

## ВПЛИВ ЗМІНИ ПАРАМЕТРІВ ОРТОТРОПІІ НА НАПРУЖЕНИЙ СТАН ПОРОЖНИСТИХ ЦИЛІНДРІВ З УГНУТИМ ГОФРОВАНИМ ПОПЕРЕЧНИМ ПЕРЕРІЗОМ

*У просторовій постановці із застосуванням методу апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є проведено аналіз впливу параметрів ортотропії на напружений стан порожнистих циліндрів з поперечним перерізом у вигляді з'єднаних угнутих напівгофрів, що знаходяться під дією внутрішнього тиску при певних умовах на торцях. результати дослідження напруженого стану наведено у вигляді графіків і таблиці.*

На сучасному етапі розвитку науки і техніки збільшується кількість конструкцій і їх елементів, виконаних у вигляді оболонок з круговою та не круговою формою поперечного перерізу [5, 14]. Використання конструкцій подібного типу дає змогу задовольнити вимоги, пов'язані зі зменшенням ваги конструкції без зниження її несучої здатності. Оболонкові конструкції широко застосовують в аерокосмічній, автомобільній промисловості, при будівництві споруд та ін. [10, 11, 15].

Складні умови експлуатації конструкцій і їх елементів призводять до необхідності використання різноманітних композитних матеріалів, що здатні значно підвищити їх надійність і вагову ефективність [6, 9, 16].

Розрахунки напружено-деформованого стану елементів конструкцій здійснюється на основі сучасних розрахункових схем, які вдало поєднують аналітичні та чисельні методи [12, 13].

Ця стаття є продовженням досліджень напружено-деформованого стану циліндрів з некруговою формою поперечного перерізу. Розглядаються порожнисті циліндри, поперечний переріз яких являє собою з'єднані угнуті напівгофри, описані за допомогою укороченої гіпоциклоїди. Задачу розв'язано в просторовій постановці із використанням аналітичних методів відокремлення змінних, апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є [8] та чисельного методу дискретної ортогоналізації [1].

**1. Постановка задачі.** В ортогональній криволінійній системі координат  $s, \psi, \gamma$ , де  $s$  – довжина дуги твірної,  $\psi, 0 \leq \psi \leq 2\pi$ , – кутовий параметр, центральний кут в поперечному перерізі,  $\gamma, \gamma_1 \leq \gamma \leq \gamma_2$ , – нормальна координата по товщині циліндра, розглядаємо пружні порожнисті циліндри сталої товщини під дією внутрішнього тиску  $q = q_0 \sin(\pi s/\ell)$ ,  $q_0 = \text{const}$ .

Напрягну середньої поверхні задаємо укороченою гіпоциклоїдою [3] в параметричній формі у вигляді

$$\begin{aligned} x &= (A - a) \cos \psi + \lambda a \cos\left(\frac{A - a}{a} \psi\right), \\ y &= (A - a) \sin \psi - \lambda a \sin\left(\frac{A - a}{a} \psi\right). \end{aligned}$$

Тут  $A$  – радіус нерухомого кола;  $a, a > 0$ , – радіус рухомого кола;  $\lambda a, \lambda < 1$ , – відстань до центра рухомого кола.

Першу квадратичну форму у вибраній криволінійній ортогональній системі координат запишемо у вигляді

$$dS^2 = ds^2 + B_2^2(\psi, \gamma) d\psi^2 + d\gamma^2,$$

де

$$B_2 = B_2(\psi, \gamma) = H_2(\psi, \gamma)\omega(\psi), \quad H_2 = H_2(\psi, \gamma) = 1 + \frac{\gamma}{R(\psi)},$$

$$\omega = \omega(\psi) = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\psi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\psi}\right)^2}, \quad R_\psi = R(\psi) = \frac{\left(\left(\frac{dx}{d\psi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\psi}\right)^2\right)^{3/2}}{\frac{dx}{d\psi} \frac{d^2y}{d\psi^2} - \frac{dy}{d\psi} \frac{d^2x}{d\psi^2}},$$

$\omega$  – коефіцієнт переходу від координати дуги напрямної до кутового параметра  $\psi$ ,  $R_\psi$  – радіус кривини серединної поверхні в поперечному перерізі.

