{rr}(r,0) = \sigma_{\varphi\varphi}(r,0) = -\frac{8AG\nu h^2}{(3-4\nu)R_0^3}, \qquad R_0 = \sqrt{r^2+h^2},$$

$$\sigma_{zz}(r,0) = -8AG\frac{(1-\nu)h^2}{(3-4\nu)R_0^3}, \qquad \sigma_{rz}(r,0) = \frac{8AG(1-\nu)hr}{(3-4\nu)R_0^3}.$$

Тут і нижче досліджувались залежність температурних напружень на межі півпростору при $z=0$ уздовж осі Or від місцезнаходження точкового джерела тепла (h = 0.2, 0.5, 1.0) при $\nu = 0.3$. На рис. 1–3 показано поведінку напружень для півпростору з нульовою температурою на жорстко закріпленій межі. На рис. 1 наведено напруження $\sigma^* = \sigma_{rr}/2AG = \sigma_{\varphi\varphi}/2AG$, на рис. 2 і на рис. 3 – $\sigma_{zz}^* = \sigma_{zz}/2AG$ і $\sigma_{rz}^* = \sigma_{rz}/2AG$ відповідно.

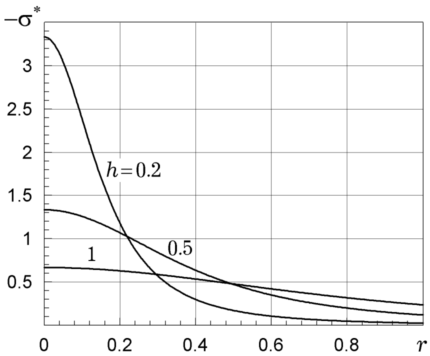

Рис. 1

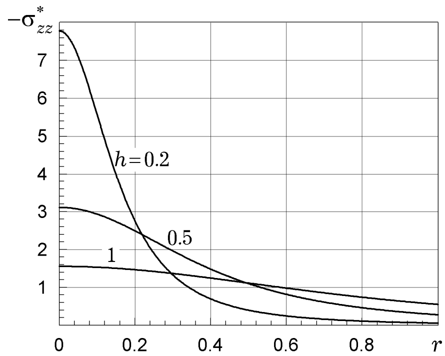

Рис. 2

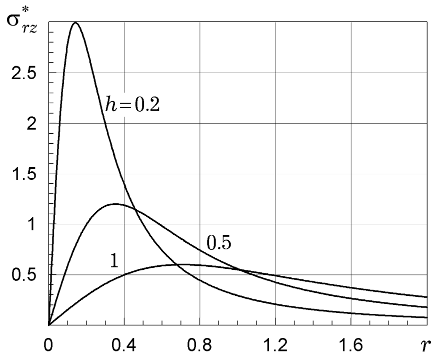

Рис. 3

На теплоізольованій межі при $z = 0$ згідно зі співвідношеннями (10) при $k = 2$ і (23) маємо

$$\sigma_{rr}(r,0) = \sigma_{\varphi\varphi}(r,0) = -8AG\frac{3(1-\nu)r^2 + (3-2\nu)h^2}{(3-4\nu)R_0^3},$$

$$\sigma_{zz}(r,0) = -8AG\frac{(1-\nu)(r^2 + 2h^2)}{(3-4\nu)R_0^3},$$

$$\sigma_{rz}(r,0) = 8AGr\frac{(1-\nu)(r^2 + 2h^2 + hR_0)}{(3-4\nu)(R_0 + h)R_0^3}.$$

На рис. 4–6 показано напруження для півпростору з жорстко закріпленою теплоізольованою межею. На рис. 4 наведено напруження $\sigma^* = \sigma_{rr}/2AG = \sigma_{\varphi\varphi}/2AG$, а на рис. 5 і на рис. 6 – $\sigma_{zz}^* = \sigma_{zz}/2AG$ і $\sigma_{rz}^* = \sigma_{rz}/2AG$ відповідно.

