

В'ЯЗКОПРУЖНІ НАПРУЖЕННЯ У ПЛАСТИНКАХ ІЗ ВКЛЮЧЕННЯМ З ТРІЩИНОЮ

Досліджено в'язкопружні напруження у пластинках із включенням, послабленим тріщиною, на основі методу граничних інтегральних рівнянь та інтегрального перетворення Лапласа. Детально розглянуто випадок, коли реологічні співвідношення між напруженнями і деформаціями записано в диференціальній формі. Для розв'язування крайової задачі в'язкопружності використано відомий підхід, у якому розглядається відповідна задача теорії пружності при заміні диференціальних операторів сталими величинами. Розв'язок допоміжної задачі побудовано за допомогою методу граничних інтегральних рівнянь, які зведено до системи алгебраїчних рівнянь. Розв'язування цієї системи після заміни в ній пружних величин на відповідні диференціальні оператори проведено з використанням інтегрального перетворення Лапласа із наступним застосуванням уточненої адаптованої до цього класу задач числово-аналітичної формули обернення.

Відомо, що при тривалій експлуатації елементів конструкцій, виготовлених з неоднорідних матеріалів, їх напружений стан необхідно визначати з урахуванням в'язкопружних процесів. Підхід до розрахунку в'язкопружних напружень у тілах із включеннями на основі методу рядів з додатковим використанням методу ітерацій запропоновано в [2]. Для ідеально пружних кусково-однорідних пластин ефективними виявились підходи, які базуються на методі граничних інтегральних рівнянь (МГІР) [4, 7, 8]. Цей метод з додатковим застосуванням перетворення Лапласа використано для розв'язування задач в'язкопружності для кусково-однорідних пластин [5, 9]. Ефективність методу інтегральних рівнянь для пластинок складної форми може бути підвищена з використанням модифікованих інтегральних рівнянь, які будують на основі розв'язків типу Гріна [1, 4, 8].

Нижче виконано дослідження в'язкопружного напруженого стану пластинок із включенням, послабленим тріщиною, на основі модифікованих інтегральних рівнянь, перетворення Лапласа та уточнених формул його числового обернення.

Постановка задачі. Розглянемо в'язкопружну ізотропну пластинку, що містить пружне включення з іншого матеріалу, яке послаблене тріщиною. Приймемо, що пластинка перебуває під дією навантаження, прикладеного на нескінченності, береги тріщини ненавантажені, пластинка перебуває в умовах плоского напруженого стану. Вважаємо, що на межі поділу матеріалів виконуються умови ідеального механічного контакту.

Основні співвідношення для в'язкопружного тіла. Використаємо реологічні співвідношення у вигляді [10]

$$s_{ij} = 2Ge_{ij}, \quad \sigma_{kk} = K(\varepsilon_{kk} - 3\alpha_t \Theta), \quad (1)$$

де s_{ij} , e_{ij} – девіатори тензорів напружень і деформацій, $G = G(D)$, $K = K(D)$ – диференціальні оператори, $D = \eta \frac{\partial}{\partial \tau}$, τ – часова координата, η – задана стала, Θ – температура, α_t – коефіцієнт лінійного температурного розширення.

Запишемо реологічні співвідношення у диференціальній формі

$$P_1(D)s_{ij} = P_2(D)e_{ij}, \quad P_3(D)\sigma_{kk} = P_4(D)(\varepsilon_{kk} - 3\alpha_t \Theta),$$

при

$$P_j(D) = \sum_{k=0}^{N_p} a_{jk} D^k,$$

де a_{jk} – сталі, N_p – ціле число. Тоді маємо

$$2G = \frac{P_2(D)}{P_1(D)}, \quad K = \frac{P_4(D)}{P_3(D)}.$$

Наведемо детальніше співвідношення для стандартного в'язкопружного тіла. Прийmemo, що при великих значеннях часу напружено-деформований стан є усталеним (незалежним від часової координати), і для цього стану відомими є значення модуля зсуву G_∞ і об'ємного коефіцієнта \mathcal{K}_∞ . Тоді

$$P_1 = 1 + D, \quad P_2 = 2G_\infty(1 + \gamma D), \quad P_3 = 1 + mD, \quad P_4 = \mathcal{K}_\infty(1 + kmD),$$

де γ , k , m – сталі матеріалу.