За вихідні приймаємо рівняння просторової теорії пружності для анізотропного тіла [4]. На торцях циліндра розглядаємо умови простого опирання

$$\sigma_s = 0, \quad u_\psi = 0, \quad u_\gamma = 0 \quad \text{при} \quad s = 0, \quad s = \ell, \quad (1)$$

Граничні умови на бічних поверхнях мають вигляд

$$\sigma_\gamma = q_\gamma, \quad \tau_{s\gamma} = 0, \quad \tau_{\psi\gamma} = 0 \quad \text{при} \quad \gamma = \gamma_1, \quad (2)$$

$$\sigma_\gamma = 0, \quad \tau_{s\gamma} = 0, \quad \tau_{\psi\gamma} = 0 \quad \text{при} \quad \gamma = \gamma_2. \quad (3)$$

Приймемо за розв'язувальні функції компоненти напружень  $\sigma_\gamma$ ,  $\tau_{s\gamma}$ ,  $\tau_{\psi\gamma}$  і переміщень  $u_\gamma$ ,  $u_s$ ,  $u_\psi$ . Після певних перетворень з основних рівнянь отримаємо розв'язувальну систему диференціальних рівнянь із частинними похідними шостого порядку зі змінними коефіцієнтами, що описує тривимірну крайову задачу:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_\gamma}{\partial \gamma} &= (c_2 - 1) \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \sigma_\gamma - \frac{\partial \tau_{s\gamma}}{\partial s} - \frac{1}{B_2} \frac{\partial \tau_{\psi\gamma}}{\partial \psi} + b_{22} \left( \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \right)^2 u_\gamma + \\ &+ b_{12} \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \frac{\partial u_s}{\partial s} + b_{22} \frac{1}{H_2^2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \frac{1}{\omega} \frac{\partial u_\psi}{\partial \psi}, \\ \frac{\partial \tau_{s\gamma}}{\partial \gamma} &= -c_1 \frac{\partial \sigma_\gamma}{\partial s} - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \tau_{s\gamma} - b_{12} \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \frac{\partial u_\gamma}{\partial s} - b_{11} \frac{\partial^2 u_s}{\partial s^2} - \\ &- b_{66} \frac{1}{B_2} \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \frac{1}{B_2} \frac{\partial u_s}{\partial \psi} \right) - (b_{12} + b_{66}) \frac{1}{B_2} \frac{\partial^2 u_\psi}{\partial s \partial \psi}, \\ \frac{\partial \tau_{\psi\gamma}}{\partial \gamma} &= -c_2 \frac{1}{B_2} \frac{\partial \sigma_\gamma}{\partial \psi} - \frac{2}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \tau_{\psi\gamma} - b_{22} \frac{1}{B_2} \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} u_\gamma \right) - \\ &- (b_{12} + b_{66}) \frac{1}{B_2} \frac{\partial^2 u_s}{\partial s \partial \psi} - b_{22} \frac{1}{B_2} \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \frac{1}{B_2} \frac{\partial u_\psi}{\partial \psi} \right) - b_{66} \frac{\partial^2 u_\psi}{\partial s^2}, \\ \frac{\partial u_\gamma}{\partial \gamma} &= c_4 \sigma_\gamma - c_2 \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} u_\gamma - c_1 \frac{\partial u_s}{\partial s} - c_2 \frac{1}{B_2} \frac{\partial u_\psi}{\partial \psi}, \\ \frac{\partial u_s}{\partial \gamma} &= a_{55} \tau_{s\gamma} - \frac{\partial u_\gamma}{\partial s}, \quad \frac{\partial u_\psi}{\partial \gamma} = a_{44} \tau_{\psi\gamma} - \frac{1}{B_2} \frac{\partial u_\gamma}{\partial \psi} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} u_\psi, \end{aligned} \quad (4)$$

з граничними умовами (1)–(3). Коефіцієнти

$$\begin{aligned} b_{11} &= a_{22} a_{66} / \Omega, \quad b_{12} = -a_{12} a_{66} / \Omega, \\ b_{22} &= a_{11} a_{66} / \Omega, \quad b_{66} = (a_{11} a_{22} - a_{12}^2) / \Omega, \quad \Omega = (a_{11} a_{22} - a_{12}^2) a_{66}, \\ c_1 &= -(b_{11} a_{13} + b_{12} a_{23}), \quad c_2 = -(b_{12} a_{13} + b_{22} a_{23}), \\ c_4 &= a_{33} + c_1 a_{13} + c_2 a_{23}, \end{aligned}$$

визначаємо через механічні параметри таким чином:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{E_s}, & a_{12} &= -\frac{\nu_{s\psi}}{E_\psi} = -\frac{\nu_{\psi s}}{E_s}, & a_{13} &= -\frac{\nu_{s\gamma}}{E_\gamma} = -\frac{\nu_{\gamma s}}{E_s}, \\ a_{22} &= \frac{1}{E_\psi}, & a_{23} &= -\frac{\nu_{\gamma\psi}}{E_\psi} = -\frac{\nu_{\psi\gamma}}{E_\gamma}, & a_{33} &= \frac{1}{E_\gamma}, \\ a_{44} &= \frac{1}{G_{\psi\gamma}}, & a_{55} &= \frac{1}{G_{s\gamma}}, & a_{66} &= \frac{1}{G_{s\psi}}. \end{aligned}$$

Тут  $E_s$ ,  $E_\psi$ ,  $E_\gamma$  – модулі пружності в напрямку осей координат,  $G_{\psi\gamma}$ ,  $G_{s\gamma}$ ,  $G_{s\psi}$  – модулі зсуву,  $\nu_{\psi\gamma}$ ,  $\nu_{s\gamma}$ ,  $\nu_{s\psi}$ ,  $\nu_{\gamma\psi}$ ,  $\nu_{\gamma s}$ ,  $\nu_{\psi s}$  – відповідні коефіцієнти Пуассона.

