

ВИБРАНІ ПРОБЛЕМИ МЕХАНІКИ ЗВ'ЯЗАНИХ ПОЛІВ

Наведено короткий аналіз досліджень, виконаних в останні роки у Львівській науковій школі з механіки зв'язаних полів, з проблем побудови та узагальнення математичних моделей і методів опису, визначення та оптимізації термомеханічної поведінки тіл за комплексної дії силових, теплових та електромагнітних навантажень.

Вивчення взаємозв'язаних процесів механічної і немеханічної природи в деформівних твердих тілах призвело до формування нового напрямку в механіці деформівного твердого тіла – механіки зв'язаних полів. Цей напрямок тісно пов'язаний з математичними проблемами механіки і охоплює побудову відповідних математичних моделей, які достатньо адекватно описують поведінку механічних систем з урахуванням взаємовпливу розглянутих процесів різної фізичної природи, розробку математичних методів дослідження запропонованих математичних моделей і вивчення на їх основі особливостей такої механічної поведінки. Його інтенсивний розвиток розпочався всередині минулого століття у різних відомих світових наукових школах з механіки, зокрема очолюваних С. А. Амбарцумяном, А. Д. Коваленком, В. Новацьким, В. З. Партоном, Л. І. Седовим, А. С. Eringen, G. A. Maugin, F. C. Moon, H. Parkus та ін. Розробки в окресленому напрямі відносяться до основних наукових напрямків Інституту прикладних проблем механіки і математики (ІППММ) НАН України з часу його створення і завжди були в центрі уваги Я. С. Підстригача та його колег і учнів, зокрема Я. Й. Бурака, Ю. М. Коляна та ін. [12, 18, 35, 49, 53, 74, 92-95 та ін.]

В Інституті проведено ґрунтовні фундаментальні дослідження з теоретичного моделювання в механіці деформівних твердих тіл з урахуванням їх реальної структури і взаємовпливу процесу деформації і процесів немеханічної природи – основного напрямку механіки зв'язаних полів. Зокрема, запропонований термодинамічний підхід до побудови конкретних моделей механіки дозволив провести важливі дослідження проблем взаємодії полів різної природи стосовно до задач теплоенергетики, машино- та приладобудування, теплофізики, геофізики і нової техніки [12, 35, 49, 74 та ін.]

Необхідність розв'язання практичних задач, пов'язаних з дослідженням температурних полів і напружень в елементах конструкцій, зокрема в парогенераторах високого тиску [71 та ін.], привела до ідеї розвитку теорії і методів термомеханіки на основі побудованих більш загальних моделей деформівних твердих тіл з урахуванням взаємовпливу немеханічних процесів і деформації [80, 82, 83, 92, 98, 99, 138 та ін.]. З використанням методів термодинаміки нерівноважних процесів у механіці суцільного середовища запропоновано ефективний спосіб дослідження процесів деформації, дифузії і теплопровідності [76, 79 та ін.]. Крім параметрів стану, термодинамічно обґрунтовано введено систему фізико-механічних характеристик моделі, встановлено відповідні залежності між ними і отримано замкнуту систему взаємозв'язаних вихідних диференціальних рівнянь такої моделі. Подальше вивчення фізики явищ, зв'язаних з протіканням і взаємодією процесів, особливо з внутрішньою будовою твердих тіл, дозволило суттєво розвинути запропоновану модель, отримати якісно новий результат шляхом введення замість скалярних параметрів (хімічного потенціалу, концентрації речовини, густини) відповідних тензорних величин [75 та ін.]. Для отримання замкнутої системи рівнянь розглянутих моделей запропоновано, крім функцій стану, ввести кінематичні потенціали, які описують процеси як характеристичні функції термодинамічних сил. Як і параметри стану, що отримуються з виразу для виробництва ентропії, параметри процесу: термодинамічні

сили і потоки – можуть мати тензорний характер. Для такого випадку сформульовано другий закон термодинаміки і узагальнені умови Онзагера. Такий підхід дозволив отримати відповідні нелокальні реологічні співвідношення, частковим випадком яких при однорідному фізичному стані тіла є локальні співвідношення пружно-в'язких середовищ [83 та ін.]. Сформульовано також умови масообміну деформівних твердих тіл, у яких певним чином відображено складні міжфазні явища [79 та ін.].

У загальну структуру побудови моделей деформівного твердого тіла включено і континуальну теорію дислокацій. За термодинамічні параметри стану деформівного тіла з дислокаціями вибрано тензори пластичної деформації і пластичного згину–кручення [10, 78 та ін.].

Як інтерпретацію таких ідей і модельних представлень розглянуто явища дифузії, теплопровідності, повзучості і релаксації в деформівному твердому тілі [81, 96, 100 та ін.], вивчено процеси деформування багатокомпонентних твердих тіл з урахуванням алотропічних перетворень (у т.ч. рекристалізації), теплопровідності та дифузій, а також тіл, виготовлених з матеріалів з пам'яттю форми [1, 2, 81, 84, 85, 92, 95, 96, 98, 99, 100 та ін.].

При цьому використано термодинамічний підхід до отримання вихідних співвідношень пропонованих моделей, зокрема, при описі процесу кристалізації з метою розробки на цій основі технологій отримання матеріалів з наперед заданими властивостями. Приймається, що локальний термодинамічний стан фізично безмежно малого елемента об'єму деформівного твердого тіла характеризують такі параметри: температура T – ентропія S , тензор деформації $\hat{\epsilon}$ – тензор напружень $\hat{\sigma}$, ступінь завершеності процесу кристалізації Ξ – спорідненість фазового перетворення A , міжфазна поверхня Ω в одиниці маси – поверхнева енергія Σ . Фазовий перехід і зміна величини міжфазної поверхні розглядаються як процеси оборотні, а час релаксації цих процесів вважається значно меншим від часу релаксації процесу дифузії, внаслідок чого дифузійне зміщення маси не враховується. Перерозподіл маси в субстанціональному об'ємі відбувається внаслідок фазового перетворення. У такому наближенні вихідне рівняння Гіббса для пропонованої моделі має вигляд

$$dF_S = -SdT + \frac{1}{\rho} \hat{\sigma} : d\hat{\epsilon} + Ad\Xi + \Sigma d\Omega, \quad (1)$$

де ρ – густина, F_S – вільна енергія. Вільна енергія як функція параметрів T , Ξ , Ω і скалярних інваріантів тензора деформації $\hat{\epsilon}$ подається у вигляді ряду в околі її рівноважного стану, що дозволяє отримати відповідну систему рівнянь стану, які пов'язують між собою введені параметри.

Рівняння стану разом з балансовими співвідношеннями для маси (ступеня завершеності процесу), міжфазної поверхні кількості руху, ентропії, енергії, а також із відповідними наявними початковими і межовими умовами становлять повні системи співвідношень для опису процесів кристалізації однокомпонентних систем.

У прикладному аспекті викладені вище результати дали можливість визначати напружений стан, довготривалість, дифузійну стабільність складу, ставити і розв'язувати задачі теоретичного прогнозування робочого ресурсу конструкцій в екстремальних умовах експлуатації з урахуванням локальних неоднорідностей типу включень, дислокацій, приповерхневих ефектів та інших факторів, які інтенсифікують протікання процесів і їх взаємозв'язок [19, 102, 136, 137 та ін.], як і задачі, пов'язані з застосуванням окремих матеріалів і підходів у медицині, енергетиці та техніці [31, 42, 67, 103 та ін.].

Запропонований термодинамічний підхід до побудови конкретних моделей механіки знайшов подальший розвиток у роботах Я. Й. Бурака, Я. С. Підстригача і їх учнів при описі та вивченні взаємодії матеріальних середовищ з електромагнітними полями (ЕМП). У рамках макроскопічних

представлень записано співвідношення, що описують деформацію електропровідних тіл (з урахуванням їх електронної будови), які далі узагальнено для електропровідних твердих розчинів [6, 86 та ін.]. Тут розвинуто нові підходи до побудови математичних моделей діелектричних та електропровідних неферромагнітних пружних тіл [3, 9 та ін.]. З використанням уявлень про тензорний характер локального розподілу електричних зарядів отримано повну систему співвідношень для опису процесів деформування і поляризації діелектриків.

Для електропровідних неферромагнітних пружних тіл на основі положень термодинаміки нерівноважних процесів і механіки суцільного середовища побудовано математичну модель, у рамках якої кількісно описано механічні, теплові та електромагнітні процеси з урахуванням поля електродного потенціалу (хімічного потенціалу електронної підсистеми металу) [4, 5, 14, 77 та ін.]. З її використанням з метою вивчення міцнісних властивостей деформованих тіл і кінетики протікання корозійних процесів було проведено цикл досліджень електричних (катодно-анодних) явищ і поверхневих ефектів у неоднорідних деформованих твердих тілах [4, 5, 14, 27, 86 та ін.].

