

**ПЛОСКА ЗМІШАНА ЗАДАЧА ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПІВСМУГИ**

*Досліджено напружений стан півсмуги, на одній бічній грані якої задано умови гладкого контакту, на іншій – умови зчеплення, за дії на торці зовнішнього нормального навантаження і температури. За допомогою методу інтегральних перетворень вихідну задачу зведено до одновимірної векторної крайової задачі. Шляхом застосування апаратів матричного диференціального числення і матриці-функції Гріна отриману задачу зведено до сингулярного інтегрального рівняння відносно похідної від переміщень на торці півсмуги, яке розв'язано методом ортогональних многочленів. Виконано числовий аналіз полів переміщень і напружень усередині півсмуги, встановлено зони розтягувальних напружень на бічній грані півсмуги та умови їх виникнення.*

Плоскі задачі незв'язаної термопружності є досить ефективними моделями, що описують різноманітні технічні процеси. Необхідність розробки нових підходів до їх розв'язання викликана як потребами практики, так і розвитку нових математичних методів. Це зумовило значну кількість досліджень у цьому напрямку, частина з яких стала класичними [6, 9, 14, 16, 17, 24, 29]. Слід відмітити, що запропонований Н. І. Мусхелішвілі разом з Г. В. Колосовим метод розв'язування плоских задач теорії пружності з використанням теорії комплексної змінної та інтегралів типу Коші знайшов широке застосування і подальший розвиток у працях їх учнів і послідовників. Бібліографія робіт, присвячених дослідженню напруженого стану півсмуги, досить велика.

Термопружні поля у тілах з початковими деформаціями вивчали Р. М. Кушнір і його учні [12, 13]. А плоскі задачі для тіл з тріщинами досліджували Г. С. Кіт зі співавторами [7, 8].

Роботу [10] присвячено розв'язанню плоских і просторових квазістатичних задач лінійної термопружності для прямокутних областей варіаційними методами з використанням спеціальних ортогональних поліномів. У роботі [5] крайову задачу стаціонарної теплопровідності для півсмуги з круговим отвором зведено до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь, що допускає застосування методу редукції. У [27] розв'язок плоскої задачі термопружності отримано через гармонічні функції. У [2] побудовано інтегральне рівняння плоскої крайової задачі неоднорідної термопружності, розроблено алгоритм числового розв'язання задачі. В [11] розв'язок задачі для тонкої півсмуги-пластинки, вільної від зовнішнього навантаження і яка нагрівається джерелом тепла, побудовано методом продовження функцій. У роботі [31] досліджено напівнескінченну пластину під впливом лазерного імпульсного локального нагріву з використанням L-S (Lord-Shulman) узагальненої теорії термопружності, де скінченноелементні рівняння керування розв'язано безпосередньо у часовій області. У [28] досліджено властивості дискретної апроксимації для математичних моделей зв'язаної динамічної термопружності, сформульованої у термінах напружень і температури. Узагальнену зв'язану динамічну задачу термопружності розв'язано [26] для півпростору за допомогою теорії інваріантно-групових властивостей диференціальних рівнянь. У роботі [3] розроблено алгоритм дослідження у трансверсально-ізотропному шарі напруженого стану, зумовленого теплообміном за законом Ньютона між шаром і зовнішнім середовищем, при наявності ліній поділу крайових умов третього роду для температури на граничних площинах шару. Крайову задачу зв'язаної термопружності для півсмуги з отвором і змішаними крайовими умовами розв'язано у роботі [25]. Задачу зведено до системи чотирьох сингулярних інтегральних рів-

нянь, які розв'язано чисельно методом механічних квадратур. У [30] наведено аналітичний підхід до розв'язування плоских пружних і термопружних задач для неоднорідних ортотропних площин, півплощин і смуг. Задачу зведено до інтегрального рівняння Вольтерра, розв'язок якого записано у явному вигляді.

Переважаю автори використовують два основних підходи: аналітичний і чисельно-аналітичний, вибір між якими визначається крайовими умовами на гранях півсмуги. Спільним моментом розв'язання у всіх згаданих працях є те, що вони базуються або на поданні розв'язків через зображення Папковича – Нейбера, або на поданні розв'язків через комбінації декількох гармонічних функцій, або через деякі інші зображення. Це ускладнює процес побудови розподілів полів переміщень і напружень.

У цій роботі використано запропонований Г. Я. Поповим [20] підхід, згідно з яким інтегральні перетворення застосовуються безпосередньо до рівнянь рівноваги та крайових умов вихідної задачі, що дозволяє подати вихідну задачу як одновимірну, яка розв'язується за допомогою апарату векторних крайових задач [1, 21]. Це дозволяє звести вихідну задачу до інтегрального сингулярного рівняння, яке розв'язується методом ортогональних поліномів.

**1. Постановка задачі.** Розглядається пружна півсмуга, що описується у декартовій системі координат співвідношеннями  $0 < x < a$ ,  $0 < y < \infty$  (рис. 1). Приймаємо, що на грані  $x = 0$ ,  $0 < y < \infty$  виконуються умови жорсткого зчеплення

$$u(0, y) = 0, \quad v(0, y) = 0, \quad (1)$$

на грані  $x = a$ ,  $0 < y < \infty$  – умови гладкого контакту

$$u(a, y) = 0, \quad \tau_{xy}(a, y) = 0, \quad (2)$$

а на торці  $y = 0$ ,  $0 < x < a$  задаємо напруження

$$\sigma_y|_{y=0} = -p(x), \quad \tau_{yx}|_{y=0} = 0, \quad (3)$$

де  $p(x)$  – відома функція. Компоненти переміщення  $u$ ,  $v$  задовольняють рівняння Ляме [21]

$$\begin{aligned} \mu_* \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} + \mu_0 \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x \partial y} &= \rho \frac{\partial T}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x^2} + \mu_* \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y^2} + \mu_0 \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} &= \rho \frac{\partial T}{\partial y}, \end{aligned} \quad (4)$$

де  $u(x, y) = u_x(x, y)$ ,  $v(x, y) = u_y(x, y)$ ,  $\rho = 2 \frac{\mu + 1}{1 - 2\mu} \alpha_t$ ,  $\alpha_t$  – коефіцієнт лі-

нійного теплового розширення,  $\mu_* = \mu_0 + 1$ ,  $\mu_0 = \frac{1}{1 - 2\mu}$ ,  $\mu$  – коефіцієнт Пуассона,  $T(x, y)$  – температура, відома з попереднього розв'язання відповідної задачі стаціонарної теплопровідності.