Співвідношення (1)–(4) складають замкнену систему диференціальних рівнянь із частинними похідними, що описує напружений стан циліндрів розглядуваного класу в області  $\{0 \leq s \leq \ell, 0 \leq \psi \leq 2\pi, \gamma_1 \leq \gamma \leq \gamma_2\}$ .

**2. Метод розв'язування.** Наявність граничних умов (1) дає змогу відокремити змінні вздовж твірної циліндра. Для цього компоненти навантаження і розв'язувальні функції подамо у вигляді розвинень в ряди Фур'є за координатою  $s$ :

$$\begin{aligned} X(s, \psi, \gamma) &= \sum_{n=1}^N X_n(\psi, \gamma) \sin \lambda_n s, \\ Y(s, \psi, \gamma) &= \sum_{n=0}^N Y_n(\psi, \gamma) \cos \lambda_n s. \end{aligned} \quad (5)$$

Тут  $X = \{\sigma_\gamma, \tau_{\psi\gamma}, u_\gamma, u_\psi, q_\gamma\}$ ,  $Y = \{\tau_{s\gamma}, u_s\}$ ,  $\lambda_n = \frac{\pi n}{\ell}$ ,  $0 \leq s \leq \ell$ .

Підставивши ряди (5) у розв'язувальну систему диференціальних рівнянь (4) та відповідні граничні умови (1)–(3) і відокремивши змінні, дістанемо розв'язувальну систему диференціальних рівнянь із частинними похідними зі змінними коефіцієнтами, що описує двовимірну крайову задачу для кожного члена розвинень (5) [2].

Для відокремлення змінних у напрямку напрямної циліндра за координатою  $\psi$  замінимо добутки розв'язувальних функцій на коефіцієнти, що перешкоджають цьому відокремленню, доповняльними функціями  $\Phi_{i,n}^j$ ,  $i = 1, \dots, 7$ ,  $j = 1, \dots, 5$ ,  $n = 0, \dots, N$ .

Подаючи розв'язувальні, доповняльні функції та компоненти навантаження у вигляді розвинень у ряди Фур'є за координатою  $\psi$ :

$$\begin{aligned} \tilde{X}(\psi, \gamma) &= \sum_{k=0}^K \tilde{X}_k(\gamma) \cos k\psi, & \tilde{Y}(\psi, \gamma) &= \sum_{k=1}^K \tilde{Y}_k(\gamma) \sin k\psi, \\ \tilde{X} &= \{\sigma_\gamma, \tau_{s\gamma}, u_\gamma, u_s, \Phi_1^j, \Phi_4^j, \Phi_6, q_\gamma\} \\ \tilde{Y} &= \{\tau_{\psi\gamma}, u_\psi, \Phi_2^j, \Phi_3^j, \Phi_5, \Phi_7\}, \end{aligned} \quad (6)$$

та підставляючи їх у розв'язувальну систему диференціальних рівнянь і відповідні граничні умови, після відокремлення змінних дістаємо систему звичайних диференціальних рівнянь відносно амплітудних значень рядів (6) у вигляді

$$\frac{d\sigma_{\gamma,k}}{d\gamma} = (c_2 - 1)\Phi_{1,k}^1 + \lambda_n \tau_{s\gamma,k} - \Phi_{4,k}^1 + b_{22}\Phi_{1,k}^5 + b_{12}\lambda_n \Phi_{1,k}^4 + b_{22}\Phi_{4,k}^3,$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\tau_{s\gamma,k}}{d\gamma} &= -c_1\lambda_n\sigma_{\gamma,k} + b_{11}\lambda_n^2u_{s,k} - \varphi_{1,k}^2 - b_{12}\lambda_n\varphi_{1,k}^3 - b_{66}\varphi_{6,k} - \\
&\quad - (b_{12} + b_{66})\lambda_n\varphi_{4,k}^2, \\
\frac{d\tau_{\psi\gamma,k}}{d\gamma} &= b_{66}\lambda_n^2u_{\psi,k} - c_2\varphi_{3,k}^1 - 2\varphi_{2,k}^1 - b_{22}\varphi_{5,k} - \\
&\quad - (b_{12} + b_{66})\lambda_n\varphi_{3,k}^3 - b_{22}\varphi_{7,k}, \\
\frac{du_{\gamma,k}}{d\gamma} &= c_4\sigma_{\gamma,k} + c_1\lambda_nu_{s,k} - c_2\varphi_{4,k}^2 - c_2\varphi_{1,k}^3, \\
\frac{du_{s,k}}{d\gamma} &= a_{55}\tau_{s\gamma,k} - \lambda_nu_{\gamma,k}, \\
\frac{du_{\psi,k}}{d\gamma} &= a_{44}\tau_{\psi\gamma,k} - \varphi_{3,k}^2 + \varphi_{2,k}^2, \quad k = 0, \dots, K,
\end{aligned} \tag{7}$$

