

НАБЛИЖЕНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ОДНОВИМІРНОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ НЕОДНОРІДНОГО СУЦІЛЬНОГО ЦИЛІНДРА

При розв'язанні одновимірної задачі теорії пружності для радіально-неоднорідного суцільного циліндра використано метод зведення до інтегрального рівняння Вольтерра. На основі оцінки похибки виконання ключового інтегрального рівняння встановлено критерій точності наближеного розв'язку задачі.

Вступ. Розв'язання задач теорії пружності й термопружності для неперервно-неоднорідних тіл вимагає розробки нових методів, ефективних у застосуванні для довільних залежностей властивостей матеріалу від координат [6]. Один із підходів, запропонований В. М. Віаком [2], передбачає зведення таких задач до розв'язання інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду з інтегральними умовами шляхом безпосереднього інтегрування їх диференціальних рівнянь. Стосовно одновимірних задач теорії пружності й термопружності для радіально-неоднорідних циліндричних тіл цей підхід розвинуто у роботах [3, 5], де для розв'язання отриманого інтегрального рівняння з відповідною умовою використано метод послідовних наближень. У працях [4, 8] для побудови наближеного розв'язку ключового рівняння і наближеного задоволення крайових умов застосовували покращений метод квадратур, у праці [7] – метод поліномів Лежандра та інші наближені підходи [10].

У праці [9] запропоновано будувати розв'язок ключового інтегрального рівняння Вольтерра одновимірної задачі теорії пружності й термопружності для радіально-неоднорідного порожнистого циліндра за допомогою методу резольвенти [1], яку подано у вигляді безмежного ряду ітерованих ядер, отриманих на основі рекурентних співвідношень, починаючи з ядра вихідного інтегрального рівняння. Для практичних обчислень рекомендовано використовувати наближену формулу для резольвенти, у якій нескінченний ряд замінено скінченною сумою перших N ітерованих ядер. Величину параметра N визначали на основі оцінки різниці числових значень розв'язків рівняння з резольвентами у вигляді суми N та $N + 1$ складових відповідно. При цьому точність виконання вихідного рівняння не контролювалася.

У цій роботі метод безпосереднього інтегрування [2] застосовано до побудови розв'язку одновимірної задачі теорії пружності для радіально-неоднорідного суцільного циліндра. Для відшукування розв'язку отриманого ключового інтегрального рівняння Вольтерра використано метод резольвенти. На основі оцінки точності виконання ключового інтегрального рівняння встановлено апріорну оцінку точності розв'язку, що дає змогу визначити потрібну кількість N ітерованих ядер у виразі для резольвенти без обчислення напружень для кожного значення N .

1. Зведення одновимірної задачі теорії пружності для радіально-неоднорідного циліндра до інтегрального рівняння Вольтерра. Розглянемо плоску осесиметричну задачу теорії пружності для суцільного циліндра радіуса R_0 , пружні характеристики якого (коефіцієнт Пуассона ν та модуль зсуву G) змінюються довільним чином уздовж радіуса. Подамо залежність модуля зсуву від координати у вигляді $G(\rho) = G_0 g(\rho)$, де G_0 – деяке стале значення модуля зсуву, а $g(\rho)$ – довільна задана функція. Вважаємо, що напружений стан циліндра спричинений нормальним зовнішнім тиском $-p$, рівномірно розподіленим по поверхні циліндра $\rho = k$, де $\rho = r/r_0$, $k = R_0/r_0$,

r – розмірна радіальна координата, η_0 – характерний радіус. Використавши метод безпосереднього інтегрування [2], побудову розв’язку такої задачі за відсутності масових сил зводимо до розв’язання інтегрального рівняння Вольтерра другого роду

$$\sigma(\rho) = A \frac{G(\rho)}{1 - \nu(\rho)} + \int_0^\rho \sigma(\eta) \mathcal{K}(\rho, \eta) d\eta, \quad (1)$$