Потрібно визначити поле переміщень і напружень у півсмугі, що задовольняють рівняння рівноваги (4) при крайових умовах (1)–(3).

**2. Розв'язання задачі стаціонарної теплопровідності.** Для врахування впливу температури на півсмугу попередньо розв'яжемо задачу стаціонарної теплопровідності. Вважаємо, що бічні грані півсмуги теплоізоляовані:

$$\frac{\partial T}{\partial x}(0, y) = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x}(a, y) = 0, \quad 0 < y < \infty. \quad (5)$$

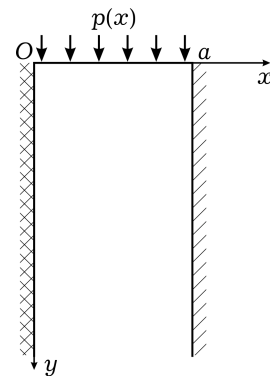


Рис. 1

На торці діє теплове навантаження

$$T(x, 0) = f_T(x), \quad 0 < x < a, \quad (6)$$

де  $f_T(x)$  – відома функція.

Температуру  $T(x, y)$  шукаємо як розв'язок рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (7)$$

за крайових умов (5), (6) і вимог на функцію  $\frac{\partial T}{\partial x} \rightarrow 0, \frac{\partial T}{\partial y} \rightarrow 0$  при  $y \rightarrow \infty$ .

Крайову задачу (5)–(7) зведемо до одновимірної за допомогою скінченного інтегрального cos-перетворення Фур'є за змінною  $x$ . Тоді отримаємо одновимірну крайову задачу

$$T_\alpha''(y) - \alpha^2 T_\alpha(y) = 0, \\ T_\alpha(0) = f_{T_\alpha}, \quad T_\alpha(y), \quad \frac{dT_\alpha}{dy} \rightarrow 0, \quad y \rightarrow \infty. \quad (8)$$

Тут  $T_\alpha(y) = \int_0^a T(x, y) \cos \alpha x \, dx$ ,  $f_{T_\alpha} = \int_0^a f_T(x) \cos \alpha x \, dx$ . Застосувавши до задачі (8) напівнескінченне інтегральне sin-перетворення Фур'є за змінною  $y$ :

$$T_{\alpha\beta} = \int_0^\infty T_\alpha(y) \sin \beta y \, dy$$

з формулою обернення  $T_\alpha(y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty T_{\alpha\beta} \sin \beta y \, d\beta$ , отримаємо алгебраїчне рівняння у трансформантах, розв'язком якого є

$$T_{\alpha\beta} = \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} f_{T_\alpha}.$$

Після застосування відповідних обернених інтегральних перетворень отримаємо таке подання температури:

$$T(x, y) = \frac{1 - e^{-2\pi y/a}}{2a} \int_0^a f_T(\xi) [\delta^+(y, x, \xi) + \delta^-(y, x, \xi)] \, d\xi, \\ 0 \leq x \leq a, \quad 0 < y < \infty,$$

$$T(x, y) = \frac{1}{a} \int_0^a f_T(\xi) \, d\xi + \sum_{k=1}^\infty \frac{2}{a} \int_0^a f_T(\xi) \cos \frac{\pi k \xi}{a} \, d\xi \cos \frac{\pi k x}{a}, \\ 0 \leq x \leq a, \quad y = 0,$$

$$\text{де } \delta^\pm(y, x, \xi) = \frac{1}{1 + e^{-2\pi y/a} - 2e^{-\pi y/a} \cos \frac{\pi(x \pm \xi)}{a}}.$$

**3. Зведення задачі термопружності до одновимірної векторної крайової задачі.** Застосуємо інтегральні sin-, cos-перетворення Фур'є до крайової задачі (1)–(4): sin-перетворення до другого рівняння, а cos-перетворення – до першого рівняння системи (4).

Крайові умови (2), (3) попередньо переформулюємо у термінах переміщень [15]:

$$v(0, y) = 0, \quad v'(a, y) = 0, \quad (9)$$

$$2G\mu_0 \left( \mu \frac{\partial u(x, 0)}{\partial x} + (1 - \mu) \frac{\partial v(x, 0)}{\partial y} \right) = -p(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, 0)}{\partial x} = 0. \quad (10)$$

Як результат, у просторі трансформант отримуємо таку одновимірну крайову задачу:

$$\begin{aligned} u_{\beta}''(x) - \frac{\beta^2(x-1)}{x+1} u_{\beta}(x) + \frac{2\beta}{x+1} v_{\beta}'(x) &= \frac{3-x}{x+1} \chi'(x) + \tilde{\rho} T_{\beta}'(x), \\ v_{\beta}''(x) - \frac{\beta^2(x+1)}{x-1} v_{\beta}(x) - \frac{2\beta}{x-1} u_{\beta}'(x) &= -\beta \frac{x+1}{x-1} \chi(x) - \beta \rho T_{\beta}(x), \\ u_{\beta}(0) &= 0, \quad u_{\beta}(a) = 0, \\ v_{\beta}(0) &= 0, \quad v_{\beta}'(a) = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

де  $\tilde{\rho} = \rho \frac{x-1}{x+1}$ ,  $\chi(x)$  – невідома функція:  $\chi(x) = v(x, 0)$ ,  $\chi'(x) = v'(x, 0)$ . Враховуючи крайову умову (10), маємо, що  $u_y(x, 0) \equiv v'(x, 0) = -\chi'(x)$  (друга з умов (10) виконується автоматично).