з граничними умовами

$$\sigma_{\gamma,k} = q_{\gamma,k}, \quad \tau_{s\gamma,k} = 0, \quad \tau_{\psi\gamma,k} = 0 \quad \text{при} \quad \gamma = \gamma_1, \tag{8}$$

$$\sigma_{\gamma,k} = 0, \quad \tau_{s\gamma,k} = 0, \quad \tau_{\psi\gamma,k} = 0 \quad \text{при} \quad \gamma = \gamma_2. \tag{9}$$

У розв'язувальну систему диференціальних рівнянь (7) введено такі доповняльні функції:

$$\begin{aligned}
\varphi_{1,n}^j &= \frac{1}{H_2R_\psi} \left\{ \sigma_{\gamma,n}, \tau_{s\gamma,n}, u_{\gamma,n}, u_{s,n}, \frac{1}{H_2R_\psi} u_{\gamma,n} \right\}, \quad j = 1, \dots, 5, \\
\varphi_{2,n}^j &= \frac{1}{H_2R_\psi} \{ \tau_{\psi\gamma,n}, u_{\psi,n} \}, \quad j = 1, 2, \\
\varphi_{3,n}^j &= \frac{1}{B_2} \left\{ \frac{\partial \sigma_{\gamma,n}}{\partial \psi}, \frac{\partial u_{\gamma,n}}{\partial \psi}, \frac{\partial u_{s,n}}{\partial \psi} \right\}, \quad j = 1, 2, 3, \\
\varphi_{4,n}^j &= \frac{1}{B_2} \left\{ \frac{\partial \tau_{\psi\gamma,n}}{\partial \psi}, \frac{\partial u_{\psi,n}}{\partial \psi}, \frac{1}{R_\psi} \frac{\partial u_{\psi,n}}{\partial \psi} \right\}, \quad j = 1, 2, 3, \\
\varphi_{5,n} &= \frac{1}{B_2} \frac{\partial}{\partial \psi} \varphi_{1,n}^3, \quad \varphi_{6,n} = \frac{1}{B_2} \frac{\partial}{\partial \psi} \varphi_{3,n}^3, \\
\varphi_{7,n} &= \frac{1}{B_2} \frac{\partial}{\partial \psi} \varphi_{4,n}^2, \quad n = 0, \dots, N.
\end{aligned} \tag{10}$$

Отриману крайову задачу (8), (9) розв'язуємо стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації одночасно для всіх гармонік  $k$  розвинень (6) у ряди Фур'є. Під час інтегрування на кожному кроці застосування чисельного методу амплітудні значення доповняльних функцій обчислюємо за поточними амплітудними значеннями розв'язувальних функцій із використанням методу апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є.

**3. Числові результати.** На основі викладеного підходу проведемо дослідження залежності напруженого стану порожнистих циліндрів з угнутих гофрованим поперечним перерізом, що знаходяться під дією внутрішнього тиску, від зміни параметрів ортотропії.

Задачу розв'язано за таких вихідних даних: радіус нерухомого кола  $A = 18$ , радіус рухомого кола  $a = -2, -3$ , параметр  $\lambda = 0.4$ , товщина циліндра  $h = 2.8$ , довжина циліндра  $\ell = 60$ . Для механічних параметрів мате-

ріалу приймаємо  $\nu_{s\psi} = \nu_{\psi\gamma} = 0.3$ ,  $E_s = E_\gamma = E_0 = \text{const}$ ,  $E_\psi = \mu E_0$ ,  $G_{s\psi} = \delta E_0$ ,  $G_{s\gamma} = G_{\psi\gamma} = E_0/d$ ,  $d = 10$ . Розглядаємо п'ять варіантів ортотропії:

- 1°)  $\mu = 2$ ,  $\delta = 0.3$ ,  $\nu_{s\gamma} = 0.075$ ,
- 2°)  $\mu = 1.35$ ,  $\delta = 0.215$ ,  $\nu_{s\gamma} = 0.122$ ,
- 3°)  $\mu = 1$ ,  $\delta = 0.385$ ,  $\nu_{s\gamma} = 0.3$ ,
- 4°)  $\mu = 0.741$ ,  $\delta = 0.159$ ,  $\nu_{s\gamma} = 0.165$ ,
- 5°)  $\mu = 0.5$ ,  $\delta = 0.125$ ,  $\nu_{s\gamma} = 0.15$ .