де

$$\mathcal{K}(\rho, \eta) = \frac{g(\rho)}{1 - \nu(\rho)} \eta \int_\eta^\rho \frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{1}{g(\xi)} \right) d\xi, \quad \eta \leq \rho, \quad (2)$$

$\mathcal{K}(\rho, \eta)$ – ядро інтегрального рівняння (1), яке виражається через пружні характеристики матеріалу;

$$\sigma = \sigma_r + \sigma_\varphi, \quad (3)$$

σ – сумарні напруження; σ_r , σ_φ – відповідно радіальні та колові напруження; A – стала, яку визначаємо із заданої крайової умови

$$\sigma_r(k) = -p. \quad (4)$$

Радіальні напруження виражаємо через сумарні за формулою

$$\rho^2 \sigma_r(\rho) = \int_0^\rho \eta \sigma(\eta) d\eta, \quad (5)$$

з якої при $\rho = k$ з урахуванням (4) випливає інтегральна умова

$$\int_0^k \rho \sigma(\rho) d\rho = -k^2 p. \quad (6)$$

Таким чином, визначення напружень здійснюємо на основі розв’язання рівняння (1), де сталу A знайдемо з інтегральної умови (6). Знайшовши сумарні напруження, радіальні напруження знаходимо на основі виразу (5), а колові – за формулою (3).

2. Розв’язок інтегрального рівняння з використанням резольвенти.

Для побудови розв’язку рівняння (1) з умовою (6) використаємо метод резольвенти. За такого підходу розв’язок задачі (1), (6) шукаємо у вигляді

$$\sigma(\rho) = A\varphi(\rho), \quad (7)$$

де

$$A = -\frac{k^2 p}{a}, \quad \varphi(\rho) = G_0 \left(\frac{g(\rho)}{1 - \nu(\rho)} + \int_0^\rho \frac{g(\eta)}{1 - \nu(\eta)} R(\rho, \eta) d\eta \right),$$

$$a = \int_0^k \rho \varphi(\rho) d\rho, \quad (8)$$

а резольвента $R(\rho, \eta)$ має вигляд ряду ітерованих ядер [1]:

$$R(\rho, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} R_{n+1}(\rho, \eta), \quad \eta \leq \rho, \quad (9)$$

які визначаємо за формулами

$$R_1(\rho, \eta) = K(\rho, \eta), \quad R_{n+1}(\rho, \eta) = \int_\eta^\rho R_1(\rho, t) R_n(t, \eta) dt. \quad (10)$$

Зауважимо, що резольвента (9) не залежить від зовнішнього навантаження, а виражається лише через функції, які задають залежність властивостей матеріалу від радіальної координати.

На основі формул (5), (7) знаходимо вираз для радіальних напружень

$$\sigma_r(\rho) = \frac{A}{\rho^2} \int_0^\rho \eta \varphi(\eta) d\eta. \quad (11)$$

Тоді з використанням (3), (7), (11) знаходимо колові напруження

$$\sigma_\varphi(\rho) = A \left(\varphi(\rho) - \frac{1}{\rho^2} \int_0^\rho \eta \varphi(\eta) d\eta \right).$$

Нескладно перекоонатися, що отримані у такий спосіб сумарні напруження (7) тотожно задовольняють інтегральну умову (6), що забезпечує виконання радіальними напруженнями (11) заданої крайової умови (4).

Безпосередня підстановка формул (7), (8) в (1) дає наступну рівність:

$$\int_0^\rho \frac{G_0 g(\eta)}{1 - \nu(\eta)} (R(\rho, \eta) - \mathcal{K}(\rho, \eta)) d\eta - \int_0^\rho \int_0^\xi \frac{G_0 g(\eta)}{1 - \nu(\eta)} R(\xi, \eta) \mathcal{K}(\rho, \xi) d\eta d\xi = 0.$$