Для початкового моменту часу маємо взаємозв'язки [10]

$$s_{ij} = 2G_\infty \gamma e_{ij}, \quad \sigma_{kk} = \mathcal{K}_\infty k (\varepsilon_{kk} - 3\alpha_t \Theta).$$

Звідси отримуємо, що миттєві значення модуля зсуву G_0 та об'ємного коефіцієнта \mathcal{K}_0 для початкового моменту визначаються так:

$$G_0 = G_\infty \gamma, \quad \mathcal{K}_0 = \mathcal{K}_\infty k.$$

Прийmemo, що є відомими миттєві та асимптотичні значення модулів зсуву G_0 , G_∞ і коефіцієнтів Пуассона ν_0 , ν_∞ . Тоді коефіцієнти γ , k запишемо як

$$\gamma = \frac{G_0}{G_\infty}, \quad k = \frac{\mathcal{K}_0}{\mathcal{K}_\infty} = \gamma \frac{1 - 2\nu_\infty}{1 - 2\nu_0} \frac{1 + \nu_0}{1 + \nu_\infty}.$$

Операторні пружні характеристики набудуть вигляду

$$G = G_\infty g(D), \quad \mathcal{K} = \mathcal{K}_\infty \alpha(D), \quad \nu = \frac{1}{2} \frac{\alpha(D) - 2\beta g(D)}{\alpha(D) + \beta g(D)}, \quad (2)$$

де

$$g(D) = \frac{1 + \gamma D}{1 + D}, \quad \alpha(D) = \frac{1 + kmD}{1 + mD}, \quad \beta = \frac{G_\infty}{\mathcal{K}_\infty} = \frac{1}{2} \frac{1 - 2\nu_\infty}{1 + \nu_\infty}.$$

Реологічні співвідношення додатково включають параметри η і m . Встановимо їх фізичний зміст. Для цього розглянемо випадок, коли зразок перебуває в умовах чистого зсуву, тобто відмінними від нуля є тільки дотичні напруження τ_{xy} і зсувні деформації ε_{xy} . Прийmemo, що в початковий момент часу в пластині виникає і далі підтримується стала деформація ε_{xy} . Тоді маємо

$$\tau_{xy} - \tau_{xy} \Big|_{\tau=\infty} = 2(G_0 - G_\infty) \varepsilon_{xy} \exp(-\tau/\gamma).$$

Це означає, що стала γ характеризує швидкість релаксації дотичних напружень при чистому зсуві.

Аналогічно прийmemo, що в початковий момент часу в зразку виникає і далі підтримується об'ємна деформація ε_{kk} . Тоді

$$\sigma_{kk} - \sigma_{kk} \Big|_{\tau=\infty} = \mathcal{K}_\infty (k - 1) \varepsilon_{kk} \exp(-\tau/km),$$

тобто стала m є пропорційною до часу релаксації об'ємних напружень.

Зазначимо, що в літературі часто розглядають випадок, коли об'ємне деформування є пружним (в'язкість відсутня). Тоді у вибраній моделі необхідно покласти $m = 0$. При цьому із чотирьох величин G_0 , ν_0 і G_∞ , ν_∞ тільки три можуть бути вибрані, а останню, ν_∞ , визначаємо із наведених співвідношень. Зокрема, розрахунки показали, що в деяких випадках один із коефіцієнтів Пуассона буде від'ємним, що відповідно призведе до нереальних значень модулів Юнга.

Для розв'язування крайової задачі в'язкопружності використаємо відомий підхід, коли розглядається відповідна задача теорії пружності, у якій пружні оператори спочатку вважаються сталими величинами. Побудуємо формальний розв'язок цієї задачі за допомогою методу граничних інтегральних рівнянь, звівши задачу до розв'язування відповідної системи алгебраїчних рівнянь. Розв'язування системи, що містить диференціальні оператори, проведемо з використанням інтегрального перетворення Лапласа за часовою координатою.

Розв'язування задачі теорії пружності для кусково-однорідної пластинки. Розглянемо кусково-однорідну пластинку з пружними сталими G_0 , ν_0 , що містить пружні включення, межі яких лежать на контурах L_j , $j = 1, \dots, J$, з пружними сталими G_j , ν_j . Введемо кусково-неперервні величини, які описують механічні характеристики у пластинці із включеннями:

$$G(x, y) = G_j, \quad \chi(x, y) = \chi_j \quad \text{при} \quad (x, y) \in \mathcal{D}_j, \quad j = 0, 1, \dots, J.$$

Тут $\chi_j = (3 - \nu_j)/(1 + \nu_j)$; \mathcal{D}_j – області, які займають включення; \mathcal{D}_0 – область, яку займає пластинка.