Варіант 3° значень пружних сталей відповідає випадку ізотропного матеріалу, коли  $E_s = E_\gamma = E_\psi = E_0 = \text{const}$ ,  $G_{s\gamma} = G_{\psi\gamma} = E_0/(2(1+\nu))$ ,  $\nu_{s\gamma} = \nu_{\psi\gamma} = \nu_{s\psi} = \nu = 0.3$ .

На рис. 1 – 4 наведено результати розв'язання задачі у вигляді графіків розподілу переміщень і напружень в середньому перерізі по довжині циліндра. На рисунках криві розподілу відповідних функцій для п'яти варіантів ортотропії розташовані відповідно до їх номерів. Штриховою лінією показано криві для ізотропного випадку (варіант 3°).

На рис. 1 наведено графіки розподілу переміщень  $u_\gamma E/q_0$  серединної поверхні вздовж напрямної циліндра. Криві на рис. 1а відповідають циліндрам для  $a = -2$ , на рис. 1б – для  $a = -3$ .

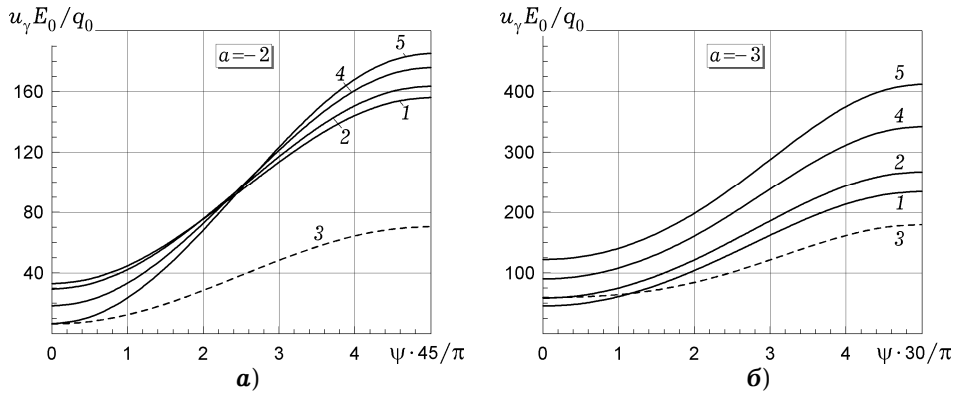


Рис. 1

З рис. 1а видно, що максимальних значень переміщення  $u_\gamma E/q_0$  досягають у зоні западини напівгофрів при  $\psi = \pi/9$  і відносяться відповідно, як 156.1 : 163.7 : 70.5 : 175.9 : 185.2. При цьому порівняно з ізотропним варіантом значення переміщень збільшуються у 2.2, 2.3, 2.5, 2.6 рази. При переході із зони з'єднання напівгофрів ( $\psi = 0$ ) до їх западини ( $\psi = \pi/9$ ) переміщення зростають відповідно у 4.7, 5.6, 11.2, 9.7, 30.8 рази для п'яти варіантів ортотропії.

Зменшення кількості напівгофрів при  $a = -3$  (рис. 1б), призводить до збільшення значень переміщень  $u_\gamma E/q_0$  для всіх варіантів ортотропії в 1.5 ÷ 2.5 рази. При цьому максимальними є значення у западині гофрів при  $\psi = \pi/6$  і порівняно з ізотропним варіантом переміщення збільшуються відповідно у 1.3, 1.5, 1.9, 2.3 рази.

На рис. 2 наведено графіки розподілу полів напружень  $\sigma_\psi^- / q_0$  на внутрішній поверхні циліндра вздовж його напрямної. Криві на рис. 2а відповідають циліндрам для  $a = -2$ , на рис. 2б – для  $a = -3$ .