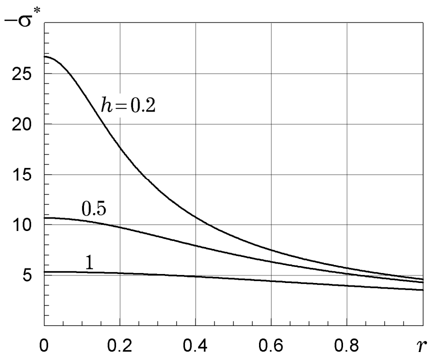

Рис. 4

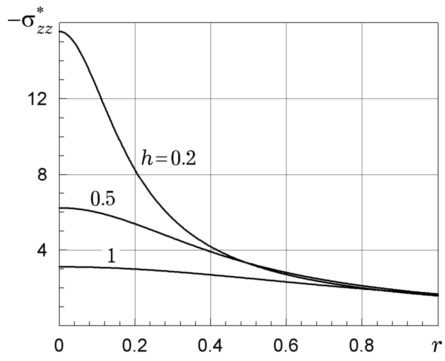

Рис. 5

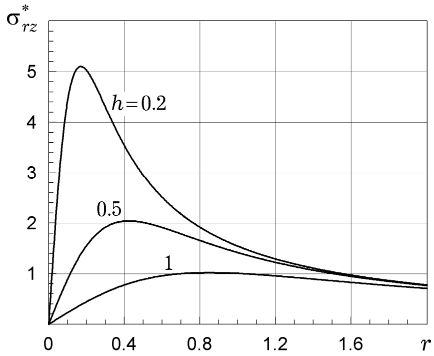

Рис. 6

В обох випадках при наближенні джерела тепла до межі півпростору напруження σ^* і σ_{zz}^* при $r = 0$ зростають, причому для теплоізольованої межі порівняно з випадком межі з нульовою температури значення σ_{zz}^* більші у два рази, а σ^* – у $(3 - 2\nu)/\nu$ рази.

Визначення напружень на гладко закріпленій межі. Якщо на межі півпростору при $z = 0$ задано нульову температуру, то з формул (10) при $k = 1$ і (25) одержуємо такі вирази для напружень:

$$\sigma_{rr}(r,0) = -\frac{4AGh}{R_0^3}\left(R_0 - h - \frac{R_0 h}{R_0 + h}\right),$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}(r,0) = \frac{4AGh}{R_0(R_0 + h)}, \qquad \sigma_{zz}(r,0) = -4AGh^2\,\frac{1}{R_0^3}.$$

На рис. 7 наведено напруження $\sigma^* = \sigma_{rr}/2AG$ (штрихові лінії) та $\sigma^* = \sigma_{\varphi\varphi}/2AG$ (суцільні лінії), на рис. 8 – $\sigma_{zz}^* = \sigma_{zz}/2AG$.

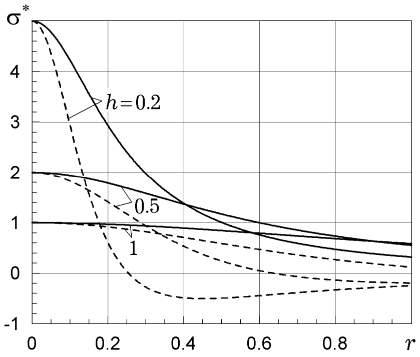

Рис. 7

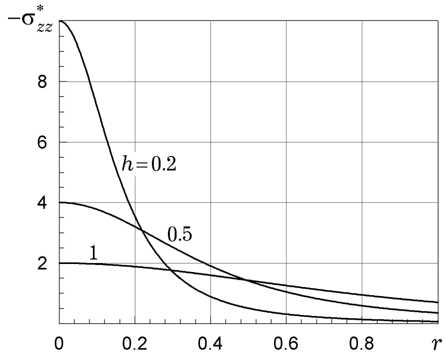

Рис. 8

Визначення напружень на гнучко закріпленій межі. На теплоізольованій межі при $z = 0$ згідно із співвідношеннями (10) при $k = 2$ і (27) маємо

$$\sigma_{rr}(r,0) = \sigma_{\varphi\varphi}(r,0) = -\frac{8AG}{R_0}, \qquad \sigma_{rz}(r,0) = \frac{4AGr}{R_0^3}\left(\frac{R_0 h + 2h^2 + r^2}{R_0 + h}\right).$$

На рис. 9 наведено напруження $\sigma^* = \sigma_{rr}/2AG = \sigma_{\varphi\varphi}/2AG$, на рис. 10 – $\sigma_{rz}^* = \sigma_{rz}/2AG$.

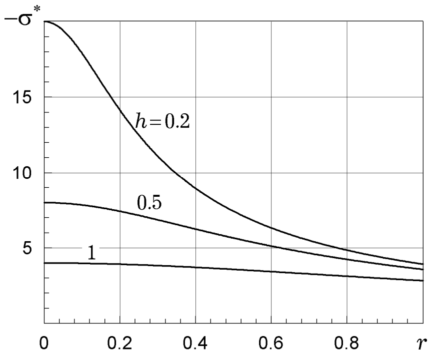

Рис. 9

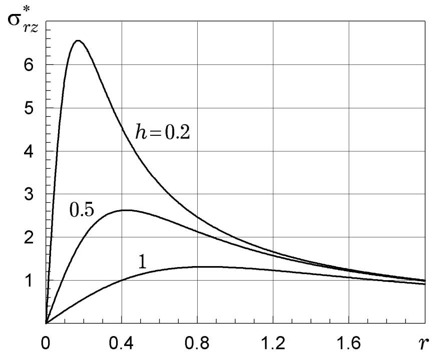

Рис. 10

Висновки. Одержано розв'язок осесиметричної задачі термопружності для півпростору, що нагрівається точковим джерелом тепла, з жорстко, гладко або гнучко закріпленою межею, на якій задана нульова температура або теплоізоляція. Наведено явні вирази для температури, переміщень і напружень. Із формули (4) видно, що на теплоізольованій межі ($k = 2$) температура вдвічі більша, ніж у цьому ж місці безмежного тіла. Тому напруження там також є більшими, ніж на межі з нульовою температурою.