При цьому для макроскопічного опису деформації у взаємозв'язку з фізичними процесами дифузійного типу, зокрема електромагнітними в металічних тілах, постулюється, що стан елемента тіла визначають такі параметри: температура T – питома ентропія S , тензор напружень $\hat{\sigma}$ – тензор деформації $\hat{\epsilon}$, хімічний потенціал M'_k – концентрація $C_k = \rho_k / \rho$ (ρ_k – маса компоненти k в одиниці об'єму тіла, $\rho = \sum_{k=1}^n \rho_k$). У цьому випадку приріст функції стану – питомої внутрішньої енергії $U = U(S, \hat{\epsilon}, C_k, \omega)$ описується рівнянням Гіббса

$$dU = TdS + \frac{1}{\rho} \hat{\sigma} : d\hat{\epsilon} + \sum_{k=1}^{n-2} M'_k dC_k + \Phi d\omega, \quad (2)$$

де $\omega = \sum_{k=1}^n Z'_k C_k$ – питомий електричний заряд, Z'_k – заряд компоненти, $\Phi = \frac{M'_{n-1} - M'_n}{Z'_{n-1} - Z'_n}$ – термодинамічний електричний потенціал, пропорційний до

електродного потенціалу тіла; $M'_k = M'_k - M'_n - \frac{Z'_k - Z'_n}{Z'_{n-1} - Z'_n} (M'_{n-1})$ – узагальнений хімічний потенціал компоненти k ; $\sum_{k=1}^n C_k = 1$. Тут виключено з розгляду

концентрації і дифузійні потоки компонент розчинника ($k = n$) і електронів провідності ($k = n - 1$). Приймавши, що U є аналітичною функцією і розклавши її в ряд з утриманням певної кількості членів, з рівняння Гіббса отримано в явному вигляді рівняння стану. Рівняння стану доповнено рівняннями електродинаміки (Максвелла).

Рівняння стану разом з рівняннями Максвелла, балансовими співвідношеннями для маси, заряду, кількості руху і питомої сумарної енергії є вихідними рівняннями, що описують у взаємозв'язку розглядувані процеси.

Спряжені параметри Φ і ω дозволили врахувати електронну будову тіл, зокрема експериментально спостережувані деформаційну, теплову та структурну неоднорідності електродного потенціалу. Ряд положень запропонованих тут модельних представлень використано в літературі при вивченні корозійних явищ, а також виконанні кількісних досліджень особливостей механотермодифузійних явищ в приповерхневих шарах [6, 86 та ін.].

В останні роки все більше уваги приділяється дослідженню та опису фундаментальних закономірностей і явищ термомеханіки – важливого в застосуванні розділу механіки зв'язаних полів. З цією метою з використанням принципів термодинаміки необоротних процесів у роботах Я. С. Підстригача, Ю. М. Коляна та їх учнів запропоновано фізико-математичну модель термомеханіки кусково-однорідних тіл як з умовами ідеального, так і неідеального термомеханічного контакту на поверхнях поділу різнорідних складових і на цій основі розроблено ефективні аналітичні і числово-аналітичні методи розв'язування крайових задач, що описуються відповідними системами взаємозв'язаних диференціальних та інтегро-диференціальних рівнянь з розривними та імпульсними коефіцієнтами [55–57, 59, 93, 95, 126, 130 та ін.].

Отримано також вагомні результати в галузі узагальненої термомеханіки, зокрема, проведено ґрунтовне опрацювання основ теорії, розвинуто на цій підставі конкретні математичні моделі теплопровідності та термопружності в узагальненому формулюванні та знайдено розв'язки зв'язаних і незв'язаних узагальнених динамічних задач термопружності, магнітотермопружності та термов'язкопружності для однорідних і неоднорідних, ізотропних та анізотропних масивних тіл і тонкостінних елементів конструкцій за імпульсних чи гармонічних теплових навантажень [53, 93, 95, 99 та ін.].

Важливою складовою механіки зв'язаних полів за обсягом досліджень, особливостями розглядуваної тематики і важливістю її в застосуваннях, яка є водночас і самостійним розділом механіки деформівного твердого тіла, є розробка методів визначення та дослідження теплового і термопружного станів термочутливих (із залежними від температури фізико-механічними характеристиками) тіл. За цією тематикою в Інституті отримано ряд важливих наукових результатів [53, 54, 63, 92–95, 99, 135 та ін.]. Так, для ізотропного термочутливого тіла, за нехтування перетворенням механічної енергії у теплову (незв'язані задачі), здійснено постановки відповідних задач термопружності [63]. Їх розв'язування складається з двох етапів: знаходження температурного поля тіла та визначення компонент його напружено-деформованого стану. Для визначення неусталеного температурного поля t , наприклад, у декартовій системі координат маємо рівняння теплопровідності

$$\operatorname{div}(\lambda_t(t) \operatorname{grad} t) = c_v(t) \dot{t} - W, \quad M \in D, \quad (3)$$

та початково-крайові умови

$$t|_S = t_s \quad \text{або} \quad \left(\lambda_t(t) \frac{\partial t}{\partial n} \right) \Big|_S = q_s, \quad M \in S, \quad t|_{\tau=0} = t_p, \quad M \in D. \quad (4)$$

У випадку конвективно-променевого теплообміну на поверхні S тіла, що займає область D , крайова умова має вигляд

$$\left[\lambda_t(t) \frac{\partial t}{\partial n} + \alpha(t - t_c) + \varepsilon \sigma (t^4 - t_c^4) \right] \Big|_S = 0. \quad (5)$$

Тут $\lambda(t)$, $c_v(t)$, $\alpha(t)$, $\varepsilon(t)$ – залежні від температури відповідно коефіцієнт теплопровідності, об'ємна теплоємність, коефіцієнт теплообміну з поверхні S і ступінь чорноти даної поверхні; W – густина джерел тепла; n – зовнішня нормаль до поверхні S ; t_s , q_s – задані температура і тепловий потік на S ; t_p – початкова температура тіла, за якої воно перебуває у природному стані (при $t = t_p$ компонентах тензора деформації $e_{ij} = 0$ і всі компоненти тензора напружень $\sigma_{ij} = 0$, $i, j = 1, 2, 3$); t_c – температура зовнішнього середовища, що омиває поверхню S ; σ – стала Стефана–Больцмана; M – точка тіла; крапкою зверху позначено диференціювання за часом τ .

Для двошарового тіла, за умов ідеального теплового контакту тіл на межі їх поділу S_1 , необхідно також забезпечити виконання рівності темпе-

ратур і теплових потоків на цій межі:

$$t_1 = t_2, \quad \lambda_{t_1}(t_1) \frac{\partial t_1}{\partial n} = \lambda_{t_2}(t_2) \frac{\partial t_2}{\partial n}, \quad M \in S_1. \quad (6)$$

Для визначення компонент напружено-деформованого стану тіла маємо:

– співвідношення між компонентами e_{ij} тензора деформацій і переміщеннями u_i (геометричні співвідношення)

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}); \quad (7)$$

– співвідношення Дюгамеля – Неймана між компонентами σ_{ij} і e_{ij} тензорів напружень і деформацій (фізичні співвідношення)

$$\sigma_{ij} = 2\mu(t) e_{ij} + [\lambda(t) e_{kk} - \beta(t) \Phi(t)] \delta_{ij}, \quad (8)$$

або

$$e_{ij} = \frac{1}{2\mu(t)} [\sigma_{ij} - \frac{\lambda(t)}{\beta(t)} \sigma_{kk} \delta_{ij}] + \Phi(t) \delta_{ij}; \quad (9)$$

– рівняння руху

$$\sigma_{ij,j} = \rho(t) \ddot{u}_i - F_i, \quad (10)$$

сформульовані або в напруженнях [121]

$$\text{Def} \frac{1}{\rho(t)} (\text{Div} \hat{\sigma} + \mathbf{F}) = \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left\{ \frac{1}{2G(t)} \hat{\sigma} + \left[\Phi(t) - \frac{\nu(t)}{E(t)} \sigma_* \right] \hat{I} \right\}, \quad k, j = 1, 2, 3, \quad (11)$$

або в переміщеннях [63]

$$\begin{aligned} \mu(t) u_{i,kk} + (\lambda(t) + \mu(t)) u_{k,ki} + \mu_{,k} (u_{i,k} + u_{k,i}) + \lambda_{,i} u_{kk} - (\beta(t) \Phi(t))_{,i} = \\ = \rho(t) \ddot{u}_i - F_i; \end{aligned} \quad (12)$$

– умови сумісності деформацій

$$\varepsilon_{ij\ell} \varepsilon_{kmn} e_{\ell m, jn} = 0. \quad (13)$$

Тут $\beta(t) = 3\lambda(t) + 2\mu(t)$; $\mu(t) = G(t) = \frac{E(t)}{2(1 + \nu(t))}$, $\lambda(t) = \frac{\nu(t)E(t)}{(1 + \nu(t))(1 - 2\nu(t))}$ – виражені через модуль пружності $E(t)$ і коефіцієнт Пуассона $\nu(t)$ параметри Ляме; $G(t)$ – модуль зсуву; $\rho(t)$ – густина матеріалу тіла; F_i – компоненти вектора масових сил \mathbf{F} ; $\Phi(t) = \int_{t_p}^t \alpha_t(t) dt$ – суто тепла деформація;

$\alpha_t(t)$ – температурний коефіцієнт лінійного розширення; $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$ –

символ Кронекера, e_{kk} – відносна зміна об'єму тіла; σ_{kk} – сумарне напруження; величина $\varepsilon_{ij\ell}$ дорівнює $+1$ (-1), якщо i, j, ℓ утворюють парну (непарну) перестановку чисел 1, 2, 3; комою з одночасним індексним означенням змінної позначено диференціювання за координатою, а підсумовування здійснюється за індексами, що повторюються; $\text{Div} \hat{\sigma} = \nabla \cdot \hat{\sigma} = \left\{ \frac{\partial \sigma^{mk}}{\partial x^m} + \Gamma_{jm}^m \sigma^{mj} \right\}$,

$\text{Def} \mathbf{u} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla) = \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x^j} + \frac{\partial u_j}{\partial x^k} + 2\Gamma_{kj}^\alpha u_\alpha \right) \right\}$, $m, j, k, \alpha = 1, 2, 3$, Γ_{kj}^α – сим-

вол Крістофеля.