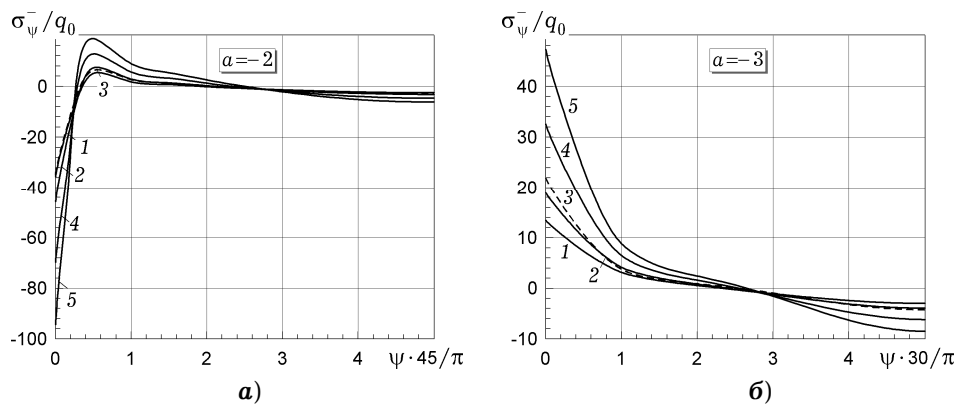


Рис. 2

На рис. 2а бачимо, що максимальних абсолютних значень напруження  $\sigma_{\psi}^{-}/q_0$  досягають у місцях з'єднання напівгофрів при  $\psi = 0$ , при цьому вони збільшуються відповідно у 1.1, 1.3, 2.1, 2.7 рази відносно значень напружень для варіанта 3°, що відповідає ізотропному випадку.

На рис. 2б спостерігаємо іншу картину розподілу полів напружень  $\sigma_{\psi}^{-}/q_0$ . Максимальними є значення у перерізі  $\psi = 0$  і порівняно з ізотропним варіантом для варіантів 1° і 2° напруження зменшуються в 1.6 і 1.2 рази, а для варіантів 4° і 5° – збільшуються відповідно у 1.5 та 2.2 рази.

На рис. 3 наведено графіки розподілу полів напружень  $\sigma_{\psi}^{+}/q_0$  на зовнішній поверхні циліндра вздовж напрямної. Криві на рис. 3а відповідають циліндрам при  $a = -2$ , на рис. 3б – для  $a = -3$ .

З рис. 3а видно, що для варіантів ортотропії 1°, 2° і 4° напруження досягають максимальних абсолютних значень у западині напівгофрів і при цьому зменшуються для варіантів 1° і 2° в 1.1 та 1.3 рази і збільшуються відповідно у 1.8 рази для варіанта ортотропії 4°. Для варіанта 5° напруження досягають свого максимуму у зоні з'єднання напівгофрів і порівняно з ізотропним варіантом збільшуються у 2.5 рази.

Для циліндрів зі значенням параметра  $a = -3$  (рис. 3б) напруження  $\sigma_{\psi}^{+}/q_0$  набувають максимальних значень у западині напівгофрів при  $\psi = \pi/6$  і відносяться як 2.48 : 3.20 : 3.20 : 4.94 : 6.78 відповідно для варіантів 1°–5° ортотропії.

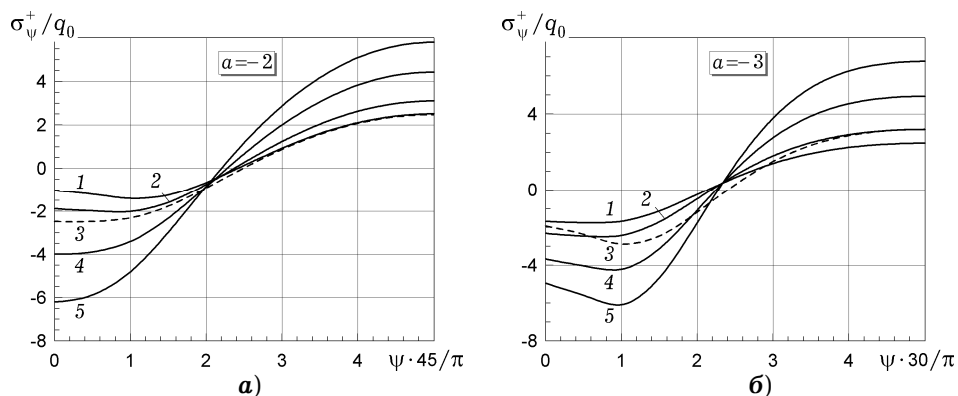


Рис. 3

У табл. 1 наведено значення напружень  $\sigma_s^-/q_0$  на внутрішній поверхні циліндра в деяких перерізах напрямної для двох значень рухомого радіуса  $a = -2, -3$  та п'яти варіантів ортотропії. Максимальних абсолютних значень напруження досягають у зоні з'єднання напівгофрів ( $\psi = 0$ ) як для  $a = -2$ , так і для  $a = -3$ . При цьому порівняно з ізотропним варіантом  $3^\circ$  значення напружень збільшуються у  $1.8 \div 1.4$  рази для  $a = -2$  і в  $1.2 \div 1.1$  рази для  $a = -3$ . Починаючи з перерізу  $\psi = \pi/45$  для  $a = -2$  та  $\psi = \pi/30$  для  $a = -3$ , значення напружень мало відрізняються один від одного.