Змінивши порядок інтегрування в подвійному інтегралі, отримане рівняння зводимо до вигляду

$$G_0 \int_0^\rho \frac{g(\eta)}{1 - \nu(\eta)} \left(R(\rho, \eta) - \mathcal{K}(\rho, \eta) - \int_\eta^\rho \mathcal{K}(\rho, \xi) R(\xi, \eta) d\xi \right) d\eta = 0. \quad (12)$$

На основі формул (9), (10) нескладно встановити рівність

$$\int_\eta^\rho \mathcal{K}(\rho, \xi) R(\xi, \eta) d\xi = R(\rho, \eta) - \mathcal{K}(\rho, \eta), \quad (13)$$

із використанням якої (12) перетворюється у тотожність.

Таким чином, вираз (7) для сумарних напружень тотожно задовольняє рівняння (1) та умову (6), якщо вираз для резольвенти вибрано у вигляді безмежного ряду (9). Однак для практичних обчислень використовують наближену формулу для резольвенти

$$R(\rho, \eta) \approx R^{\{N\}}(\rho, \eta) = \sum_{n=0}^N R_{n+1}(\rho, \eta), \quad (14)$$

яка виконується внаслідок монотонного згасання ітерованих ядер (10) зі збільшенням індексу [1]. Використання наближеної формули (14) замість точної (9) у виразі (7) забезпечує точне виконання умови (6), однак рівняння (1) з огляду на порушення рівності (13) задовольняється наближено. У цьому випадку ліва сторона рівняння (1), аналогічно до (12), має вигляд

$$F^{\{N\}}(\rho) \equiv G_0 \int_0^\rho \frac{g(\eta)}{1 - \nu(\eta)} \left(R^{\{N\}}(\rho, \eta) - \mathcal{K}(\rho, \eta) - \int_\eta^\rho \mathcal{K}(\rho, \xi) R^{\{N\}}(\xi, \eta) d\xi \right) d\eta. \quad (15)$$

Із формул (10), (14) випливає рівність

$$\int_\eta^\rho \mathcal{K}(\rho, \xi) R^{\{N\}}(\xi, \eta) d\xi = R^{\{N\}}(\rho, \eta) - \mathcal{K}(\rho, \eta) + R_{N+2}(\rho, \eta),$$

з урахуванням якої вираз (15) запишемо так:

$$F^{\{N\}}(\rho) = -G_0 \int_0^\rho \frac{g(\eta)}{1 - \nu(\eta)} R_{N+2}(\rho, \eta) d\eta. \quad (16)$$

Таким чином, точність задоволення рівняння (1) визначається близькістю величини $|F^{\{N\}}(\rho)|$ до нуля для кожного $\rho \in [0, k]$. Отже, якщо за деякого значення N досягається нерівність

$$|R_{N+2}(\rho, \eta)| \leq \varepsilon_R, \quad \rho \in [0, k], \quad \eta \leq \rho, \quad (17)$$

де ε_R – мале дійсне число, то на основі (16), (17) маємо оцінку

$$|F^{\{N\}}(\rho)| \leq G_0 \omega_{\max} \varepsilon_R \leq \frac{G_0 g_{\max}}{1 - v_{\max}} k \varepsilon_R, \quad \rho \in [0, k], \quad (18)$$

де g_{\max} , v_{\max} та ω_{\max} – максимальні значення на відрізку $[0, k]$ функцій

$g(\rho)$, $v(\rho)$ та $\int_0^\rho \frac{g(\eta)}{1 - v(\eta)} d\eta$ відповідно. Формула (18) може слугувати критерієм вибору N , за якого досягається потрібна точність виконання рівняння (1). Так, якщо проміжну частину нерівності (18) позначити через ε , то значення N слід вибрати таким, щоб задовольнялася нерівність (17), де

$$\varepsilon_R = \frac{\varepsilon}{G_0 \omega_{\max}}, \quad (19)$$

або ж, якщо використати більш грубий, але простіший для обчислення вираз, то на основі правої частини нерівності (18) маємо

$$\varepsilon_R = \frac{1 - v_{\max}}{G_0 k g_{\max}} \varepsilon. \quad (20)$$

Таким чином, щоб за використання наближеної формули (14) вираз (7) задовольняв рівняння (1) з похибкою, що не перевищує задану величину ε , достатньо забезпечити виконання нерівності (17), де ε_R має вигляд (19) або (20). Отже, для знаходження потрібного значення N достатньо отримати вираз для ітерованого ядра $R_{N+2}(\rho, \eta)$ за формулами (10).