Вихідна задача термопружності може бути сформульована як у переміщеннях, так і в напруженнях. При цьому необхідно задати відповідні крайові, а у випадку динамічних задач – ще й початкові умови.

Як бачимо, характерною особливістю визначення термонапруженого стану елементів конструкцій на основі моделей, що враховують залежність теплових і механічних характеристик матеріалу від температури, є те, що відповідні задачі теплопровідності (3)–(6) є нелінійними, а задачі термопружності (7)–(13) із відповідними граничними умовами – крайовими задачами математичної фізики зі змінними коефіцієнтами.

Для розрахунку температурних полів у термочутливих елементах конструкцій за умов складного теплообміну використовуються методики поетапної лінеаризації за допомогою перетворення Кірхгофа, лінеаризувальних параметрів, побудови числових розв'язків нестационарних задач теплопровідності, а також послідовних наближень їх розв'язування. Знаходження компонент термопружного стану термочутливих елементів конструкцій здійснюється шляхом застосування варіанту методу збурень або зведенням до інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду на певні базові компоненти напружено-деформованого стану, через які визначаються всі інші його компоненти. Проведено ґрунтовні дослідження теплового і термонапруженого станів тонких термочутливих пластин і стрижнів, контактуючих (шаруватих) термочутливих тіл, термочутливих тіла за умов асимптотичного нагрівання; елементів конструкцій при зварюванні [61–63, 65, 127, 128, 131, 132, 135, 140, 141 та ін.].

Зупинимось більш детально на підрозділі термомеханіки – термомеханіці електропровідних тіл, присвяченому математичному моделюванню, дослідженню та оптимізації поведінки механічних систем за дії зовнішніх комплексних навантажень, одним з яких є електромагнітне.

У піонерських роботах цього напрямку [90, 91] вплив усталеного ЕМП на напружений стан тіла враховувався тільки через усереднене за період $f_* = 2\pi/\omega$ електромагнітних коливань джоулеве тепло

$$Q = \frac{1}{f_*} \int_t^{t+f_*} \mathbf{j}_*(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}_*(\mathbf{r}, t) dt \equiv \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}),$$

де ω – колова частота, $\mathbf{j}_*(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[\mathbf{j}(\mathbf{r})e^{i\omega t}]$ – густина струму, $\mathbf{E}_*(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[\mathbf{E}(\mathbf{r})e^{i\omega t}]$ – напруженість електричного поля, $\mathbf{j}(\mathbf{r})$, $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ – відповідні комплексні амплітуди, $\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$ – комплексно спряжена до $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ функція. Ця розрахункова модель була далі узагальнена шляхом побудови варіанту теорії термомеханіки електропровідних тіл з різними електропровідністю і здатністю до намагнічення і поляризації за дії зовнішнього квазіусталеного електромагнітного випромінювання радіо- та інфрачервоного частотних діапазонів [29]. Відповідно до особливостей електрофізичних властивостей матеріалів за різних амплітудно-частотних характеристик ЕМП розглянуто характерні типи електропровідних тіл: неферромагнітні недіелектричні (лінійні тіла), ферромагнітні недіелектричні, недіелектричні неферромагнітні (тіла низької електропровідності), феритові, електропровідні неметалічні тіла [16, 30, 34, 121 та ін.]. Для зовнішньої дії радіочастотного діапазону при описі параметрів ЕМП використано електродинамічну теорію за запропонованих для кожного з виділених типів тіл аналітичних апроксимацій залежностей між індукціями і напруженостями електричного і магнітного полів (включно із залежностями у вигляді петлі гістерезису), а за дії випромінювання інфрачервоної частини спектру – феноменологічну теорію випромінювання [17 та ін.].

Опрацьовану на базі варіанту теорії термомеханіки електропровідних тіл модель кількісного опису механічної поведінки ферромагнітних тіл за дії квазіусталених ЕМП розвинуто на випадок електропровідних твердих тіл з різними електропровідністю й здатністю до намагнічування та поляризації при дії зовнішнього ЕМП за врахування залежності властивостей матеріалів від температури, пружно-пластичного характеру їх деформування і нелінійних зв'язків між напруженістю та індукцією електричного й магнітного

полів [[15, 33, 118 та ін.]. Електромагнітне й температурне поля задовольняють зв'язану систему рівнянь Максвелла і теплопровідності. Для кількісного опису напружено-деформованого стану тіла використано співвідношення неізотермічної термопружнопластичності. Фізико-механічні властивості матеріалів і їх залежність від температури враховано за допомогою інтерполяційних сплайнів, побудованих за точками кривих, які описують поведінку матеріалів в ЕМП (що дозволяє описувати реальні криві деформування, намагнічування, поляризації та залежності характеристик матеріалу від температури). У рамках єдиного обчислювального алгоритму, побудованого на основі методу скінченних елементів у сукупності з однокроковими багатопараметричними різницевиими алгоритмами, суміщено методики розрахунку параметрів електромагнітного й температурного полів, а також переміщень, деформацій і напружень у тілі. При цьому передбачена можливість вибору різних кроків інтегрування за часом рівнянь електродинаміки, теплопровідності і термомеханіки, що дає можливість істотно скоротити процес обчислень і отримувати розв'язки складних нелінійних задач.

Із застосуванням розроблених моделей термомеханіки електропровідних тіл побудовано розрахункові схеми, запропоновано ефективні аналітичні та числові методи визначення й оптимізації термонапруженого стану тіл з різними електропровідністю та здатністю до намагнічування і поляризації, зокрема, пластин і оболонок, зумовленого дією електромагнітного випромінювання різного частотного діапазону, стосовно конкретних умов термообробки з використанням ЕМП [15–17, 29, 30, 33, 34, 58, 87, 118, 119, 121 та ін.].

На основі запропонованих моделей вивчено магнітотермомеханічні процеси в неферромагнітних недіелектричних електропровідних тілах при періодичних в часі силових і електромагнітних навантаженнях [88 та ін.], за дії імпульсних ЕМП з модуляцією амплітуди [7, 36 та ін.], за одночасної дії постійних і квазіусталених ЕМП при наявності моментних факторів дії [32, 46, 107 та ін.], а також фізико-механічні процеси в напівпровідникових тілах [11, 117 та ін.]. Опрацьовано математичну модель кількісного опису взаємозв'язаних електромагнітних, теплових, дифузійних і механічних процесів у твердих тілах з газовою домішкою за дії зовнішнього теплового (інфрачервоного) опромінення [37 та ін.]. Вивчено вплив енергетичних і спектральних характеристик зовнішнього випромінювання на параметри досліджуваних процесів, зокрема на зміну концентрації газової домішки.

Досліджено і оптимізовано температурні поля і напруження стосовно до побудови раціональних режимів індукційної, магнітоакустичної та променевої термообробки елементів конструкцій і приладів. Виконані в цьому напрямі дослідження систематизовано в монографіях [16, 33, 37, 87, 88]. Розроблені теоретичні основи побудови математичних моделей і методів опису і дослідження фізико-механічних процесів за дії комплексних зовнішніх навантажень, одним з яких є електромагнітне, знайшли свій подальший розвиток при вирішенні ряду проблем електромагнітотермомеханіки, які викликані потребами сучасної інженерної і технологічної практики [32, 114, 118, 124, 133, 134 та ін.].

В останні роки опрацьовано новий напрям у механіці зв'язаних полів – побудова нелокальних теорій термомеханіки та електромагнітотермопружності [13, 20, 22, 23, 69, 115, 116 та ін.]. Такі теорії ґрунтуються на врахуванні поряд із процесами деформування та теплопровідності процесу локального зміщення маси. Тут враховано локальні пружні зміщення, пов'язані з градієнтністю поля хімічного потенціалу та взаємозв'язком деформаційної і поступальної форм руху. Це дало можливість повніше описати приповерхневі явища, розмірні ефекти й ефекти поляризації. Розглянуто окремо питання побудови моделей у термодинамічних системах з розширеним простором параметрів стану, зокрема, у випадкових і регулярних структурах [21, 110, 111 та ін.].

Ряд вагомих результатів з механіки зв'язаних полів отримано в рамках контактної механіки, де розроблено математичні основи моделювання контактнo-поверхневих явищ у структурах і з'єднаннях з недосконалими межами, поверхневими неоднорідностями і міжфазними дефектами за врахування взаємозв'язку механічних, теплових і дифузійних процесів, зокрема, отриманого внаслідок зміни ділянок контакту тіл під навантаженнями [38, 40, 68, 112, 113 та ін.]. Тут сформульовано, розв'язано і досліджено нові задачі термопружності складених тонкостінних елементів за теплового і механічного контактів із зовнішнім середовищем, структур з міжфазними дефектами, береги яких контактують, а також задачі механотермодифузії багатошарових тіл з тонкими контактними прошарками та ін.

Значний досвід з вирішення згаданих проблем механіки зв'язаних полів, нагромаджений в ІППММ НАН України дозволив розробити підходи до побудови достатньо загальних математичних моделей, що описують поведінку механічних об'єктів реальної структури з урахуванням взаємозв'язку та взаємообумовленості, що мають місце в системі процесів немеханічної природи (теплових, дифузійних, електромагнітних, електрохімічних тощо) та отримати ряд наукових результатів світового рівня з цієї тематики, які дістали визнання наукових центрів в нашій країні і за її межами. При цьому зауважено також певні закономірності загального характеру, притаманні цьому напрямку.