#### 4. Розв'язок одновимірної векторної крайової задачі термопружності.

##### 4.1. Побудова загального розв'язку.

Введемо вектори

$$\mathbf{y}_{\beta}(x) = \begin{pmatrix} u_{\beta}(x) \\ v_{\beta}(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_{\beta}(x) = \begin{pmatrix} \frac{3-x}{x+1} \chi'(x) + \tilde{\rho} T_{\beta}'(x) \\ -\beta \frac{x+1}{x-1} \chi(x) - \beta \rho T_{\beta}(x) \end{pmatrix},$$

і матриці

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{x-1}{x+1} & 0 \\ 0 & \frac{x+1}{x-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{x+1} \\ -\frac{1}{x-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді систему рівнянь (11) можна подати у векторному вигляді

$$L_2[\mathbf{y}_{\beta}(x)] = \mathbf{f}_{\beta}(x). \quad (12)$$

Тут  $L_2$  – диференціальний оператор другого порядку, що діє за правилом

$$L_2[\mathbf{y}_{\beta}(x)] = \mathbf{I} \mathbf{y}_{\beta}''(x) + 2\beta \mathbf{Q} \mathbf{y}_{\beta}'(x) - \beta^2 \mathbf{P} \mathbf{y}_{\beta}(x), \text{ де } \mathbf{I} \text{ – одинична матриця.}$$

Розв'язок цієї задачі будемо шукати у вигляді

$$\mathbf{y}_{\beta}(x) = \mathbf{y}_{\beta}^0(x) + \mathbf{y}_{\beta}^1(x), \quad (13)$$

де  $\mathbf{y}_{\beta}^0(x)$  – загальний розв'язок однорідного векторного рівняння, відповідного (12),  $\mathbf{y}_{\beta}^1(x)$  – його частковий розв'язок. Ці розв'язки побудуємо за допомогою апарату матричного диференціального числення. Як доведено у [22], розв'язок однорідного векторного рівняння (12) отримуємо як розв'язок однорідного матричного рівняння

$$L_2[\mathbf{Y}_{\beta}(x)] = 0, \quad 0 < x < a, \quad (14)$$

де  $\mathbf{Y}_{\beta}(x)$  – матриця розміру  $2 \times 2$ .

Виберемо, як показано у [21], матрицю  $\mathbf{Y}_{\beta}(x)$  у формі  $\mathbf{Y}_{\beta}(x) = e^{\xi x} \mathbf{I}$ , та підставимо у матричне рівняння  $L_2[\mathbf{Y}_{\beta}(x)] = \mathbf{M}(\xi) e^{\xi x}$ , де

$$\mathbf{M}(\xi) = \mathbf{I} \xi^2 + 2\beta \mathbf{Q} \xi - \beta^2 \mathbf{P} = \begin{pmatrix} \xi^2 - \beta^2 \frac{x-1}{x+1} & \frac{2\beta \xi}{x+1} \\ -\frac{2\beta \xi}{x-1} & \xi^2 - \beta^2 \frac{x+1}{x-1} \end{pmatrix}.$$

Розв'язок отриманого матричного рівняння запишемо за формулою [22]

$$\mathbf{Y}(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{\xi x} \mathbf{M}^{-1}(\xi) d\xi, \quad (15)$$

де  $\mathbf{M}^{-1}(\xi)$  – матриця, обернена до  $\mathbf{M}(\xi)$ . Контур  $C$  охоплює особливі точки підінтегральної матриці  $\mathbf{M}^{-1}(\xi)$ , яка має вигляд

$$\mathbf{M}^{-1}(\xi) = \frac{1}{(\xi - \beta)^2(\xi + \beta)^2} \begin{pmatrix} \xi^2 - \beta^2 \frac{x+1}{x-1} & -\frac{2\beta\xi}{x+1} \\ \frac{2\beta\xi}{x-1} & \xi^2 - \beta^2 \frac{x-1}{x+1} \end{pmatrix}.$$

Обернена матриця має два кратних полюси. Після обчислення контурного інтеграла (15) за допомогою теореми про лишки та обчислення лишків у кратних полюсах  $\xi = \beta$ ,  $\xi = -\beta$  отримуємо матричні лінійно незалежні розв'язки однорідного матричного рівняння (14) [22]:

$$\mathbf{Y}_1(x) = \frac{e^{\beta x}}{2} \begin{pmatrix} \frac{x - \beta x}{\beta(x-1)} & -\frac{x}{x+1} \\ \frac{x}{x-1} & \frac{x + \beta x}{\beta(x+1)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y}_2(x) = \frac{e^{-\beta x}}{2} \begin{pmatrix} -\frac{x + \beta x}{\beta(x-1)} & \frac{x}{x+1} \\ -\frac{x}{x-1} & -\frac{x - \beta x}{\beta(x+1)} \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Загальний розв'язок векторного однорідного рівняння, відповідного рівнянню (12), має зображення

$$\mathbf{y}_\beta(x) = \mathbf{Y}_1(x) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \mathbf{Y}_2(x) \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}, \quad (17)$$

де  $c_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , – невідомі сталі, які визначимо пізніше.

Частковий розв'язок неоднорідного рівняння (12) побудуємо за допомогою матриці-функції Гріна.