Наведені співвідношення для переміщень і напружень є відповідними функціями Ґріна і можуть бути використані при визначенні у розглянутому півпросторі термопружного стану, зумовленого нагрівом джерелами тепла, розподіленими уздовж лінії, по поверхні і по об'єму.

Одержані результати надалі будуть використані при дослідженні термопружного стану півпростору за тепловиділення у паралельній до межі круговій області.

1. *Кит Г. С., Сушко О. П.* Термоупругое состояние полупространства с параллельной к его границе теплоактивной трещиной // Прикл. механика. – 2007. – **43**, № 4. – С. 46–54.

   Те саме: *Kit G. S., Sushko O. P.* Thermoelastic state of a half-space having a thermally active crack parallel to its boundary // Int. Appl. Mech. – 2007. – **43**, No. 4. – P. 395–402.
2. *Кіт Г. С., Андрійчук Р. М.* Задача стаціонарної теплопровідності для кусково-однорідного простору за тепловиділення у круговій області // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2012. – Вип. 10. – С. 115–122.
3. *Кіт Г. С., Сушко О. П.* Осесиметричні задачі стаціонарної теплопровідності та термопружності для тіла з теплоактивним або теплоізольованим дисковим включенням (тріщиною) // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – **53,** № 1. – С. 58–70.

   Те саме: *Kit H. S., Sushko O. P.* Axially symmetric problems of stationary heat conduction and thermoelasticity for a body with thermally active or thermally insulated disk inclusion (crack) // J. Math. Sci. – 2011. – **176**, No. 4. – P. 561–577.
4. *Кіт Г. С., Сушко О. П.* Термопружний стан півпростору з перпендикулярною до його краю теплоактивною круговою тріщиною // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2005. – **41**, № 2. – С. 16–22.

   Те саме: *Kit H. S., Sushko O. P.* Thermoelastic state of a half space containing a thermally active circular crack perpendicular to its edge // Mater. Sci. – 2005. – **41**, No. 2. – P. 150–157.

5. *Кіт Г. С., Сушко О. П.* Термопружний стан півпростору з перпендикулярною до його межі теплоактивною еліптичною тріщиною // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2006. – **42**, № 2. – С. 45–52.
   Те саме: *Kit H. S., Sushko O. P.* Thermoelastic state of a half space containing a thermally active elliptic crack perpendicular to its boundary // Mater. Sci. – 2006. – **42**, No. 2. – P. 189–199.
6. *Кіт Г., Сушко О.* Стаціонарне температурне поле у півбезмежному тілі з теплоактивним або теплоізольованим дисковим включенням // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2011. – Вип. 13. – С. 67–80.
7. *Новацкий В.* Вопросы термоупругости. – Москва: Изд-во АН СССР, 1962. – 364 с.
   Те саме: *Nowacki W.* Thermoelasticity. – London: Pergamon Press, 1962. – 628 p.
8. *Процюк Б. В.* Функції Ґріна тривимірних статичних задач термопружності для кусково-однорідного простору // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – **53,** № 1. – С. 36–47.
   Те саме: *Protsyuk B. V.* Green functions of three-dimensional static thermoelasticity problems for a piecewise homogeneous space // J. Math. Sci. – 2011. – **176**, No. 4. – P. 532–547.
9. *Kit H.* Potential methods in the spatial problems of heat conduction and thermoelasticity for solids with cracks // In: R. B. Hetnarski (ed.). Encyclopedia of Thermal Stresses. – Springer, 2014. – Vol. 7. – P. 4007–4013.
10. *Wang Min-zhong, Huang Ke-fu.* Thermoelastic problems in the half space – An application of the general solution in elasticity // Appl. Math. Mech. – 1991. – **12**, No. 9. – P. 849–862.

ВЛИЯНИЕ СТАЦИОНАРНОГО ИСТОЧНИКА ТЕПЛА НА НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ЖЕСТКО, ГЛАДКО ИЛИ ГИБКО ЗАЩЕМЛЕННОЙ ГРАНИЦЕЙ

С использованием термоупругого потенциала перемещений и бигармонической функции Лява определены обусловленные стационарным источником тепла температура, перемещения и напряжения в полубесконечном теле, граница которого жестко, гладко или гибко защемлена при нулевой температуре на ней или теплоизоляции. Построены графики осевых, радиальных, круговых и касательных напряжений на границе тела в зависимости от расстояния источника тепла к этой границе.

INFLUENCE OF STATIONARY HEAT SOURCE ON STRESS STATE OF HALF-SPACE WITH HARDLY, SMOOTHLY OR FLEXIBLY CLAMPED BOUNDARY

Using the potential of thermoelastic displacements and Love biharmonic function, the temperature, displacements and stresses in the semi-infinite body due to the heat source are determined. The boundary of semi-infinite body is hardly, smoothly or flexibly clamped and is maintained at zero temperature or it is insulated. The plots of axial, radial, circular and tangential stresses on the boundary of the body, depending on the distance of the heat source to this boundary, are presented.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
15.02.15