Таблиця 1

a	$\psi$	$\sigma_s^-/q_0$				
		1°	2°	3°	4°	5°
-2	0	-236.0	-205.2	-113.9	-172.7	-158.2
	$\pi/45$	12.54	13.08	9.97	13.47	13.83
	$2\pi/45$	0.86	1.82	2.03	2.77	3.30
	$\pi/15$	-6.79	-5.81	-3.60	-4.74	-4.24
	$4\pi/45$	-11.63	-10.67	-7.26	-9.54	-9.07
	$\pi/9$	-13.29	-12.33	-8.52	-11.19	-10.73
-3	0	94.16	89.42	77.23	84.17	82.19
	$\pi/30$	20.10	23.29	16.78	19.97	18.31
	$\pi/15$	9.69	9.12	7.79	8.50	8.13
	$\pi/10$	0.82	1.40	2.58	2.08	2.34
	$2\pi/15$	-6.31	-5.57	-4.17	-4.88	-4.66
	$\pi/6$	-9.20	-8.54	-7.38	-8.04	-7.93

Характер розподілу графіків напружень  $\sigma_s^+/q_0$  на зовнішній поверхні циліндра вздовж напрямної наведено на рис. 4.

Для варіанту  $1^\circ$  ортотропії при  $a = -2$  (рис. 4а) максимальних абсолютних значень напруження досягають у зоні западини, а для інших варіантів – у зоні з'єднання напівгофрів. Порівняно з ізотропним варіантом  $3^\circ$  величина максимальних напружень збільшується приблизно в  $1.5 \div 1.3$  рази.

При  $a = -3$  (рис. 4б) напруження  $\sigma_s^+/q_0$  набувають абсолютних максимальних значень у зоні западини напівгофрів і відносяться як  $16.19 : 14.73 : 12.28 : 13.24 : 12.62$  відповідно для п'яти варіантів ортотропії.

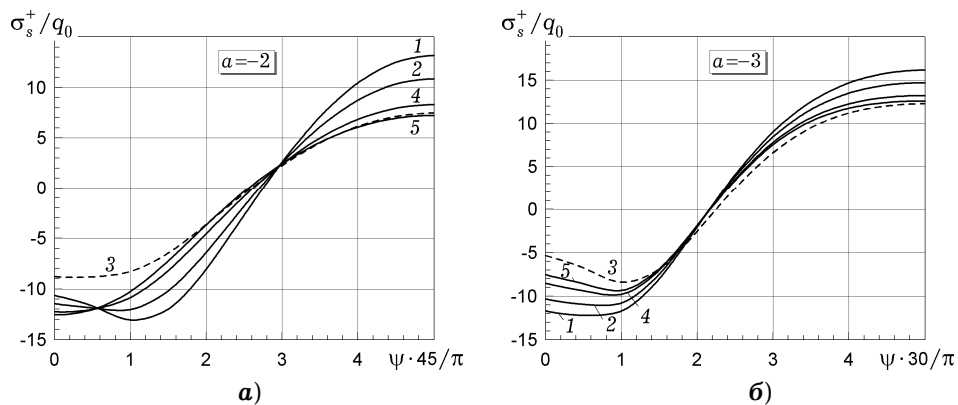


Рис. 4

**Висновки.** У просторовій постановці розв'язано задачу та проведено дослідження залежності напруженого стану ортотропних порожнистих циліндрів сталої товщини, що мають поперечний переріз у вигляді угнутих напівгофрів, який описано за допомогою укороченої гіпоциклоїди, від параметрів ортотропії для двох значень рухомого кола, що впливає на кількість напівгофрів.

Аналіз проведеного дослідження напруженого стану зазначеного класу циліндрів свідчить про одночасний вплив на напружений стан механічних і геометричних параметрів циліндрів. Таким чином, змінюючи відповідні механічні чи геометричні параметри, можна суттєво впливати на параметри, що характеризують напружено-деформований стан розглядуваних циліндрів, з метою вибору найбільш раціонального їх розподілу.