Для розв'язання задачі використаємо метод Колосова – Мусхелішвілі [6, 8]. Комплексні потенціали $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ подамо у вигляді [4]

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \int_L [R(t)\Phi_R(z, t) + I(t)\Phi_I(z, t)] ds + \Phi_S(z), \\ \Psi(z) &= \int_L [R(t)\Psi_R(z, t) + I(t)\Psi_I(z, t)] ds + \Psi_S(z), \end{aligned} \quad (3)$$

де $L = L_1 + L_2 + \dots + L_J$; Φ_S , Ψ_S – потенціали Мусхелішвілі для суцільної однорідної пластинки, що займає область \mathcal{D} , які відповідають прикладеному навантаженню; $R(t)$, $I(t)$ – невідомі дійсні функції. Тут \mathcal{D} – область, яку займають включення і матриця, а напрямком інтегрування по кривих L_j , $j = 1, \dots, J$, вибрано так, щоб їх зовнішність залишалась зліва.

Функції Φ_α , Ψ_α , $\alpha = R, I$, визначаються за формулами, наведеними у роботі [4]. Значимо, що вибране подання справджується і для пластинок різної форми, які, крім включень, мають додаткові межі. При відповідно вибраних функціях Φ_α , Ψ_α умови на цих межах можуть виконуватись автоматично [4]. У цьому випадку отримані далі інтегральні рівняння називають модифікованими [4, 8].

Розглянемо випадок, коли прикладене до пластинки навантаження характеризується певним параметром p і зобразимо

$$\Phi_S = p\Phi_c, \quad \Psi_S = p\Psi_c,$$

причому параметр p залежить від часової координати. Зокрема, у випадку розтягу пластинки зусиллями p_0 потенціали Φ_c , Ψ_c відповідають дії зусиль при $p_0 = 1$, а $p = p_0 H(t)$, де $H(t)$ – функція Гевісайда, t – часова координата.

Далі використовуватимемо співвідношення для визначення вектора напружень $q_\Gamma = N_\Gamma + iT_\Gamma$ у довільній точці z кривої Γ на дотичній до неї елементарній площинці через комплексні потенціали [8]:

$$q_\Gamma(z) = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} + \frac{d\bar{z}}{dz} [z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)}], \quad (4)$$

де dz – диференціал змінної z на кривій.

Похідні від переміщень тіла з пружними характеристиками G , χ на кривій Γ визначаються за формулами [8]

$$2G(u' + iv') = \chi\Phi(z) - \overline{\Phi(z)} - \frac{d\bar{z}}{dz} [z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)}], \quad (5)$$

де $u' + iv' = d(u + iv)/dz$.

При вибраному загальному розв'язку (3) вектор напружень (4) є неперервним при переході через межу поділу матриці і включення. Для визначення невідомих функцій необхідно використати умову неперервності переміщень на межі поділу матеріалів. В результаті отримуємо інтегральні рівняння [4]

$$\beta_j 2\pi \frac{ds}{dz} (iR - I) + S_j(\Phi, \Psi) = f, \quad z \in L_j, \quad j = 1, \dots, J, \quad (6)$$

де

$$S_j(\Phi, \Psi) = \alpha_j \Phi(z) - \overline{\Phi(z)} - \frac{d\bar{z}}{dz} \{z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)}\}, \quad f = -S_j(\Phi_c, \Psi_c),$$

$$\alpha_j = \frac{H_j \chi_0 - \chi_j}{H_j - 1}, \quad \beta_j = \frac{1}{2} \frac{H_j(\chi_0 + 1) + (\chi_j + 1)}{H_j - 1}, \quad H_j = \frac{G_j}{G_0}. \quad (7)$$

У рівняннях (6) потенціали Φ , Ψ визначаються за формулами (3), у яких $z \in L$, а сингулярні інтеграли розглядаються у сенсі головного значення за Коші.