Визначення шуканого N спрощується у випадку, якщо підінтегральна функція $\frac{1}{\rho^2} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{1}{g(\rho)} \right)$ у рівності (2) є обмеженою на відрізку $[0, k]$. Тоді на основі формул (2), (10) встановлюємо оцінку

$$R_{N+2}(\rho, \eta) \leq \left(\frac{\mu_0 g_{\max}}{1 - v_{\max}} \right)^{N+2} \eta^{\rho^{N+1}} \frac{(\rho - \eta)^{2N+3}}{(2N + 2)!}. \quad (21)$$

Тут $\mu_0 = \max_{\rho \in [0, k]} \frac{1}{\rho^2} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{1}{g(\rho)} \right)$, $(2N + 2)! = 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2N \cdot (2N + 2)$. Використавши (21), на основі (16) отримаємо

$$|F^{\{N\}}(\rho)| \leq G_0 \frac{|\mu_0|^{N+2}}{2} \left(\frac{g_{\max}}{1 - v_{\max}} \right)^{N+3} \frac{k^{3N+6}}{(2N + 2)!}. \quad (22)$$

Таким чином, для досягнення точності задоволення рівняння (1) з похибкою ε , слід знайти значення N , за якого виконується нерівність

$$\frac{|\mu_0|^{N+2} k^{3N+6}}{(2N + 2)!} \left(\frac{g_{\max}}{1 - v_{\max}} \right)^{N+3} \leq \frac{2\varepsilon}{G_0}.$$

З виразу (22) також випливає, що при зростанні параметра N мажоранта функції $|F^{\{N\}}(\rho)|$ прямує до нуля, що обґрунтовує застосовність наближеної формули (14).

3. Приклади числового розрахунку. Розглянемо випадок, коли функція, якою задаємо залежність модуля зсуву від радіальної координати, має вигляд $g(\rho) = 1 + \rho^3$, а $v(\rho) \equiv v_{\max} = 0.3$. У цьому випадку маємо

$g_{\max} = 1 + k^3$, $\omega_{\max} = \frac{k(4 + k^3)}{4(1 - v_{\max})}$. Знайдемо наближений розв'язок (7), який

відхиляється від точного розв'язку рівняння (1) у кожній точці відрізка $[0, k]$ не більше, ніж на $\varepsilon = 10^{-3} G_0$. Приймавши для визначеності $k = 1$, на основі формули (19) отримуємо значення $\varepsilon_R = 5.60 \cdot 10^{-4}$. За цією величи-

ною із нерівності (17), використовуючи формулу (10), знаходимо значення параметра N , яке забезпечує потрібну точність обчислення розв'язку.

Таблиця 1

N	$\max_{\substack{\rho \in [0,k] \\ \eta \leq \rho}} R_{N+2} $	$\max_{\rho \in [0,k]} F^{\{N\}} /G_0$	$\omega_{\max} \max_{\substack{\rho \in [0,k] \\ \eta \leq \rho}} R_{N+2} $	$\frac{kg_{\max}}{1 - v_{\max}} \max_{\substack{\rho \in [0,k] \\ \eta \leq \rho}} R_{N+2} $
0	$1.76 \cdot 10^{-1}$	$1.20 \cdot 10^{-1}$	$3.29 \cdot 10^{-1}$	$5.02 \cdot 10^{-1}$
1	$9.94 \cdot 10^{-3}$	$5.31 \cdot 10^{-3}$	$1.86 \cdot 10^{-2}$	$2.84 \cdot 10^{-2}$
2	$2.92 \cdot 10^{-4}$	$1.31 \cdot 10^{-4}$	$5.48 \cdot 10^{-4}$	$8.34 \cdot 10^{-4}$
3	$5.20 \cdot 10^{-6}$	$1.95 \cdot 10^{-6}$	$9.75 \cdot 10^{-6}$	$1.49 \cdot 10^{-5}$