**4.2. Побудова матриці-функції Гріна.** Матрицю Гріна  $G(x, \xi)$  будемо методом матричних інтегральних перетворень для векторної крайової задачі

$$\begin{aligned} L_2 \mathbf{y}(x) &= \mathbf{f}(x), & 0 < x < a, \\ \mathbf{y}(0) &= 0, & \mathbf{y}'(a) = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Для цього ядро інтегрального перетворення виберемо у вигляді

$$H(x, \alpha_n) = \begin{pmatrix} \sin \alpha_n x & 0 \\ 0 & \cos \alpha_n x \end{pmatrix}, \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{a}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (19)$$

Домноживши обидві частини рівняння (18) на матрицю (19) і проінтегрувавши в інтервалі  $[0, a]$ , отримаємо рівняння

$$\mathbf{\Omega}_\beta(\alpha_n) \mathbf{y}_n = \mathbf{f}_n, \quad (20)$$

де

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_n &= \int_0^a \mathbf{y}(x) H(x, \alpha_n) dx, & \tilde{\mathbf{Q}} &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{x+1} \\ \frac{1}{x-1} & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{\Omega}_\beta(\alpha_n) &= -\mathbf{I}\alpha_n^2 - 2\beta\alpha_n \tilde{\mathbf{Q}} - \beta^2 \mathbf{P} = \begin{pmatrix} -\alpha_n^2 - \beta^2 \frac{x-1}{x+1} & -\frac{2\beta\alpha_n}{x+1} \\ -\frac{2\beta\alpha_n}{x-1} & -\alpha_n^2 - \beta^2 \frac{x+1}{x-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Розв'язок рівняння (20) знайдемо за формулою

$$\mathbf{y}_n = \mathbf{\Omega}_\beta^{-1}(\alpha_n) \mathbf{f}_n, \quad (21)$$

де

$$\mathbf{\Omega}_\beta^{-1}(\alpha_n) = \frac{1}{(\alpha_n^2 + \beta^2)^2} \begin{pmatrix} -\frac{\alpha_n^2(x-1) + \beta^2(x+1)}{x-1} & \frac{2\beta\alpha_n}{x+1} \\ \frac{2\beta\alpha_n}{x-1} & -\frac{\alpha_n^2(x+1) + \beta^2(x-1)}{x+1} \end{pmatrix}.$$

Обернене до (21) інтегральне перетворення відповідно має вигляд [21]

$$\mathbf{y}(x) = \frac{2}{a} \sum_{n=0}^{\infty} ' H(x, \alpha_n) \mathbf{\Omega}_\beta^{-1}(\alpha_n) \mathbf{f}_n, \quad (22)$$

де штрих біля знака суми означає, що нульовий член домножується на  $1/2$ .

Враховуючи, що  $\mathbf{f}_n = \int_0^a H(\xi, \alpha_n) \mathbf{f}(\xi) d\xi$ , отримаємо

$$\mathbf{y}(x) = \int_0^a \left[ \frac{2}{a} \sum_{n=0}^{\infty} ' H(x, \alpha_n) \mathbf{\Omega}_\beta^{-1}(\alpha_n) H(\xi, \alpha_n) \right] \mathbf{f}(\xi) d\xi = \int_0^a G(x, \xi) \mathbf{f}(\xi) d\xi.$$

Отже, матрицю-функцію Гріна побудовано у вигляді білінійного розв'язання. У [22] доведено, що матриця  $G(x, \xi)$ , визначена за цією схемою, є матрицею Гріна, відповідає теоремі про чотири основні ознаки функції-матриці Гріна [23] і задовольняє граничні умови (18):

$$U_0[G(x, \xi)] = 0, \quad U_1[G(x, \xi)] = 0.$$

Тут  $U_i$ ,  $i = 0, 1$ , – крайові функціонали, введені за правилом

$$U_0[\mathbf{y}(x)] = \alpha_n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{y}(0) - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{y}'(0),$$

$$U_1[\mathbf{y}(x)] = \alpha_n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{y}(a) - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{y}'(a).$$

Компоненти матриці-функції Гріна, підсумовані за формулами (1.445(1-2)) з [4], наведено у **Додатку 1**.

Остаточно розв'язок вихідної задачі (12) за допомогою матриці-функції Гріна запишемо як

$$\mathbf{y}_\beta(x) = \mathbf{Y}_1(x) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \mathbf{Y}_2(x) \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} + \int_0^a G_B(x, \xi) \mathbf{f}(\xi) d\xi,$$

де визначені  $c_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , наведено у **Додатку 2**.

Тоді компоненти отриманого вектора переміщення запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} u_\beta(x) = & Y_1^{11}(x)c_1 + Y_1^{12}(x)c_2 + Y_2^{11}(x)c_3 + Y_2^{12}(x)c_4 + \\ & + \frac{3-x}{x+1} \int_0^a G_B^{11}(x, \xi) \chi'(\xi) d\xi + \rho \int_0^a G_B^{11}(x, \xi) \frac{dT_\beta}{d\xi}(\xi) d\xi - \\ & - \beta \frac{x+1}{x-1} \int_0^a G_B^{12}(x, \xi) \chi(\xi) d\xi - \beta \rho \int_0^a G_B^{12}(x, \xi) T_\beta(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} v_\beta(x) = & Y_1^{21}(x)c_1 + Y_1^{22}(x)c_2 + Y_2^{21}(x)c_3 + Y_2^{22}(x)c_4 + \\ & + \frac{3-x}{x+1} \int_0^a G_B^{21}(x, \xi) \chi'(\xi) d\xi + \rho \int_0^a G_B^{21}(x, \xi) \frac{dT_\beta}{d\xi}(\xi) d\xi - \\ & - \beta \frac{x+1}{x-1} \int_0^a G_B^{22}(x, \xi) \chi(\xi) d\xi - \beta \rho \int_0^a G_B^{22}(x, \xi) T_\beta(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (24)$$