Числовий алгоритм розв'язування інтегральних рівнянь. Для розв'язування інтегральних рівнянь (6) використаємо метод механічних квадратур. Детально розглянемо випадок одного включення ($J = 1$). Рівняння контуру інтегрування (межі включення) запишемо у параметричному вигляді: $x = \alpha(\theta)$, $y = \beta(\theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Введемо на контурі інтегрування вузлові точки $z_v = \tilde{x}_v + i\tilde{y}_v$, $t_k = x_k + iy_k$, $\tilde{x}_k = \alpha(\tau_k)$, $\tilde{y}_k = \beta(\tau_k)$, $x_k = \alpha(\theta_k)$, $y_k = \beta(\theta_k)$, $\theta_k = hk$, $\tau_n = \theta_n - h/2$, $h = 2\pi/N$, де N – кількість вузлових точок.

Отримана система рівнянь для пружного тіла має вигляд [4]

$$\beta_1 2\pi \left(\frac{ds}{dt} \right)_v (iR_v - I_v) + h \sum_{n=1}^N (S_{v_n}^{(R)} R_n + S_{v_n}^{(I)} I_n) = f_v, \quad v = 1, \dots, N, \quad (8)$$

де

$$S_{v_n}^{(R)} = S_1(\Phi_R(z_v, t_n), \Psi_R(z_v, t_n)), \quad S_{v_n}^{(I)} = S_1(\Phi_I(z_v, t_n), \Psi_I(z_v, t_n)),$$

$$f_v = -S_1(\Phi_c(z_v), \Psi_c(z_v)), \quad R_n = R(x_n, y_n) s'_n,$$

$$I_n = I(x_n, y_n) s'_n, \quad s'_n = s'(\theta_n), \quad s'(\theta) = \sqrt{\alpha'(\theta)^2 + \beta'(\theta)^2},$$

$$S_1(\Phi, \Psi) = \alpha_1 \Phi(z) - \overline{\Phi(z)} - \frac{d\bar{z}}{dz} \{z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)}\}.$$

Стосовно задачі в'язкопружності систему рівнянь (8) видозмінимо, записавши

$$S_1(\Phi, \Psi) = \gamma_1 \Phi(z) - q(\Phi, \Psi),$$

де $\gamma_1 = \alpha_1 + 1$, $q(\Phi, \Psi) = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} + \frac{d\bar{z}}{dz} [z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)}]$. Тоді

$$S_{v_n}^{(J)} = \gamma_1 F_{v_n}^{(J)} - q_{v_n}^{(J)}, \quad J = R, I, c,$$

де $S_{v_n}^{(J)} = q(\Phi_J(z_v, t_n), \Psi_J(z_v, t_n))$, $F_{v_n}^{(J)} = \Phi_J(z_v, t_n)$.

Система рівнянь (8) набуде вигляду

$$\beta_1 2\pi \left(\frac{ds}{dt} \right)_v (iR_v - I_v) + h \sum_{n=1}^N [(\gamma_1 F_{v_n}^{(R)} - q_{v_n}^{(R)}) R_n + (\gamma_1 F_{v_n}^{(I)} - q_{v_n}^{(I)}) I_n] =$$

$$= \gamma_1 \Phi_S(z_v) - q(\Phi_S(z_v), \Psi_S(z_v)), \quad v = 1, \dots, N.$$

Перейдемо до дійсних змінних:

$$\begin{aligned}
& -\beta_1(s_v^r I_v + s_v^i R_v) + h \sum_{n=1}^N [(\gamma_1 A_{vn}^r - B_{vn}^r) R_n + (\gamma_1 A_{vn}^i - B_{vn}^i) I_n] = \\
& = (\gamma_1 C_v - Q_v) p, \\
& \beta_1(s_v^r R_v - s_v^i I_v) + h \sum_{n=1}^N [(\gamma_1 a_{vn}^r - b_{vn}^r) R_n + (\gamma_1 a_{vn}^i - b_{vn}^i) I_n] = \\
& = (\gamma_1 c_v - q_v) p, \tag{9}
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
A_{vn}^r &= \operatorname{Re}(F_{vn}^{(R)}), \quad A_{vn}^i = \operatorname{Re}(F_{vn}^{(I)}), \quad B_{vn}^r = \operatorname{Re}(q_{vn}^{(R)}), \quad B_{vn}^i = \operatorname{Re}(q_{vn}^{(I)}), \\
C_v &= \operatorname{Re}(\Phi_c(z_v)), \quad Q_v = \operatorname{Re}[q(\Phi_c(z_v), \Psi_c(z_v))], \\
a_{vn}^r &= \operatorname{Im}(F_{vn}^{(R)}), \quad a_{vn}^i = \operatorname{Im}(F_{vn}^{(I)}), \quad b_{vn}^r = \operatorname{Im}(q_{vn}^{(R)}), \quad b_{vn}^i = \operatorname{Im}(q_{vn}^{(I)}), \\
c_v &= \operatorname{Im}(\Phi_c(z_v)), \quad q_v = \operatorname{Im}[q(\Phi_c(z_v), \Psi_c(z_v))], \quad s_v^r + i s_v^i = 2\pi \left(\frac{ds}{dt} \right)_v.
\end{aligned}$$