З аналізу результатів обчислень, наведених у табл. 1, переконуємося, що потрібна точність розв'язку досягається при $N = 2$ у формулі (14). Максимальні абсолютні значення відповідних ітерованих ядер $\max_{\rho \in [0,k], \eta \leq \rho} |R_{N+2}|$ обчислено за формулами (10), максимальні значення $\max_{\rho \in [0,k]} |F^{\{N\}}(\rho)|/G_0$ для кожного N є меншими ніж відповідні значення $\omega_{\max} \max_{\rho \in [0,k], \eta \leq \rho} |R_{N+2}|$, які, у свою чергу, є

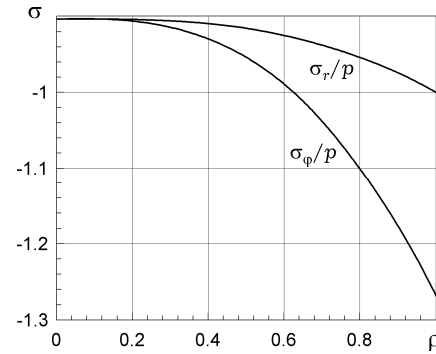


Рис. 1

меншими ніж $\frac{kg_{\max}}{1 - v_{\max}} \max_{\rho \in [0,k], \eta \leq \rho} |R_{N+2}|$, що

підтверджує справедливість нерівності (18).

Розподіл радіальних і колових напружень, обчислених за формулами (7), (9), (10), (11), (16) при $N = 2$, наведено на рис. 1. На відміну від однорідного матеріалу, напруження не є сталими, а змінюються уздовж радіуса, причому радіальні напруження точно задовольняють умову (12). Різниця між сумарними напруженнями, розрахованими за формулами (7), (9),

Таблиця 2

N	$\max_{\substack{\rho \in [0,k] \\ \eta \leq \rho}} R_{N+2} $	$\max_{\rho \in [0,k]} F^{\{N\}} /G_0$	$\omega_{\max} \max_{\substack{\rho \in [0,k] \\ \eta \leq \rho}} R_{N+2} $
0	1.17	$2.09 \cdot 10^{-1}$	2.51
1	$1.92 \cdot 10^{-1}$	$1.77 \cdot 10^{-2}$	$4.11 \cdot 10^{-1}$
2	$1.64 \cdot 10^{-2}$	$2.22 \cdot 10^{-3}$	$3.51 \cdot 10^{-2}$
3	$3.86 \cdot 10^{-4}$	$1.27 \cdot 10^{-4}$	$1.68 \cdot 10^{-3}$

(16) для $N = 2$ та $N = 3$, не перевищує ε .

Розглянемо випадок, коли підінтегральна функція в (2) необмежена. Нехай $g(\rho) = 1 + \rho$, а коефіцієнт Пуассона є таким же, як у попередньому прикладі. Ставимо завдання виконання рівняння (1) з точністю $\varepsilon = 10^{-3} G_0$. Тоді, використавши (19), знаходимо $\varepsilon_R = 4.67 \cdot 10^{-4}$. Незважаючи на необмеженість підінтегральної функції $\frac{1}{\rho^2} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{1}{g(\rho)} \right)$ повторні ядра R_{N+2} , починаючи з $N = 0$, виявляються обмеженими. У табл. 2 наведено результати, аналогічні до наведених у табл. 1. Як бачимо, у цьому випадку потрібна точність розв'язку досягається при $N = 3$ у формулі (14).