При реалізації граничних умов (1), (2) у співвідношенні (23) інтегральні доданки зникають. Інтегральні доданки у (24) зберігаються і після деяких перетворень остаточно у просторі трансформант отримаємо

$$\begin{aligned}
u_{\beta}(x) &= Y_1^{11}(x)c_1 + Y_1^{12}(x)c_2 + Y_2^{11}(x)c_3 + Y_2^{12}(x)c_4, \\
v_{\beta}(x) &= Y_1^{21}(x)c_1 + Y_1^{22}(x)c_2 + Y_2^{21}(x)c_3 + Y_2^{22}(x)c_4 + \\
&+ \frac{3-x}{x+1} \int_0^a G^{21}(x, \xi) \chi'(\xi) d\xi - \rho \int_0^a \frac{\partial G^{21}}{\partial \xi} T_{\beta}(\xi) d\xi + \\
&+ \beta \frac{x+1}{x-1} \int_0^a \mathfrak{I}^{22}(x, \xi) \chi'(\xi) d\xi - \beta \rho \int_0^a G^{22}(x, \xi) T_{\beta}(\xi) d\xi. \quad (25)
\end{aligned}$$

Тут  $\mathfrak{I}^{22}(x, \xi) = \int G^{22}(x, \xi) d\xi$ ,  $G^{i,j}(x, \xi)$  – елемент матриці Гріна, розміщений в  $i$ -й стрічці та  $j$ -му стовбці. Після застосування формул обернення формули для визначення переміщень у півсмузі запишемо так:

$$\begin{aligned}
u(x, y) &= \int_0^{\infty} \int_0^a [f_1(x, \xi, \beta) \chi'(\xi) + f_2(x, \xi, \beta) T_{\beta}(\xi)] \cos(\beta y) d\xi d\beta = \\
&= \int_0^{\infty} \int_0^a \left[ f_1(x, \xi, \beta) \chi'(\xi) + f_2(x, \xi, \beta) \times \right. \\
&\quad \left. \times \int_0^{\infty} T(\xi, \eta) \cos \beta \eta d\eta \right] \cos(\beta y) d\xi d\beta, \quad (26)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v(x, y) &= \int_0^{\infty} \int_0^a [g_1(x, \xi, \beta) \chi'(\xi) + g_2(x, \xi, \beta) T_{\beta}(\xi)] \sin(\beta y) d\xi d\beta = \\
&= \int_0^{\infty} \int_0^a \left[ g_1(x, \xi, \beta) \chi'(\xi) + g_2(x, \xi, \beta) \times \right. \\
&\quad \left. \times \int_0^{\infty} T(\xi, \eta) \cos \beta \eta d\eta \right] \sin(\beta y) d\xi d\beta, \quad (27)
\end{aligned}$$

де  $f_i(x, \xi, \beta)$ ,  $g_i(x, \xi, \beta)$ ,  $i = 1, 2$ , – відомі функції своїх аргументів.

**4.3. Розв'язок інтегрального рівняння.** Формули (26), (27) визначають переміщення остаточно через невідому функцію  $\chi'(\xi)$ . Для її знаходження використаємо першу з умов (10), яка залишилася поки що невиконаною. Задовольнити цю умову шляхом безпосередньої підстановки в неї співвідношень (26), (27) неможливо, оскільки інтеграли у виразах для переміщень є слабо збіжними. Тому спочатку потрібно виділити їх слабо збіжну частину. Для цього використаємо методику з [19]. Інтеграл  $\int_0^{\infty} a(x) dx$  розби-

ваємо на два доданки  $\int_0^{\infty} a(x) dx = \int_0^A a(x) dx + \int_A^{\infty} a(x) dx$ . У другому отриманому інтегралі підінтегральну функцію замінюємо асимптотичним зображенням при  $x \rightarrow \infty$ , після чого додаємо та віднімаємо доданок  $\int_0^A \tilde{a}(x) dx$ , де  $\tilde{a}(x)$  – асимптотичне зображення підінтегральної функції  $a(x)$ . Отже,

$$\int_0^{\infty} a(x) dx = \int_0^{\infty} \tilde{a}(x) dx + \left( \int_0^A a(x) dx - \int_0^A \tilde{a}(x) dx \right).$$

Невласний інтеграл, що входить у цю рівність, підсумовуємо за формулами (3.941(1), 3.944(11,12) з [4]).

Подальша підстановка формул переміщень (26), (27) у першу з крайових умов (10) приводить до сингулярного інтегрального рівняння

$$\int_0^1 \chi'(\xi) \left[ \frac{1}{\xi - x} + \varphi(\xi, x) \right] d\xi = r(x) - \int_0^1 \int_0^{\infty} T(\xi, \eta) \delta(\xi, \eta, x) d\eta d\xi, \quad 0 < x < 1, \quad (28)$$

де  $\varphi(\xi, x)$ ,  $\delta(\xi, \eta, x)$ ,  $r(ax)$  – відомі регулярні функції.

Інтегральне рівняння (28) розв'язуємо методом ортогональних поліномів [19]. Для цього функцію  $\chi'(\xi)$  розвинемо в ряд з урахуванням характеру особливості її поведінки на кінцях інтервалу інтегрування:

$$\chi'(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \xi^{\alpha} (1 - \xi)^{\beta} P_n^{\alpha, \beta} (1 - 2\xi), \quad (29)$$

де  $P_n^{\alpha, \beta}(x)$  – поліноми Якобі, параметри  $\alpha$ ,  $\beta$  визначаємо з [24]. Підставимо подання (29) у рівняння (28), поміняємо порядок підсумовування та інтегрування і використаємо спектральне співвідношення з [18]

$$\frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{y^{\alpha} (1 - y)^{\beta} P_n^{\alpha, \beta} (1 - 2y) dy}{x - y} = \operatorname{ctg}(\pi\alpha) x^{\alpha} (1 - x)^{\beta} P_n^{\alpha, \beta} (1 - 2x),$$

$$0 < x < 1.$$

Після реалізації стандартної схеми методу ортогональних поліномів отримаємо нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих сталих  $\tilde{c}_m$ :

$$\tilde{c}_m + \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{c}_n d_{mn} = f_m, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (30)$$

Розв'язавши систему (30) методом редукції (застосовність методу редукції доводиться за схемою з [19]), визначаємо сталі  $\tilde{c}_m$ . Підстановка співвідношення (29) у формули (26), (27) завершує побудову розв'язку вихідної задачі.