Доповнимо систему (9) рівняннями, отриманими внаслідок заміни у ній θ на $\theta + h/2$ (тобто заміною індексів $n \rightarrow v$, $v \rightarrow n$). Доповнена цими рівняння система є замкненою.

Розв'язування в'язкопружної задачі. Диференціальні оператори в цій системі рівнянь для задачі в'язкопружності містять тільки коефіцієнти β_1 , γ_1 , при цьому коефіцієнти R_n , I_n залежать від часу. Застосуємо до отриманої системи рівнянь перетворення Лапласа за часовою змінною $t = \tau/\eta_z$ (тут η_z – коефіцієнт η в реологічних співвідношеннях для матриці):

$$\begin{aligned}
& -\beta_1(s)(s_v^r \tilde{I}_v + s_v^i \tilde{R}_v) + h \sum_{n=1}^N [(\gamma_1(s) A_{vn}^r - B_{vn}^r) \tilde{R}_n + \\
& + (\gamma_1(s) A_{vn}^i - B_{vn}^i) \tilde{I}_n] = (\gamma_1(s) C_v - Q_v) \tilde{p}, \\
& \beta_1(s)(s_v^r \tilde{R}_v - s_v^i \tilde{I}_v) + h \sum_{n=1}^N [(\gamma_1(s) a_{vn}^r - b_{vn}^r) \tilde{R}_n + \\
& + (\gamma_1(s) a_{vn}^i - b_{vn}^i) \tilde{I}_n] = (\gamma_1(s) c_v - q_v) \tilde{p}, \tag{10}
\end{aligned}$$

де s – параметр перетворення Лапласа, «тильдою» позначено зображення Лапласа від відповідної величини. Тут $\beta_1(s)$, $\gamma_1(s)$ – відомі функції, які отримуються заміною диференціального оператора D на s в операторних пружних характеристиках для матриці, а в операторних пружних характеристиках для включення – на $\eta' s$, де $\eta' = \eta_w/\eta_z$, η_w – коефіцієнт η в реологічних співвідношеннях для включення.

Із цієї системи зображення від коефіцієнтів можуть бути знайдені при довільному значенні параметра Лапласа. Для знаходження оригіналів цих коефіцієнтів (які є залежними від часу) використаємо уточнену формулу обернення [3, 12]. Оригінали у цій формулі визначаємо через зображення

Лапласа $F(s)$ від деякої функції $f(t)$ за значень $s = s_n = \frac{c + 2\pi n i}{\ell}$ при $n = 0, 1, \dots$, де c , ℓ – параметри, які необхідно вибрати. Крім цього, приймаємо, що є відомими значення оригіналу i в початковий момент часу $f_0 = f(0)$, і для великих значень часу $f(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} f_\infty$, коли процес є усталеним.

Тоді формула обернення при $0 < t < \ell$ матиме вигляд

$$f(t) \approx \frac{1}{\ell} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \exp(s_n t) + \frac{f_0}{1 - \exp(-c)} - \frac{f_{\infty}}{\exp(c) - 1}, \quad (11)$$

де $F_n = F(s_n) - f_0/s_n$.

Параметр ℓ необхідно вибрати так, щоб $f(\ell) \approx f_{\infty}$.

При розрахунках задаємо миттєві (у початковий момент часу) та установлені модулі зсуву $G_{w0}, G_{w\infty}$ та коефіцієнти Пуассона $\nu_{w0}, \nu_{w\infty}$ включення. Аналогічні величини для матриці позначаємо через $G_{z0}, G_{z\infty}$ та $\nu_{z0}, \nu_{z\infty}$.