При вивченні властивостей реальних твердих середовищ необхідно враховувати вплив на процес деформації процесів теплопровідності, тепломасопереносу, електрохімічної та хімічної взаємодії, електромагнітних явищ та ін. Крім того, прогрес в описі таких середовищ неможливий без врахування їх реальної структури, тобто наявності великої кількості різноманітних факторів – дислокацій, тріщин, чужорідних включень, приповерхневих областей, покриттів тощо [10, 50-52, 60, 70, 72, 78, 97, 101, 108, 125, 139 та ін.]. У зв'язку з цим при побудові математичних моделей реальних механічних структур і розробці методів їх дослідження необхідно використовувати досягнення сучасних: математики, зокрема диференціальної геометрії та математичної фізики, термодинаміки необоротних процесів, фізики і хімії твердого тіла, фізичного матеріалознавства та ін. У задачах термопружності для тіл з розрізами при неідеальному контакті їх поверхонь проводяться дослідження теоретичних аспектів і розробляються аналітичні і числові методи розв'язування двовимірних інтегральних рівнянь типу класичних потенціалів на многовидах з краєм.

Необхідним при цьому на сучасному етапі є також врахування актуальних проблем екології, ековиробництва, техніки безпеки і промсанітарії (інженерії безпеки), економіки, логістики тощо [114, 133, 134 та ін.].

Потрібно відмітити, що такий більш повний опис стану реальних середовищ з урахуванням фізико-механічної взаємодії приводить також до дослідження нових неklasичних математичних об'єктів.

У зв'язку з вищевказаним багато аспектів механіки зв'язаних полів природно відносяться і до інших напрямків механіки деформівного твердого тіла та споріднених наук і розвиваються як у рамках механіки зв'язаних полів, так і в рамках цих споріднених наук.

При опрацюванні виробів нової техніки і прогресивних технологій виробництва в енергетиці, приладо-, машино-, авіа- та ракетобудуванні є актуальною проблема розробки наукових основ обробки і прогнозування стану матеріалів, зокрема, поверхневого зміцнення елементів конструкцій і приладів різними методами, в тому числі з використанням дії електромагнітних полів, високотемпературного наплення, армування, термодифузійного насичення і т.п. з метою оптимізації зміцнюючих технологій та умов експлуатації елементів конструкцій, збільшення і прогнозування їх робочого ресурсу за врахування явищ тертя і зношування тощо [39, 40, 72, 143 та ін.]. Ці питання вимагають постановки і розробки методів розв'язування нових

прикладних задач механіки зв'язаних полів. Розвиток нових представлень і методів математичного моделювання та дослідження поверхневих явищ в деформівних твердих тілах, їх контактної взаємодії з урахуванням взаємозв'язку полів різної природи, процесів нанесення і формування поверхневих покриттів зв'язаний з більш глибоким вивченням поверхневих явищ, а також їх впливу на процеси формування покриттів і на їх експлуатаційні властивості.

Колектив Інституту має значний доробок в розробці моделей оптимізації механічної поведінки тіл за комплексних навантажень [8, 24, 25, 33, 41, 64, 66, 89, 129, 142 та ін.]. Важливе значення має проблема створення математичних основ теорії і розробка методів оптимального керування фізико-механічними процесами в деформівних твердих електропровідних та неелектропровідних тілах за врахування їх зв'язаності. Розвиток модельних уявлень і математичних методів термодинамічного дослідження та оптимізації процесів деформування електропровідних і напівпровідникових твердих тіл в області структурних перетворень і непружної поведінки матеріалу при комплексному навантаженні: силовому, тепловому та електромагнітному – направлений на забезпечення максимального підвищення міцнісних властивостей елементів конструкцій, розробку прогресивних технологій проектування та виготовлення матеріалів і конструкцій із заданими фізико-механічними властивостями.

Для моделей, що описують процеси термодифузійного типу, актуальними є розробка і розвиток математичних методів розв'язування екстремальних та обернених задач теплопровідності, термомеханіки і термомеханіки електропровідних тіл з метою побудови конструктивного розв'язку задач оптимального за цільовими критеріями, зокрема швидкодією, керування нестационарними комплексними діями на тверді тіла (як металічні, так і неметалічні) при обмеженнях на керування, параметри цих зовнішніх дій і температурні напруження. Це дозволяє оптимізувати технологічні процеси виготовлення і експлуатації деталей машин і виробів з традиційних і сучасних матеріалів.

В ІППММ НАН України розроблено та обґрунтовано варіанти уточнених лінійних і нелінійних теорій статичної і динамічної тонкостінних елементів конструкцій і приладів з композиційних матеріалів за врахування їх реальної будови та фізико-хімічних процесів на поверхнях поділу, з використанням яких отримано ряд нових результатів з особливостей механічної поведінки таких структур [72 та ін.]. Особливої уваги в зв'язку з сучасними потребами промисловості та будівництва потребує розробка математичних методів моделювання та дослідження механічної поведінки пористих, а також тонкостінних і тонкостінних анізотропних структур з урахуванням зв'язаності фізико-хімічних процесів, зокрема на міжфазних границях, стосовно проблеми оптимізації технологічних процесів виготовлення і експлуатації елементів конструкцій і споруд з пористих і композитних матеріалів і прогнозування динамічної міцності та зносостійкості елементів конструкцій з таких матеріалів і тіл з покриттями, в тому числі отриманими методами наскрізного багатокomпонентного дифузійного насичення.

Проектування, створення та експлуатація енергетичних об'єктів [42–44 та ін.] вимагає розробки ефективних методів розв'язування просторових нелінійних задач термопружнопластичності термочутливих систем за широкого врахування комплексності навантажень, явищ і процесів іншої від механічної фізичної природи. Це дозволяє розраховувати оптимальні режими комплексних способів створення заданого розподілу залишкових напружень чи деформацій, що є суттєвим при оцінці міцності та довговічності конструкцій, визначати несучу здатність і ресурс елементів енергоагрегатів за умов довготривалої експлуатації, криогенної та високотемпературної техніки, опрацьовувати технології цільового механічного, теплового та електромагнітного деформування тонкостінних елементів конструкцій.

Розробляються також аналітичні, числово-аналітичні і числові методи дослідження нових, істотно нелінійних явищ та ефектів при вивченні процесів самоорганізації в деформівних твердих тілах. Отримано ряд вагомих результатів з динаміки нелінійних дисипативних систем і їх комп'ютерного моделювання, а також з опису та дослідження нерівноважних нелінійних ефектів у фізичних, хімічних і біологічних системах і явищ самоорганізації в процесах різної природи [28, 122, 123 та ін.], які можуть стати основою опрацювання нових підходів в механіці зв'язаних полів. Такі дослідження дозволяють створювати пристрої функціональної мікроелектроніки на нових принципах роботи, розробляти нові технологічні процеси.

Таким чином, в механіці зв'язаних полів особливе значення мають математичні методи, в тому числі числово-аналітичні і числові. При їх опрацюванні можуть бути ефективно використані і розвинуті методи, вже розроблені в Інституті при розв'язуванні задач конкретних напрямків досліджень, зокрема сучасні методи розв'язування інтегральних рівнянь [50, 52, 108, 109 та ін.]. Такі методи можуть опрацьовуватись і у співпраці спеціалістів з механіки зв'язаних полів з математиками [73 та ін.] на основі отриманих результатів з якісних і кількісних методів дослідження рівнянь із частинними похідними (чи рівнянь математичної фізики) [26, 45, 47, 48, 104–106, 120 та ін.]. Постановка та розв'язування нових неklasичних змішаних задач механіки зв'язаних полів, зокрема задач з узагальненими гранично-контактними умовами для тепломасоелектропровідних тіл неоднорідної структури, що описують у взаємозв'язку поля різної природи у складних механічних системах за комплексних зовнішніх дій, з урахуванням фазових перетворень і непружних деформацій при оцінюванні та прогнозуванні контактної міцності, надійності, зносостійкості, оптимізації технологій виготовлення нових конструктивних матеріалів вимагають розробки нових кількісних і якісних методів розв'язування отримуваних задач математичної фізики, а також засобів і методів відповідної комп'ютерної симуляції, які можуть бути ефективно опрацьовані тільки в результаті співпраці математиків, механіків, фізиків, інформатиків та ін.

Для сучасного етапу розвитку механіки зв'язаних полів характерним є вивчення і оцінка впливу на механічну поведінку систем взаємодії різних типів фізико-механічних полів (температурних, концентраційних, електромагнітних, гравітаційних і механічних) з урахуванням протікання в системі структурних, електрохімічних, хімічних, гідродинамічних, фільтраційних і інших процесів. Розглядаються континуальні системи за врахування реальної їх будови (багатокомпонентні, пористі, анізотропні, композитні, структурно-неоднорідні, термочутливі і т.п.) за підходами механіки континуальних систем, а також будова і особливості процесів на мікрорівні за підходами наномеханіки. Такі задачі виникають в енергетиці, машинобудуванні, авіабудуванні, суднобудуванні, медицині, екології та ін. Вони є актуальними також у зв'язку з техногенними катастрофами.

Врахування впливу все більш «тонких» факторів механічної і немеханічної природи на поведінку механічних систем приводить до суттєвого узагальнення та ускладнення математичних моделей механіки зв'язаних полів для опису термодинамічного стану таких об'єктів і вимагає більш досконалих математичних методів для їх дослідження, «потужніших» обчислювальних засобів і розвитку експериментальних методів для верифікації результатів.

1. Асташкин В. И., Бурак Я. И. Уравнения термодинамической теории процесса кристаллизации однокомпонентной системы // *Мат. методы и физ.-мех. поля.* – 1976. – Вып. 4. – С. 11–16.
2. Асташкин В. И., Бурак Я. И., Оньшико А. Е. Термодинамическое описание неравновесных процессов в деформируемых телах в области структурных превращений // *Термодинамика необратимых процессов.* – Москва: Наука, 1987. – С. 177–185.