**5. Числові розрахунки** проведено для пружної півсмути з модулем зсуву  $G = 82.03125$  Гпа і коефіцієнтом Пуассона  $\mu = 0.28$  при значенні параметра  $a = 10$  м і коефіцієнта лінійного розширення  $\alpha_t = 1.1 \cdot 10^{-5}$ . Метою числового аналізу було виявити зони розтягувальних напружень на бічній грані  $x = a$ , де задано умови гладкого контакту. Величини нормальних напружень  $\sigma_x(a, y)/G$  уздовж грані  $x = a$  наведено на рис. 2, де криві 1–3 відповідають значенням заданої температури  $f_T(x) = 1, 5, 10$  °С при заданому механічному навантаженні  $p(x) = 1$  Гпа.

Як бачимо, збільшення температурного навантаження приводить до збільшення абсолютних значень напружень. Зі збільшенням температурного впливу розтягувальні напруження pojawiaються на бічній грані поблизу торця. Чим менший вплив температури, тим далі від торця спостерігаються зони додатних напружень.



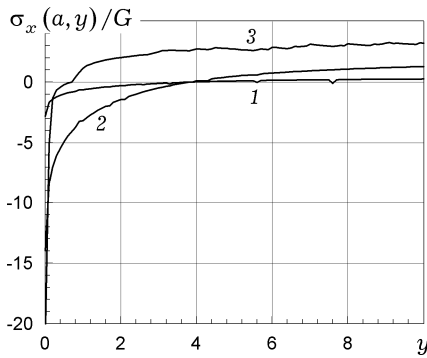


Рис. 2

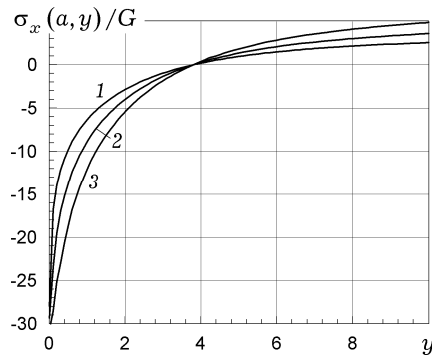


Рис. 3

Також досліджено, як зміна механічного навантаження при заданій температурі впливає на виникнення розтягувальних напружень. Криві 1–3 на рис. 3 відповідають значенням абсолютних напружень  $\sigma_x(a, y)/G$  для заданих значень механічного навантаження  $p(x) = 1, 5, 10$  ГПа при заданій температурі  $f_T(x) = 1$ .

З аналізу випливає, що зміна механічного навантаження значно менше впливає на зміну абсолютних величин напружень, ніж температурне навантаження. Крім того, бачимо, що розтягувальні напруження фіксуються у цих випадках на досить значній відстані від торця півсмуги, де прикладено навантаження.

**Висновки.** У роботі запропоновано нову методику розв’язування задачі для півсмуги, що базується на безпосередньому застосуванні методу інтегральних перетворень до рівнянь рівноваги Ляме, що дає змогу звести вихідну задачу до векторної одновимірної крайової задачі. Розв’язання задачі базується на використанні апаратів матричного диференціального числення та матриці-функції Гріна.

Проаналізовано вплив температури та механічних навантажень на умови та зони виникнення розтягувальних напружень на бічній грані півсмуги, де задано умови гладкого контакту. Встановлено, що збільшення температурного впливу приводить до виникнення зон розтягувальних напружень на цій грані поблизу торця півсмуги.

Запропонований підхід можна застосувати при розв’язанні змішаних задач термопружності для інших типів крайових умов на бічних гранях півсмуги.

#### Додаток 1. Поелементний запис матриці Гріна.

Підсумовані за формулами (1.445(1-2)) з [4] компоненти матриці Гріна мають такий вигляд:

$$G_{11}(x, \xi) = \frac{x \operatorname{ch}(\beta(\xi - a + x)) - x \operatorname{ch}(\beta(a - |\xi - x|))}{2\beta \operatorname{sh}(a\beta)(x - 1)} - \frac{1}{2(\operatorname{sh}(a\beta))^2(x - 1)} \times$$

$$\times [\operatorname{sh}(a\beta)(\xi \operatorname{sh}(\beta(\xi - a + x)) + x \operatorname{sh}(\beta(\xi - a + x)) -$$

$$- a \operatorname{sh}(\beta(\xi - a + x)) - (a - |\xi - x|)a \operatorname{sh}(\beta(a - |\xi - x|))) -$$

$$- a \operatorname{ch}(a\beta)(\operatorname{ch}(\beta(\xi - a + x)) - \operatorname{ch}(\beta(a - |\xi - x|)))],$$

$$G_{12}(x, \xi) = \frac{1}{2\operatorname{sh}(a\beta)(x + 1)} \left[ - \frac{a \operatorname{ch}(a\beta)}{((\operatorname{ch}(a\beta))^2 - 1)(x + 1)} (\operatorname{sh}(\beta(\xi - a + x)) -$$