Висновки. У роботі наведено критерій оцінки точності задоволення ключового інтегрального рівняння Вольтерра другого роду, до якого зводиться розв'язання одновимірної задачі теорії пружності для радіально-не-

однорідного циліндра, за використання резольвентного розв'язку із наближеною формулою для резольвенти. Використання встановленого критерію дає змогу визначити кількість повторних ядер N , які слід враховувати у виразі для резольвенти, для досягнення певної точності задоволення вихідного рівняння, оминаючи розрахунок напружень для кожного вибраного значення N .

1. Верлань А. Ф., Сизиков В. С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы: Справ. пособие. – Киев: Наук. думка, 1986. – 544 с.
2. Вігак В. М. Розв'язування одновимірних задач пружності й термопружності в напруженнях для циліндра // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 1997. – **40**, № 3. – С. 103–107.
Те саме: *Vigak V. M. Solution of one-dimensional problems of elasticity and thermoelasticity in stresses for a cylinder // J. Math. Sci.* – 1999. – **96**, No. 1. – P. 2887–2891.
3. Вігак В. М., Калиняк Б. М. Зведення одновимірних задач пружності та термопружності для неоднорідних і термочутливих тіл до інтегральних рівнянь другого роду // *Доп. НАН України.* – 1998. – № 11. – С. 60–67.
4. Калиняк Б. М. Аналітичні вирази для напружень і термонапружень у довгому порожнистому неоднорідному термочутливому циліндрі // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2007. – **50**, № 2. – С. 79–86.
5. Калиняк Б. М. Інтегрування рівнянь одновимірних задач пружності та термопружності для неоднорідних циліндричних тіл // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 1998. – **41**, № 2. – С. 124–131.
Те саме: *Kalynyak B. M. Integration of equations of one-dimensional problems of elasticity and thermoelasticity for inhomogeneous cylindrical bodies // J. Math. Sci.* – 2000. – **99**, No. 5. – P. 1662–1670.
6. Колчин Г. Б. Расчет элементов конструкций из упругих неоднородных материалов. – Кишинев: Картя Молдовеняскэ, 1971. – 172 с.
7. Li X.-F., Peng X.-L. A pressurized functionally graded hollow cylinder with arbitrarily varying material properties // *J. Elasticity.* – 2009. – **96**, No. 1. – P. 81–95.
8. Peng X. L., Li X. F. Thermoelastic analysis of a cylindrical vessel of functionally graded materials // *Int. J. Pres. Ves. Pip.* – 2010. – **87**, No. 5. – P. 203–210.
9. Tokovyy Y. V., Ma C.-C. Thermal stresses in anisotropic and radially inhomogeneous annular domains // *J. Therm. Stresses.* – 2008. – **31**, No. 9. – P. 892–913.
10. Tokovyy Y., Ma C.-C. Steady-state heat transfer and thermo-elastic analysis of inhomogeneous semi-infinite solids // In: *Heat conduction – Basic research / V. S. Vikhrenko (ed.). – Rijeka: InTech (Croatia), 2011. – 350 p. – (Chap. 11. – P. 249–268. <http://www.intechopen.com/books/show/title/heat-conduction-basic-research>.*

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО СПЛОШНОГО ЦИЛИНДРА

При построении решения одномерной задачи теории упругости для радиально-неоднородного сплошного цилиндра использован метод сведения к интегральному уравнению Вольтерра. На основании оценки погрешности удовлетворения ключевого интегрального уравнения установлен критерий точности приближенного решения задачи.

AN APPROXIMATE SOLUTION TO THE ONE-DIMENSIONAL PROBLEM OF ELASTICITY FOR A NON-HOMOGENEOUS SOLID CYLINDER

The method of reduction to the Volterra integral equation is used for solution of the one-dimensional problem of elasticity for a radially non-homogeneous solid cylinder. A criterion of accuracy of the approximate solution of the problem is formulated on the basis of the error estimating the satisfaction of the governing integral equation.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
14.07.14