3. Бурак Я. И. Дифференциальные уравнения термодинамических процессов в деформируемом теплоэлектропроводном твердом теле // Физ.-хим. механика материалов. – 1966. – **2**, № 4. – С. 371–377.
Te same: *Burak Ya. I. Differential equations of thermodynamic processes in a thermally and electrically conductive solid under strain // Soviet Mater. Sci. – 1967. – 2, No. 4. – P. 263–267.*
4. Бурак Я. И., Галапац Б. П. Влияние концентрации напряжений на распределение зарядов и электрического поля в электропроводных твердых телах // Физ.-хим. механика материалов. – 1968. – **4**, № 4. – С. 390–395.
Te same: *Burak Ya. I., Galapats B. P. Effect of stress concentration on the charge and electric field distribution in electrically conducting solids // Soviet Mater. Sci. – 1968. – 4, No. 4. – P. 284–288.*
5. Бурак Я. И., Галапац Б. П. Термодинамические основы и исследование поверхностных явлений в электропроводных телах // Физ.-хим. механика материалов. – 1981. – **17**, № 5. – С. 59–66.
Te same: *Burak Ya. I., Galapats B. P. Thermodynamic fundamentals and investigation of surface phenomena in electrically conducting bodies // Soviet Mater. Sci. – 1981. – 17, No. 5. – P. 436–442.*
6. Бурак Я. И., Галапац Б. П., Подстригач Я. С. Исходные уравнения деформации поляризованных электропроводных твердых тел // Избранные проблемы прикладной механики: Сб. работ, посвящ. 60-летию акад. В. Н. Челомея. – Москва: ВИНТИ, 1974. – С. 167–178.
7. Бурак Я. И., Гачкевич А. Р., Мусий Р. С., Шимчак И. И. Термомеханика электропроводных тел при воздействии импульсных электромагнитных полей с модуляцией амплитуды // Проблемы механики деформируемого твердого тела. – Ереван: Зангак-97, 2007. – С. 105–111.
8. Бурак Я. И., Зозуляк Ю. Д., Гера Б. В. Оптимизация переходных процессов в термоупругих оболочках. – Киев: Наук. думка, 1984. – 157 с.
9. Бурак Я. И., Подстригач Я. С. Некоторые вопросы термодинамической теории взаимосвязи механических и электромагнитных процессов в неферромагнитных твердых телах // Вопросы физ.-хим. механики материалов: Материалы докл. Физ.-мех. ин-та АН УССР на IV Всесоюз. конф. по физ.-хим. механике материалов (16–20.12.1968, Москва). – Львов: Изд-во Львовского ун-та, 1968. – С. 18–19.
10. Бурак Я. И., Подстригач Я. С. Образование атмосферы Коттрелла в окрестности краевой дислокации Пайерлса // Физ.-хим. механика материалов. – 1965. – **1**, № 4. – С. 395–402.
Te same: *Burak Ya. I., Podstrigach Ya. S. The formation of Cottrell atmospheres in the vicinity of Peierls edge dislocations // Soviet Mater. Sci. – 1966. – 1, No. 4. – P. 269–275.*
11. Бурак Я. И., Чекурин В. Ф. Физико-механические поля в полупроводниках. Математические основы теории. – Киев: Наук. думка, 1987. – 264 с.
12. Бурак Я. Й. Вибрані праці. – Львів: НУЦММ ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2001. – 352 с.
13. Бурак Я. Й. Локально-градієнтний підхід в термомеханіці електропровідних неферромагнітних тіл // Доп. АН УССР. Сер. А. – 1988. – № 4. – С. 23–26.
14. Бурак Я. Й., Галапац Б. П., Гнідець Б. М. Фізико-механічні процеси в електропровідних тілах. – Київ: Наук. думка, 1978. – 230 с.
15. Бурак Я. Й., Гачкевич О. Р., Дробенко Б. Д. Визначення параметрів термомеханічного стану термочутливих магнітотвердих ферромагнітних тіл за умов дії квазіусталених електромагнітних полів // Доп. НАН України. – 2007. – № 8. – С. 53–58.
16. Бурак Я. Й., Гачкевич О. Р., Терлецький Р. Ф. Термомеханіка багатокомпонентних тіл низької електропровідності. – Львів: Сполом, 2006. – 300 с. – Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під заг. ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра: В 5 т. – Т. 1.
17. Бурак Я. Й., Гачкевич О. Р., Терлецький Р. Ф. Термомеханіка тіл низької електропровідності при дії електромагнітного випромінювання інфрачервоного діапазону частот // Доп. АН УССР. Сер. А. – 1990. – № 6. – С. 39–43.
18. Бурак Я. Й., Кім Г. С., Кушнір Р. М. Я. С. Підстригач – видатний вчений та організатор науки // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – **51**, № 2. – С. 9–13.
Te same: *Burak Ya. Yo., Kit H. S., Kushnir R. M. Ya. S. Pidstryhach—outstanding scientist and organizer of science // J. Math. Sci. – 2009. – 162, No. 1. – P. 1–5.*

19. Бурак Я. Й., Мороз Г. І., Бойко З. В. Математична модель термомеханіки з урахуванням дисипативних процесів при формуванні приповерхневих явищ // Доп. НАН України. – 2008. – № 9. – С. 65–71.
20. Бурак Я. Й., Чапля Є. Я., Кондрат В. Ф., Грицина О. Р. Математичне моделювання термомеханічних процесів у пружних тілах із врахуванням локального зміщення маси // Доп. НАН України. – 2007. – № 6. – С. 45–49.
21. Бурак Я. Й., Чапля Є. Я., Чернуха О. Ю. Континуально-термодинамічні моделі механіки твердих розчинів. – Київ: Наук. думка, 2006. – 272 с.
22. Бурак Я., Кондрат В., Грицина О. Основи локально градієнтної теорії діелектриків. – Ужгород: Поліграфцентр «Ліра», 2011. – 208 с.
23. Бурак Я., Чапля Є., Нагірний Т., Чекурін В., Кондрат В., Чернуха О., Мороз Г., Червінка К. Фізико-математичне моделювання складних систем. – Львів: Сполом, 2004. – 264 с.
24. Визак В. М. Оптимальное управление нестационарными температурными режимами. – Киев: Наук. думка, 1979. – 360 с.
25. Визак В. М. Управление температурными напряжениями и перемещениями. – Киев: Наук. думка, 1988. – 312 с.
26. Войтович Н. Н., Каценеленбаум Б. З., Сивов А. Н. Обобщенный метод собственных колебаний в теории дифракции. – Москва: Наука, 1977. – 416 с.
27. Галапац Б. П. Описание термоэлектродупругих эффектов в электропроводных телах при высокоградиентном нагреве // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1990. – Вып. 31. – С. 1–8.
Te same: Galapats B. P. A description of the thermoelectroelastic effects in electrically conducting bodies under high-gradient heating // J. Soviet Math. – 1993. – **64**, No. 3. – P. 883–889.
28. Гафийчук В. В., Лубашевский И. А., Осипов В. В. Динамика формирования поверхностных структур в системах со свободной границей. – Киев: Наук. думка, 1990. – 214 с.
29. Гачкевич А. Р. Термомеханика электропроводных тел при воздействии квазиустановившихся электромагнитных полей. – Киев: Наук. думка, 1992. – 192 с.
30. Гачкевич А. Р., Бойчук В. Я. Термомеханическое поведение неметаллических электропроводных тел при высокотемпературной обработке // Мат. методы та фіз.-мех. поля. – 1996. – **39**, № 1. – С. 74–79.
Te same: Gachkevich A. R., Boichuk V. Ya. Thermomechanical behavior of nonmetallic electrical conductors during high-temperature treatment // J. Math. Sci. – 1997. – **86**, No. 2. – P. 2585–2589.
31. Гачкевич А. Р., Ирза Е. М., Бойчук В. Я. Математические модели и методы термомеханики стеклянных тел вращения при тепловом нагружении // Теорет. и прикл. механика. – 2009. – Вып. 45. – С. 8–18.
32. Гачкевич А. Р., Терлецкий Р. Ф., Солодяк М. Т. Математическое моделирование электромагнитоупругих и тепловых процессов в магнитных средах // Теорет. и прикл. механика. – 2013. – Вып. 6 (52). – С. 76–88.
33. Гачкевич О. Р., Дробенко Б. Д. Термомеханіка намагнечуваних електропровідних термочутливих тіл. – Львів: Сполом, 2010. – 256 с. – Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під заг. ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра: В 5 т. – Т. 4.
34. Гачкевич О. Р., Івасько Р. О. Термопружний стан феритового шару в квазіустановленому електромагнетному полі // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2005. – **41**, № 3. – С. 85–95.
Te same: Hachkevych O. R., Ivas'ko R. O. Thermoelastic state of a ferritic layer in a quasistationary electromagnetic field // Mater. Sci. – 2005. – **41**, No. 3. – P. 376–387.
35. Гачкевич О. Р., Кушнір Р. М., Чапля Є. Я. Про наукову та науково-організаційну діяльність члена-кореспондента НАН України Я. Й. Бурака (до 80-річчя від дня народження) // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2011. – **54**, № 1. – С. 7–14.
36. Гачкевич О. Р., Мусій Р. С., Тарлаковський Д. В. Термомеханіка неферомагнітних електропровідних тіл за дії імпульсних електромагнітних полів з модуляцією амплітуди. – Львів: Сполом, 2011. – 216 с.
37. Гачкевич О. Р., Терлецький Р. Ф., Курницький Т. Л. Механотермодифузія в частково прозорих тілах. – Львів: Сполом, 2007. – 184 с. – Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під заг. ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра: В 5 т. – Т. 2.