$$- \operatorname{sgn}(x - \xi) \operatorname{sh}(\beta(a - |\xi - x|))) + (\operatorname{ch}(\beta(\xi - a + x))(\xi - a + x) -$$

$$- \operatorname{sgn}(x - \xi) \operatorname{ch}(\beta(a - |\xi - x|))(a - |\xi - x|)) \right],$$

$$G_{21}(x, \xi) = \frac{1}{2\operatorname{sh}(a\beta)(x-1)} \left[ -\frac{a\operatorname{ch}(a\beta)}{((\operatorname{ch}(a\beta))^2 - 1)(x-1)} (\operatorname{sh}(\beta(\xi - a + x)) + \operatorname{sgn}(x - \xi)\operatorname{sh}(\beta(a - |\xi - x|))) + (\operatorname{ch}(\beta(\xi - a + x))(\xi - a + x) + \operatorname{sgn}(x - \xi)\operatorname{ch}(\beta(a - |\xi - x|))(a - |\xi - x|)) \right],$$

$$G_{22}(x, \xi) = -\frac{\operatorname{ch}(\beta(\xi - a + x)) + \operatorname{ch}(\beta(a - |\xi - x|))}{2\beta\operatorname{sh}(a\beta)} + \frac{1}{2\beta(\operatorname{sh}(a\beta))^2(x+1)} \left[ \operatorname{sh}(a\beta)(\operatorname{ch}(\beta(\xi - a + x)) + \operatorname{ch}(\beta(a - |\xi - x|))) + \beta((a - x - \xi)\operatorname{sh}(\beta(\xi - a + x)) - (a - |\xi - x|)\operatorname{sh}(\beta(a - |\xi - x|))) + a\beta\operatorname{ch}(a\beta)(\operatorname{ch}(\beta(\xi - a + x)) + \operatorname{ch}(\beta(a - |\xi - x|))) \right].$$

**Додаток 2. Знаходження коефіцієнтів  $c_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ .**

Для знаходження коефіцієнтів  $c_i$  запишемо граничні умови в (11), задані на гранях  $x = 0$  і  $x = a$ , у матричному вигляді

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_\beta(0) \\ v_\beta(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_\beta(a) \\ v'_\beta(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді отримуємо таку матричну систему:

$$Y_1(0) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + Y_2(0) \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = -\mathbf{y}_\beta(0),$$

$$\left( Y_1(a) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + Y_2(a) \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} \right)_1 = -u_\beta(a),$$

$$\left( Y_1'(a) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + Y_2'(a) \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} \right)_2 = -v'_\beta(a).$$

Оскільки визначник цієї системи відмінний від нуля, то розв'язки  $Y_1(x)$ ,  $Y_2(x)$  є лінійно незалежними, і розв'язок системи визначається однозначно.

1. Вайсфельд Н. Д., Попов Г. Я., Реут А. В. Осесимметричная задача о напряженном состоянии дважды усеченного конуса // Мат. методы та фіз.-мех. поля. – 2013. – **56**, № 1. – С. 185–196.  
The same: Vaisfel'd N. D., Popov G. Ya., Reut A. V. Axisymmetric problem of stressed state for a twice truncated cone // J. Math. Sci. – 2014. – **201**, No. 2. – P. 229–244.
2. Веремейчик А. И., Гарбачевский В. В., Хвисевич В. М. К решению плоских краевых задач термоупругости неоднородных тел методом потенциала // Теорет. и прикл. механика: междунар. науч.-техн. журн. – 2015. – Вып. 30. – С. 184–189.
3. Габрусев Г. Задача термоупругости для трансверсально изотропного шару з коловими лініями розділу граничних умов на його поверхні // Вісн. Терноп. нац. техн. ун-ту. – 2014. – **73**, № 1. – С. 57–67.
4. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – Москва: Физматгиз, 1963. – 1100 с.
5. Денисова Т. В., Проценко В. С., Бузько Я. П. Задача стационарной теплопроводности для полуполосы с круговым отверстием // Открытые информ. и компьютер. интегрированные технологии. – 2009. – № 42. – С. 159–163.