1. Годунов С. К. О численном решении краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // *Успехи мат. наук.* – 1961. – **16**, № 3(99). – С. 171–174.
2. Григоренко Я. М., Рожок Л. С. Применение дискретных рядов Фурье к решению задач о напряженном состоянии полых цилиндров с некруговым поперечным сечением // *Прикл. механика.* – 2014. – **50**, № 2. – С. 3–26.  
Te same: *Grigorenko Ya. M., Rozhok L. S. Applying discrete Fourier series to solve problems of the stress state of hollow noncircular cylinders // Int. Appl. Mech.* – 2014. – **50**, No. 2. – С. 105–127.
3. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – Москва: Наука, 1968. – 720 с.  
Te same: *Korn G. A., Korn T. M. Mathematical handbook for scientists and engineers: Definitions, theorems, and formulas for reference and review.* – New York: Dover Publ. Inc., 2000. – 1151 p.
4. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. – Москва: Наука, 1977. – 416 с.  
Te same: *Lekhnitsky S. G. Theory of elasticity of an anisotropic elastic body.* – San Francisco: Holden Day, 1963. – xi + 404 p.
5. Семенюк Н. П., Жукова Н. Б. Устойчивость и закритическое поведение волнообразных цилиндрических панелей при внешнем давлении // *Прикл. механика.* – 2013. – **49**, № 6. – С. 86–99.  
Te same: *Semenyuk N. P., Zhukova N. B. Stability and postcritical behavior of corrugated cylindrical panels under external pressure // Int. Appl. Mech.* – 2013. – **49**, No. 6. – P. 702–714.
6. Beaumont Peter W. R. On the problems of cracking and the question of structural integrity of engineering composite materials // *Appl. Compos. Mater.* – 2014. – **21**, No. 1. – P. 5–43.
7. Carpenter H. W., Reid R. G., Paskaramoorthy R. Extension of the layer removal technique for the measurement of residual stresses in layered anisotropic cylinders // *Int. J. Mech. Mater. Des.* – 2014. – **10**, No. 3. – P. 269–280.
8. Hamming R. W. Numerical methods for scientists and engineers. – New York: McGraw-Hill, 1962. – 400 p.
9. Jaberzadeh E., Azhari M. Local buckling of moderately thick stepped skew viscoelastic composite plates using the element-free Galerkin method // *Acta Mech.* – 2015. – **226**, No. 4. – P. 1011–1025.
10. Kassegne Samuel Kinde, Chun Kyoung-Sik. Buckling characteristic of multilaminated composite elliptical cylindrical shells // *Int. J. Adv. Struct. Eng. (IJASE).* – 2015. – **7**, No. 1. – P. 1–10.
11. Lubarda Vlado A. On pressurized curvilinearly orthotropic circular disk, cylinder and sphere made of radially nonuniform material // *J. Elasticity.* – 2012. – **109**, No. 2. – P. 103–133.
12. Ma Lei, Zhou Lin-yun, Wan Shui. Study of the calculation method of lateral load distribution on a continuous composite box girder bridge with corrugated steel webs // *J. Highway Transp. Res. Dev. (English Ed.).* – 2014. – **8**, No. 2. – P. 42–46.
13. Shokrollahi H., Kargarnovin M. H., Fallah F. Deformation and stress analysis of sandwich cylindrical shells with a flexible core using harmonic differential quadrature method // *J. Braz. Soc. Mech. Sci. Eng.* – 2015. – **37**, No. 1. – P. 325–337.
14. Soldatos K. P. Mechanics of cylindrical shells with non-circular cross-section: A survey // *Appl. Mech. Rev.* – 1999. – **52**, No. 8. – P. 237–274.



15. *Stier Bertram, Simon Jaan-Willem, Reese Stefanie.* Finite element analysis of layered fiber composite structures accounting for the material's microstructure and delamination // *Appl. Compos. Mater.* – 2015. – **22**, No. 2. – P. 171–187.
16. *Sun X. S., Tan V. B. C., Chen Y., Tan L. B., Jaiman R. K., Tay T. E.* Stress analysis of multi-layered hollow anisotropic composite cylindrical structures using the homogenization method // *Acta Mech.* – 2014. – **225**, No. 6. – P. 1649–1672.

**ВЛИЯНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ОРТОТРОПИИ НА  
НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПОЛЫХ ЦИЛИНДРОВ С ВОГНУТЫМ  
ГОФРИРОВАННЫМ ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ**

*В пространственной постановке с применением аппроксимации функций дискретными рядами Фурье проведен анализ влияния параметров ортотропии на напряженное состояние полых цилиндров с поперечным сечением в виде соединенных вогнутых полугофров, находящихся под действием внутреннего давления, при определенных условиях на торцах. Приведены результаты исследования в виде графиков и таблицы.*

**EFFECTS OF VARIATION OF ORTHOTROPIC PARAMETERS  
ON STRESS STATE OF HOLLOW CYLINDERS WITH CONCAVE  
CORRUGATED CROSS-SECTION**

*In the spatial statement using the approximation of functions by the discrete Fourier series the analysis of the effects of the orthotropic parameters on stress state of hollow cylinders with cross-section in the shape of joined concave semi-corrugations is carried out. The cylinders are under action of internal pressure under certain conditions, at the ends. The results of the investigation are presented in the form of plots and a table.*

Ин-т механіки ім. С. П. Тимошенка  
НАН України, Київ

Одержано  
27.05.15