38. *Гольдштейн Р. В., Кит Г. С., Мартиняк Р. М., Середницька Х. І.* Эффект часткового закриття міжфазної тріщини з теплопровідним заповнювачем і поверхневими плівками при дії на біматеріал термічного навантаження // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2012. – **55**, № 4. – С. 64–73.
 Te same: *Goldstein R. V., Kit H. S., Martynyak R. M., Serebnytska Kh. I.* Effect of partial closure of an interface crack with heat-conducting filler and surface films in the case of thermal loading of a bimaterial // *J. Math. Sci.* – 2014. – **198**, No. 1. – P. 75–86.
39. *Горечко Н. О., Кушнір Р. М.* Розрахунок неусталеного термопружного стану трибосистеми під час гальмування // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2006. – **42**, № 5. – С. 81–86.
 Te same: *Horechko N. O., Kushnir R. M.* Analysis of the nonstationary thermoelastic state of a tribosystem in the process of braking // *Mater. Sci.* – 2006. – **42**, No. 5. – P. 665–672.
40. *Горячева И. Г., Мартыняк Р. М.* Периодические контактные задачи с трением и изнашиванием поверхностей // *Развитие идей Л. А. Галина в механике.* – Москва–Ижевск: Изд-во НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2012. – С. 305–335.
41. *Григолюк Э. И., Подстригач Я. С., Бурак Я. И.* Оптимизация нагрева оболочек и пластин. – Киев: Наук. думка, 1979. – 364 с.
42. *Демченко В. І, Палащук Є. І, Василик А. В., Гачкевич О. Р., Дробенко Б. Д., Будз С. Ф., Асташкін В. І.* Оцінка напруженого стану екранних труб з локальними пошкодженнями // *Енергетика та електрифікація.* – 2009. – № 11. – С. 18–23.
43. *Дробенко Б. Д., Будз С. Ф., Асташкін В. І.* Моделювання термомеханічних процесів в елементах діючого енергообладнання та оцінка їх експлуатаційного ресурсу з урахуванням деградації матеріалу, пошкоджень та ремонтних втручань // *Наука та інновації.* – 2013. – **9**, № 1. – С. 21–32.
44. *Дробенко Б. Д., Будз С. Ф., Асташкін В. І.* Уточнений розрахунок ресурсу барабана котла з експлуатаційними пошкодженнями // *Проблемы машиностроения.* – 2012. – **15**, № 5-6. – С. 25–30.
45. *Ивасишен С. Д.* Матрицы Грина параболических граничных задач. – Киев: Вища шк., 1990. – 200 с.
46. *Ивасько Р., Солодяк М., Станик-Беслер А., Тарлаковский Д.* Модели описания электромагнитного поля в ферромагнитной среде при наличии подмагничивания // In: *Manufacturing processes. Actual problems.* – Vol. II. Modelling and optimization of manufacturing processes. – *Studia i monografie.* – Z. 331 / Pod red. nauk.: M. Gajek, O. Nachkevych, A. Stanik-Besler. – Opole: Oficyna Wydawnicza Politechniki Opolskiej, 2013. – Гл. 2. – С. 35–44.
47. *Каленюк П. И., Баранецкий Я. Е., Нитребич З. Н.* Обобщенный метод разделения переменных. – Киев: Наук. думка, 1993. – 230 с.
48. *Каленюк П. І., Скоробогатько В. Я.* Якісні методи теорії диференціальних рівнянь. – Київ: Наук. думка, 1977. – 124 с.
49. *Кит Г. С., Бурак Я. И., Шевчук П. Р.* Научные идеи и разработки академика АН Украины Ярослава Степановича Подстригача // *Мат. методы и физ.-мех. поля.* – 1992. – Вып. 35. – С. 3–8.
 Te same: *Kit G. S., Burak Ya. I., Shevchuk P. R.* The scientific thought and advances of Academician Yaroslav Stepanovich Podstrigach of the Ukrainian Academy of Sciences // *J. Soviet Math.* – 1993. – **67**, No. 2. – P. 2813–2817.
50. *Кит Г. С., Кривцун М. Г.* Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1983. – 278 с.
51. *Кит Г. С., Побережный О. В.* Нестационарные процессы в телах с дефектами типа трещин. – Киев: Наук. думка, 1992. – 216 с.
52. *Кит Г. С., Хай М. В.* Метод потенциалов в трехмерных задачах термоупругости тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1989. – 284 с.
53. *Коляно Ю. М.* Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. – Киев: Наук. думка, 1992. – 280 с.
54. *Коляно Ю. М., Кулик А. Н.* Температурные напряжения от объемных источников. – Киев: Наук. думка, 1983. – 288 с.
55. *Коляно Ю. М., Кулик А. Н., Кушнір Р. М.* О постановке обобщенной задачи сопряжения для уравнений термоупругости кусочно-однородных тел // *Доп. АН УССР. Сер. А.* – 1980. – № 2. – С. 44–49.
56. *Коляно Ю. М., Попович В. С.* Термопружність багаточарових тіл // *Доп. АН УРСР. Сер. А.* – 1975. – № 12. – С. 1109–1114.

57. *Кушнір Р. М.* Використання методу узагальнених задач спряження в термопружності кусково-однорідних тіл при неідеальному контакті // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 1998. – **41**, № 1. – С. 108–116.
Te same: *Kushnir R. M.* Application of the method of generalized coupling problems in the thermoelasticity of piecewise-homogeneous bodies under nonideal contact // *J. Math. Sci.* – 1999. – **97**, No. 1. – P. 3854–3861.
58. *Кушнір Р. М.* Моделювання та оптимізація в термомеханіці неоднорідних тіл // *Вісн. НАН України.* – 2014. – № 10. – С. 10–16.
59. *Кушнір Р. М.* Про побудову розв'язків звичайних лінійних диференціальних рівнянь з кусково-сталими коефіцієнтами // *Доп. АН УРСР. Сер. А.* – 1980. – № 9. – С. 54–57.
60. *Кушнір Р. М., Николішин М. М., Осадчук В. А.* Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами. – Львів: Сполом, 2003. – 320 с.
61. *Кушнір Р. М., Попович В. С.* Напружений стан термочутливої пластини в центрально-симетричному температурному полі // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2006. – **42**, № 2. – С. 5–12.
Te same: *Kushnir R. M., Popovych V. S.* Stressed state of a thermosensitive plate in a central-symmetric temperature field // *Mater. Sci.* – 2006. – **42**, No. 2. – P. 145–154.
62. *Кушнір Р. М., Попович В. С.* Про визначення усталеного термопружного стану багатошарових структур за високотемпературного нагрівання // *Вісн. Київ. нац. ун-ту імені Т. Шевченка. Сер. Фіз.-мат. науки.* – 2013. – № 3. – С. 42–47.
63. *Кушнір Р. М., Попович В. С.* Термопружність термочутливих тіл. – Львів: Сполом, 2009. – 412 с. – Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під заг. ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра: В 5 т. – Т. 3.
64. *Кушнір Р. М., Попович В. С., Ясінський А. В.* Оптимізація та ідентифікація в термомеханіці неоднорідних тіл. – Львів: Сполом, 2011. – 256 с. – Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під заг. ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра: В 5 т. – Т. 5.
65. *Кушнір Р. М., Процюк Б. В., Синюта В. М.* Квазістатичні температурні напруження в багатошаровому термочутливому циліндрі // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2004. – **40**, № 4. – С. 7–16.
Te same: *Kushnir R. M., Protsyuk B. V., Synyuta V. M.* Quasistatic temperature stresses in a multilayer thermally sensitive cylinder // *Mater. Sci.* – 2004. – **40**, No. 4. – P. 433–445.
66. *Кушнір Р. М., Ясінський А. В.* Обернена задача термопружності для неоднорідного циліндра за неповної інформації про теплове навантаження // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2007. – **50**, № 3. – С. 140–145.
67. *Лохов В. А., Няшин Ю. И., Кучумов А. Г., Менар М., Гачкевич А. Р., Будз С. Ф., Онышко А. Е.* Применение материалов с эффектом памяти формы при лечении заболеваний зубочелюстной системы // *Рос. журн. биомеханики.* – 2008. – **12**, № 4 (42). – С. 7–17.
Te same: *Lokhov V. A., Nyashin Y. I., Kuchumov A. G., Mesnard M., Gachkevich A. R., Budz S. F., Onyshko O. Y.* Application of shape memory alloy materials to the dentofacial pathology treatment // *Russian J. Biomech.* – 2008. – **12**, No. 4 (42). – P. 7–16.
68. *Мартиняк Р. М.* Механотермодифузійна взаємодія тіл з врахуванням заповнювача міжконтактних зазорів // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2000. – **36**, № 2. – С. 124–126.
Te same: *Martyniak R. M.* Mechanothermodiffusion interaction of bodies with regard for the filler of intercontact gaps // *Mater. Sci.* – 2000. – **36**, No. 4. – P. 300–304.
69. *Нагірний Т. С., Червінка К. А.* Термодинамічні моделі та методи термомеханіки із врахуванням приповерхневої та структурної неоднорідностей. Основи наномеханіки I. – Львів: Сплайн, 2012. – 264 с.
70. *Осадчук В. А.* Напряженно-деформированное состояние и предельное равновесие оболочек с разрезами. – Киев: Наук. думка, 1985. – 224 с.
71. *Панасюк В. В., Подстригач Я. С., Ярема С. Я.* Температурные напряжения в стенках барабанов котлов высокого давления // *Вопросы машиноведения и прочности в машиностроении.* – 1956. – **5**, вып. 4. – С. 5–24.
72. *Пелех Б. Л., Максимук А. В., Коровайчук И. М.* Контактные задачи для слоистых элементов конструкций и тел с покрытиями. – Киев: Наук. думка, 1988. – 280 с.