6. Кеч В., Теодореску П. Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. – Москва: Мир, 1978. – 520 с.
7. Кит Г. С., Кривцун М. Г. Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1983. – 278 с.
8. Кит Г. С., Мартиняк Р. М. Термопружність структур з теплопровідними тріщинами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – **46**, № 1. – С. 11–20.
9. Колосов Г. В. Применение комплексной переменной к теории упругости. – Ленинград–Москва: ОНТИ, 1935. – 224 с.
10. Колчин Г. Б., Плят Ш. Н., Шейнкер Н. Я. Некоторые задачи термоупругости для прямоугольных областей. – Кишинев: Штиинца, 1980. – 106 с.
11. Коляно Ю. М., Затварская Л. М. Метод продолжения функций в задаче термоупругости для полуполосы // Изв. вузов. Математика. – 1987. – № 8. – С. 84–86.  
Те саме: *Kolyano Yu. M., Zatvarskaya L. M.* The method of continuation of functions in a problem of thermoelasticity for a semistrip // *Soviet Math.* – 1987. – **31**, No. 8. – P. 109–111.
12. Кушнір Р. М., Николішин М. М., Жидик У. В., Флячок В. М. Моделювання термопружних процесів в неоднорідних анізотропних оболонках з початковими деформаціями // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – **53**, № 2. – С. 122–136.  
Те саме: *Kushnir R. M., Nykolishyn M. M., Zhydyk U. V., Flyachok V. M.* Modeling of thermoelastic processes in heterogeneous anisotropic shells with initial deformations // *J. Math. Sci.* – 2011. – **178**, No. 5. – P. 512–530.
13. Кушнір Р. М., Николішин М. М., Жидик У. В., Флячок В. М. Термомеханічна модель неоднорідних анізотропних оболонок з початковими деформаціями // Доп. НАН України. – 2010. – № 11. – С. 45–50.
14. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – Москва: Наука, 1966. – 708 с.  
Те саме: *Muskhelishvili N. I.* Some basic problems of the mathematical theory of elasticity. – Nordhoff, Gröningen: Springer, 1977. – xxxi+732 p.
15. Новацкий В. Теория упругости. – Москва: Мир, 1975. – 872 с.  
То же: *Nowacki W.* Thermoelasticity. – Oxford: Pergamon Press, 1962. – 628 p.
16. Новозhilov В. В. Теория упругости. – Ленинград: Судпромгиз, 1958. – 374 с.  
Те саме: *Novozhilov V. V.* Theory of elasticity. – Oxford: Pergamon Press, 1961. – xii+448 p.
17. Папкович П. Ф. Теория упругости. – Ленинград–Москва: Оборонгиз, 1939. – 640 с.
18. Попов Г. Я. Избранные труды: В 2 т. – Одесса: Изд.-полиграф. дом ВМВ, 2007. – Т. 1. – 440 с.
19. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. – Москва: Наука, 1982. – 342 с.
20. Попов Г. Я. О новых преобразованиях разрешающих уравнений теории упругости и новых интегральных преобразованиях и об их применении к краевым задачам механики // Прикл. механика. – 2003. – **39**, № 12. – С. 46–73.  
Те саме: *Popov G. Ya.* New transforms for the resolving equations in elastic theory and new integral transforms, with applications to boundary-value problems of mechanics // *Int. Appl. Mech.* – 2003. – **39**, No. 12. – P. 1400–1424.
21. Попов Г. Я. Точные решения некоторых краевых задач механики деформируемого твёрдого тела. – Одесса: Астропринт, 2013. – 421 с.
22. Попов Г. Я., Абдыманов С. А., Ефимов В. В. Функции и матрицы Грина одномерных краевых задач. – Алматы: Рауан, 1999. – 113 с.
23. Попов Г. Я., Реут В. В., Вайсфельд Н. Д. Рівняння математичної фізики. Метод інтегральних перетворень: Навч. посібник. – Одеса: Астропринт, 2005. – 185 с.
24. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Ленинград: Наука, 1968. – 402 с.
25. Фильштинский Л. А., Бондарь А. В. Задача связанной термоупругости для полуслоя с туннельной полостью (кососимметричный случай) // Прикл. механика. – 2008. – **44**, № 10. – С. 28–36.  
Те саме: *Fil'shtinskii L. A., Bondar A. V.* Problem of coupled thermoelasticity for a half-layer with a tunnel cavity: an antisymmetric case // *Int. Appl. Mech.* – 2008. – **44**, No. 10. – P. 1098–1105.
26. Шамровский А. Д., Меркотан Г. В. Динамическая задача обобщённой термоупругости для изотропного полупространства // Вост.-Европ. журн. передовых технологий. – 2011. – **3**, № 7(51). – С. 56–59.

27. *Abou-Dina M. S., Ghaleb A. F.* On the boundary integral formulation of the plane theory of thermoelasticity (analytical aspects) // *J. Therm. Stresses.* – 2002. – **25**, No. 1. – P. 1–29.
28. *Melnik R. V. N.* Discrete models of coupled dynamic thermoelasticity for stress-temperature formulations // *Appl. Math. Comput.* – 1999. – **122**, No. 1. – P. 107–132.
29. *Teodorescu P. P.* Probleme plane în teoria elasticității. – Vol. I. – București: Editura Academiei Republicii Populare Romane, 1960.– 989 p.; – Vol. II. – București: Editura Academiei Republicii Socialiste România, 1966. – 669 p.
30. *Tokovyy Yu., Chien-Ching Ma.* An explicit-form solution to the plane elasticity and thermoelasticity problems for anisotropic and inhomogeneous solids // *Int. J. Solids Struct.* – 2009. – **46**, No. 21. – P. 3850–3859.
31. *Xia R., Guo Ya., Li W.* Study on generalized thermoelastic problem of semi-infinite plate heated locally by the pulse laser // *Int. J. Eng. Pract. Res.* – 2014. – **3**, No. 4. – P. 95–99.

#### ПЛОСКАЯ СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУПОЛОСЫ

*Исследовано напряженное состояние полуполосы, на одной боковой грани которой заданы условия гладкого контакта, на другой – условия сцепления, при воздействии на торце внешней нормальной нагрузки и температуры. С помощью метода интегральных преобразований исходная задача сведена в одномерную векторную краевую задачу. Путем применения аппаратов матричного дифференциального исчисления и матрицы-функции Грина полученная задача сведена к сингулярному интегральному уравнению относительно производной от перемещений на торце полуполосы, которое решено методом ортогональных многочленов. Проведен численный анализ полей перемещений и напряжений внутри полуполосы, установлены зоны растягивающих напряжений на боковой грани полуполосы и условия их возникновения.*

#### THE PLANE MIXED THERMOELASTICITY PROBLEM FOR THE SEMI-STRIP

*The stress state in the semi-strip under the action of external normal loading and temperature applied to its short edge is studied in the case when smooth contact conditions are given on one lateral side of the semi-strip and coupling conditions on the other. With the help of the method of integral transforms the original problem is reduced to a one-dimensional vector boundary value problem. By using the apparatus of the matrix differential calculus and Green's matrix function resulting problem is reduced to a singular integral equation with respect to the derivative of the displacement at the end of the semi-strip, which is solved by the method of orthogonal polynomials. The numerical analysis of the stress and displacement fields in the semi-strip is performed, the zones of tensile stresses on the lateral side of the semi-strip and the conditions of their occurrence are determined.*

Одеськ. нац. ун-т ім. І. І. Мечнікова, Одеса

Одержано  
27.02.15