73. *Пелех Я. Н., Солодяк М. Т.* Расчет электромагнитного поля в проводящем ферромагнитном слое // *Мат. методы и физ.-мех. поля.* – 1984. – Вып. 19. – С. 91–95.
74. *Підстригач Я. С.* Вибрані праці. – Київ: Наук. думка, 1995. – 461 с.
75. *Підстригач Я. С.* Дифференціальні рівняння дифузійної теорії деформації твердого тіла // *Доп. АН УРСР.* – 1963. – № 3. – С. 336–340.
76. *Підстригач Я. С.* Дифференціальні рівняння задачі термодифузії в твердому деформованому ізотропному тілі // *Доп. АН УРСР.* – 1961. – № 2. – С. 169–172.
77. *Підстригач Я. С., Бурак Я. Й., Галапац Б. П.* Варіаційна форма рівнянь термоелектропружності // *Доп. АН УРСР. Сер. А.* – 1972. – № 2. – С. 156–160.
78. *Підстригач Я. С., Ємельянов О. І.* Дифференціальні рівняння моделі термопружного тіла з дислокаціями // *Доп. АН УРСР.* – 1985. – № 1. – С. 32–35.
79. *Підстригач Я. С., Павлина В. С.* Дифузія в нерівномірно нагрітому деформованому шарі при наявності масообміну з оточуючим середовищем // *Укр. фіз. журн.* – 1962. – 7, № 6. – С. 652–660.
80. *Підстригач Я. С., Ярема С. Я.* Температурні напруження в оболонках. – Київ: Вид-во АН УРСР, 1961. – 212 с.
81. *Подстригач Я. С.* Диффузионная теория неупругости металлов // *Журн. прикл. механики и техн. физики.* – 1965. – № 2. – С. 67–72.
Te same: *Podstrigach Ya. S.* Diffusion theory of the anelasticity of metals // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* – 1965. – 6, No. 2. – P. 56–60.
82. *Подстригач Я. С.* О влиянии термоупругого рассеяния на напряженное состояние деформируемого тела // *Изв. АН СССР. Механика и машиностроение.* – 1960. – № 4. – С. 73–78.
83. *Подстригач Я. С.* Об одной нелокальной теории деформирования твердых тел // *Прикл. механика.* – 1967. – 3, № 2. – С. 71–76.
Te same: *Podstrigach Ya. S.* On a nonlocal theory of solid body deformation // *Soviet Appl. Mech.* – 1967. – 3, No. 2. – P. 44–46.
84. *Подстригач Я. С.* Температурное поле в системе твердых тел, сопряженных с помощью тонкого промежуточного слоя // *Инж.-физ. журн.* – 1963. – 6, № 10. – С. 129–136.
85. *Подстригач Я. С., Бурак Я. И., Асташкин В. И.* Основные уравнения процесса деформации многокомпонентных твердых тел при аллотропических превращениях // *Прикл. механика.* – 1977. – 13, № 10. – С. 43–49.
Te same: *Podstrigach Ya. S., Burak Ya. I., Astashkin V. I.* Fundamental equations of process of deformation of multicomponent solids under allotropic transformation // *Soviet Appl. Mech.* – 1977. – 13, No. 10. – P. 1050–1055.
86. *Подстригач Я. С., Бурак Я. И., Галапац Б. П., Гнидец Б. М.* Исходные уравнения теории деформации электропроводных твердых растворов // *Мат. методы и физ.-мех. поля.* – 1975. – Вып. 1. – С. 22–29.
87. *Подстригач Я. С., Бурак Я. И., Гачкевич А. Р., Чернявская Л. В.* Термоупругость электропроводных тел. – Киев: Наук. думка, 1977. – 247 с.
88. *Подстригач Я. С., Бурак Я. И., Кондрат В. Ф.* Магнитотермоупругость электропроводных тел. – Киев: Наук. думка, 1982. – 293 с.
89. *Подстригач Я. С., Бурак Я. И., Шелепец В. И. др.* Оптимизация и управление в электровакуумном производстве. – Киев: Наук. думка, 1980. – 215 с.
90. *Подстригач Я. С., Колодий Б. И.* Двумерное неустановившееся поле температуры и напряжений при индукционном нагреве упругого полупространства // *Прикл. механика.* – 1970. – 6, № 12. – С. 68–73.
Te same: *Podstrigach Ya. S., Kolodii B. I.* Two-dimensional unsteady temperature and stress field in induction heating of an elastic half-space // *Soviet Appl. Mech.* – 1970. – 6, No. 12. – P. 1329–1333.
91. *Подстригач Я. С., Колодий Б. И.* Температурные поля и напряжения при индукционном нагреве упругого слоя // *Тепловые напряжения в элементах конструкций.* – 1970. – Вып. 10. – С. 208–214.
92. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М.* Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. – Киев: Наук. думка, 1972. – 308 с.
93. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М.* Обобщенная термомеханика. – Киев: Наук. думка, 1976. – 310 с.
94. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М., Семерак М. М.* Температурные поля и напряжения в элементах электровакуумных приборов. – Киев: Наук. думка, 1981. – 342 с.
95. *Подстригач Я. С., Ломакин В. А., Коляно Ю. М.* Термоупругость тел неоднородной структуры. – Москва: Наука, 1984. – 368 с.

96. *Подстригач Я. С., Павлина В. С.* Дифференциальные уравнения термодинамических процессов в n -компонентном твердом растворе // *Физ.-хим. механика материалов.* – 1965. – **1**, № 4. – С. 383–389.
 The same: *Podstrigach Ya. S., Pavlina V. S.* Differential equations of thermodynamic processes in n -component solid solutions // *Soviet Mater. Sci.* – 1966. – **1**, No. 4. – P. 259–264.
97. *Подстригач Я. С., Повстенко Ю. З.* Введение в механику поверхностных явлений в деформируемых твердых телах. – Киев: Наук. думка, 1985. – 200 с.
98. *Подстригач Я. С., Швец Р. Н.* К теории термоупругого внутреннего трения в твердых телах // *Внутреннее трение в металлах и сплавах.* – Москва: Наука, 1966. – С. 216–221.
99. *Подстригач Я. С., Швец Р. Н.* Термоупругость тонких оболочек. – Киев: Наук. думка, 1978. – 343 с.
100. *Подстригач Я. С., Швец Р. Н., Павлина В. С.* Квазистатическая задача термодиффузии для деформируемых твердых тел // *Прикл. механика.* – 1971. – **7**, № 12. – С. 11–16.
 The same: *Podstrigach Ya. S., Shvets R. N., Pavlina V. S.* The quasistatic problem of thermal diffusion for deformed solid bodies // *Soviet Appl. Mech.* – 1971. – **7**, No. 12. – P. 1300–1304.
101. *Подстригач Я. С., Шевчук П. Р.* Влияние тонких покрытий и промежуточных слоев на диффузионные процессы и на напряженное состояние в твердых телах // *Защитные покрытия на металлах.* – 1971. – Вып. 5. – С. 180–185.
102. *Подстригач Я. С., Шевчук П. Р.* Исследование напряженного состояния твердых тел с инородными включениями и тонкими покрытиями при изменении температуры // *Проблемы прочности.* – 1970. – № 11. – С. 37–40.
 The same: *Podstrigach Ya. S., Shevchuk P. R.* Temperature dependence of the stress state of solids with foreign inclusions and thin coatings // *Strength Mater.* – 1970. – **2**, No. 11. – P. 1128–1131.
103. *Подстригач Я. С., Шевчук П. Р., Онуфрик Т. М., Повстенко Ю. З.* Поверхностные явления в твердых телах с учетом взаимосвязи физико-механических процессов // *Физ.-хим. механика материалов.* – 1975. – **11**, № 2. – С. 36–43.
 The same: *Podstrigach Ya. S., Shevchuk P. R., Onufrik T. M., Povstenko Yu. Z.* Surface phenomena in solids taking into account physicomachanical processes // *Soviet Mater. Sci.* – 1975. – **11**, No. 2. – P. 162–167.
104. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1984. – 264 с.
105. *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – Київ: Наук. думка, 2002. – 416 с.
106. *Скоробогатько В. Я.* Теория ветвящихся цепных дробей и ее применения в вычислительной математике. – Москва: Наука, 1983. – 312 с.
107. *Солодкий М., Тарлаковский Д., Терлецкий Р., Шимчак И.* Вариант модели электромагнитотермомеханики деформируемых твердых тел с учетом моментных факторов // In: *Manufacturing processes. Actual problems.* – Vol. II. Modelling and optimization of manufacturing processes. – *Studia i monografie.* – Z. 331 / Pod red. nauk.: M. Gajek, O. Hachkevych, A. Stanik-Besler. – Opole: Oficyna Wydawnicza Politechniki Opolskiej, 2013. – Гл. 4. – С. 63–74.
108. *Хай М. В.* Вибрані праці. – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2004. – 200 с.
109. *Хай М. В.* Двумерные интегральные уравнения типа ньютоновского потенциала и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1993. – 253 с.
110. *Чапля Є. Я., Чернуха О. Ю.* Математичне моделювання дифузійних процесів у випадкових і регулярних структурах. – Київ: Наук. думка, 2009. – 302 с.
111. *Чапля Є. Я., Чернуха О. Ю.* Фізико-математичне моделювання гетеродифузного масопереносу. – Львів: Сполом, 2003. – 128 с.
112. *Чумак К. А., Мартиняк Р. М.* Термопружна взаємодія тіл з регулярною текстурою поверхонь за наявності теплопроникного середовища в міжконтактних зазорах // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2013. – **56**, № 1. – С. 52–61.
 The same: *Chumak K. A., Martyniak R. M.* Thermoelastic interaction of the bodies with regular surface textures in the presence of heat-permeable media in the intercontact gaps // *J. Math. Sci.* – 2014. – **201**, No. 1. – P. 60–71.
113. *Швец Р. Н., Мартиняк Р. М.* Термоупругое контактное взаимодействие тел при наличии поверхностных теплофизических неоднородностей // *Мат. методы и физ.-мех. поля.* – 1988. – Вып. 27. – С. 23–28.

- Te same: *Shvets R. N., Martynyak R. M.* Thermoelastic contact interaction of bodies in the presence of surface thermophysical irregularities // *J. Soviet Math.* – 1992. – **62**, No. 1. – С. 2512–2517.
114. *Экологические аспекты производства и среды /* Науч. ред. А. Гачкевич. – *Studia i monografie.* – Z. 237. – Opole: Oficyna Wydawnicza Politechniki Opolskiej, 2008. – 146 с.
 115. *Burak Ya., Kondrat V., Hrytsyna O.* An introduction of the local displacements of mass and electric charge phenomena into the model of the mechanics of polarized electromagnetic solids // *J. Mech. Mater. Struct.* – 2008. – **3**, No. 6. – P. 1037–1046.
 116. *Burak Ya., Nahirnyj T., Tchervinka K.* Local gradient thermomechanics // In: *Encyclopedia of Thermal Stresses /* Ed. R. B. Hetnarski. – Springer, 2014. – Vol. 6. – P. 2794–2801.
 117. *Chekurin V. F.* Thermoelasticity of semiconductors: the many-continuum thermodynamic approach // In: *Encyclopedia of Thermal Stresses /* Ed. R. B. Hetnarski. – Springer, 2014. – Vol. 11. – P. 5844–5858.
 118. *Drobenko B., Hachkevych O., Kournyts'kyi T.* A mathematical simulation of high-temperature induction heating of electroconductive solids // *Int. J. Heat Mass Transf.* – 2007. – **50**, No. 3-4. – P. 616–624.
 119. *Drobenko B., Hachkevych O.* Thermomechanics of electroconductive solids // In: *Encyclopedia of Thermal Stresses /* Ed. R. B. Hetnarski. – Springer, 2014. – Vol. 11. – P. 6052–6063.
 120. *Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Kochubei A. N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. – Basel: Birkhäuser, 2004. – 390 p. – Ser. Operator Theory: Adv. and Appl. – Vol. 152.
 121. *Gaczekiewicz A., Kasperski Z.* Modele i metody matematyczne w zagadnieniach brzegowych termomechaniki ciał przewodzących. – Opole: Oficyna Wydawnicza Politechniki Opolskiej, 1999. – 367 s.
 122. *Gafiychuk V. V., Datsko B. Y.* Stability analysis and oscillatory structures in time-fractional reaction-diffusion systems // *Phys. Rev. E.* – 2007. – **75**, No. 5. – 055201(R).
 123. *Gafiychuk V., Lubashevsky I.* Nonlinear theory and modeling of the free boundaries arising in distributed media. – Lviv: VNTL Publ., 2001. – 367 p. – *Math. Studies: Monograph Ser.* – Vol. 9.
 124. *Hachkevych O., Szymczak J.* Wyznaczenie quazi-ustalonych pól elektromagnetycznych w termomechanice powłók przewodzących. – *Studia i monografie.* – Z. 304. – Opole: Oficyna Wydawnicza Politechniki Opolskiej, 2011. – 245 s.
 125. *Kit H.* Potential methods in the spatial problems of heat conduction and thermoelasticity for solids with cracks // In: *Encyclopedia of Thermal Stresses /* Ed. R. B. Hetnarski. – Springer, 2014. – Vol. 7. – P. 4007–4013.
 126. *Kushnir R. M.* Generalized conjugation problems in mechanics of piecewise-homogeneous elements of constructions // *Z. angew. Math. Mech.* – 1996. – **76**, No. S5. – P. 283–284.
 127. *Kushnir R. M., Popovych V. S.* Heat conduction problems of thermosensitive solids under complex heat exchange // In: *Heat conduction – Basic research /* V. S. Vikhrenko (ed.). – Rijeka: InTech (Croatia), 2011. – 350 p. – (Chap. 6. – P. 131–154.) – <http://www.intechopen.com/books/show/title/heat-conduction-basic-research>.
 128. *Kushnir R. M., Popovych V. S., Yanishevsky V. V.* Thermal and thermoelastic state of thin-walled thermosensitive structures subject to complex heat exchange // *J. Therm. Stresses.* – 2012. – **35**, No. 1-3. – P. 91–102.
 129. *Kushnir R. M., Yasinsky A. V.* Optimal heating control of thermosensitive bodies under plastic deformation of material // *J. Eng. Math.* – 2013. – **78**, No. 1. – P. 83–98.
 130. *Kushnir R., Popovych V.* Application of the generalized functions method for analysis of thermal stresses in piecewise-homogeneous solids // In: *Encyclopedia of Thermal Stresses /* Ed. R. B. Hetnarski. – Springer, 2014. – Vol. 1. – P. 224–230.
 131. *Kushnir R., Protsiuk B.* A method of the Green's functions for quasistatic thermoelasticity problems in layered thermosensitive bodies under complex heat exchange // *Oper. Theor. Adv. Appl.: Modern Anal. Appl.* – 2009. – **191**. – P. 143–154.
 132. *Kushnir R., Protsiuk B.* Determination of the thermal fields and stresses in multilayer solids by means of the constructed Green functions // In: *Encyclopedia of Thermal Stresses /* Ed. R. B. Hetnarski. – Springer, 2014. – Vol. 2. – P. 924–931.

133. *Manufacturing* processes. Actual problems. – Vol. II. Modelling and optimization of manufacturing processes. – Studia i monografie / Pod red. nauk.: M. Gajek, O. Hachkevych, A. Stanik-Besler. – Z. 365. – Opole: Oficyna Wydawnicza Politechniki Opolskiej, 2013. – 270 p.
134. *Manufacturing* processes. Some problems. – Vol. II. Modelling and optimization of manufacturing processes. – Studia i monografie / Pod red. nauk.: M. Gajek, O. Hachkevych, A. Stanik-Besler. – Z. 331. – Opole: Oficyna Wydawnicza Politechniki Opolskiej, 2012. – 245 p.
135. *Popovych V.* Methods for determination of the thermo-stressed state of thermo-sensitive solids under complex heat exchange conditions // In: Encyclopedia of Thermal Stresses / Ed. R. B. Hetnarski. – Springer, 2014. – Vol. 6. – P. 2997–3008.
136. *Povstenko Yu.* Fractional thermoelasticity // In: Encyclopedia of Thermal Stresses / Ed. R. B. Hetnarski. – Springer, 2014. – Vol. 4. – P. 1778–1787.
137. *Shevchuk V. A.* Generalized boundary conditions to solving thermal stress problems for bodies with thin coatings // In: Encyclopedia of Thermal Stresses / Ed. R. B. Hetnarski. – Springer, 2014. – Vol. 4. – P. 1942–1953.
138. *Shvets R., Flyachok V.* Thermoelasticity of thin shells // In: Encyclopedia of Thermal Stresses / Ed. R. B. Hetnarski. – Springer, 2014. – Vol. 11. – P. 5858–5870.
139. *Sulym G., Pasternak I.* Jump function method and BEM technique for determination of thermal stresses in solids with thin inclusions // In: Encyclopedia of Thermal Stresses / Ed. R. B. Hetnarski. – Springer, 2014. – Vol. 5. – P. 2605–2619.
140. *Tokovyy Yu. V., Rychahivskyy A. V.* Reduction of plane thermoelasticity problem in inhomogeneous strip to integral Volterra type equation // Math. Model. Anal. – 2005. – **10**, No.1. – P. 91–100.
141. *Tokovyy Yu., Kalynyak B., Ma C.-C.* Nonhomogeneous solids: integral equations approach // In: Encyclopedia of Thermal Stresses / Ed. R. B. Hetnarski. – Springer, 2014. – Vol. 7. – P. 3350–3356.
142. *Yasinskyyy A. V.* Determination and optimization of stress state of bodies on the basis of inverse thermoelasticity problems // In: Encyclopedia of Thermal Stresses / Ed. R. B. Hetnarski. – Springer, 2014. – Vol. 2. – P. 916–924.
143. *Yevtushenko A., Kuciej M.* One-dimensional analytical models of frictional heating during braking // In: Encyclopedia of Thermal Stresses / Ed. R. B. Hetnarski. – Springer, 2014. – Vol. 7. – P. 3445–3452.

ИЗБРАННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ СВЯЗАННЫХ ПОЛЕЙ

Приведен краткий анализ исследований, выполненных в последние годы в Львовской научной школе по механике связанных полей, по проблемам построения и обобщения математических моделей и методов описания, определения и оптимизации термомеханического состояния тел при комплексном воздействии силовых, тепловых и электромагнитных нагрузений.

SELECTED PROBLEMS OF MECHANICS OF COUPLED FIELDS

A brief analysis of investigations, carried out in recent years in Lviv scientific school in mechanics of coupled fields, on the problems of construction and generalization of mathematical models and methods of description, determination and optimization of the thermomechanical behavior of the bodies under the complex action of force, heat and electromagnetic loadings.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
21.04.16