Детальніше розглянемо випадок, коли параметр навантаження має вигляд $p = p_0 H(t)$, де $H(t)$ – функція Гевісайда. Зображення Лапласа від цієї функції буде $\tilde{p} = p_0/s$. При використанні формули (11) необхідно знайти значення коефіцієнтів R_n, I_n у рівняннях (9) при $t = 0$ та при $t \rightarrow \infty$. Значення коефіцієнтів у початковий момент часу $R_n(0), I_n(0)$ знаходимо із системи (9), у якій модулі зсуву та коефіцієнти Пуассона включення та матриці покладемо рівними їх миттєвим значенням G_{w0}, ν_{w0} і G_{z0}, ν_{z0} , відповідно. Асимптотичні значення коефіцієнтів $R_n(\infty), I_n(\infty)$ також знаходимо із цієї ж системи, поклавши пружні характеристики рівними $G_{w\infty}, \nu_{w\infty}$ і $G_{z\infty}, \nu_{z\infty}$.

При ефективно вибраних параметрах у формулі обернення (11) ряд у ній є швидкозбіжним, що є одним із додаткових засобів контролю за точністю розрахунків.

Подальші розрахунки виконано для випадку, коли пластинка перебуває в умовах двостороннього розтягу на нескінченності:

$$\sigma_x^{\infty} = p, \quad \sigma_y^{\infty} = q, \quad \tau_{xy}^{\infty} = \tau,$$

де p, q, τ – задані величини.

Тестовий приклад. З метою оцінки точності розробленого числового алгоритму окремо розглянуто випадок еліптичного включення у нескінченній пластинці. Позначимо для допоміжної задачі теорії пружності (для якої пружні характеристики приймаються сталими величинами) модулі пружності, зсуву і коефіцієнти Пуассона включення та матриці через E, G, ν і E_0, G_0, ν_0 , відповідно.

Напруження у включенні $\sigma_x^0, \sigma_y^0, \tau_{xy}^0$ є сталими і визначаються за формулами [11]

$$\sigma_x^0 = a_{11}p + a_{12}q, \quad \tau_{xy}^0 = a_{33}\tau, \quad (12)$$

де

$$\begin{aligned} a_{11} &= \left(b_0 - \frac{3-m}{1+m} b_2 \right) \frac{1}{\Delta}, & a_{12} &= \left(b_2 - \frac{3+m}{1-m} b_0 \right) \frac{1}{\Delta}, \\ a_{21} &= \left(b_1 - \frac{3-m}{1+m} b_0 \right) \frac{1}{\Delta}, & a_{22} &= \left(b_0 - \frac{3+m}{1-m} b_1 \right) \frac{1}{\Delta}, \\ a_{33} &= \frac{4}{[m^2 + \chi_0 + \gamma(1-m^2)](1+\nu_0)}, \\ b_0 &= 1 - \nu + \varepsilon\nu_0, & b_1 &= \varepsilon + 2 \frac{1-m}{1+m}, & b_2 &= \varepsilon + 2 \frac{1+m}{1-m}, \\ \Delta &= b_0^2 - b_1 b_2, & \chi_0 &= \frac{3-\nu_0}{1+\nu_0}, & m &= \frac{a-b}{a+b}, & \varepsilon &= \frac{E_0}{E}, & \gamma &= \frac{G_0}{G}. \end{aligned}$$

Наведений розв'язок є точним для класичної задачі теорії пружності, що дає можливість уникнути додаткових похибок МГПР. Застосуємо до

формули (12) перетворення Лапласа, поклавши

$$p = p_0 H(t), \quad q = q_0 H(t), \quad \tau = \tau_0 H(t), \quad \tilde{\sigma}_x^0 = [a_{11}(s)p_0 + a_{12}(s)q_0]/s,$$

$$\tilde{\sigma}_y^0 = [a_{21}(s)p_0 + a_{22}(s)q_0]/s, \quad \tilde{\tau}_{xy}^0 = a_{33}(s)\tau_0/s.$$

Напруження у початковий і в нескінченно великий моменти часу визначаємо аналогічно, як і вище. Розраховано напруження за розтягу зусиллями q у напрямку осі Oy при $v_{w0} = v_{w\infty} = v_{z0} = v_{z\infty} = 0.3$, $G_{w0}/G_{wn} = 1.2$, $G_{z0}/G_{zn} = 2$, $G_{z0}/G_{w0} = 1/1.2$, $\eta' = 0.5$ (варіант 1°) та $G_{w0}/G_{wn} = 4$, $G_{z0}/G_{zn} = 2$, $G_{z0}/G_{w0} = 2$, $\eta' = 10$ (варіант 2°).

При обчисленнях покладали $\ell = 38$, $c = 1$, обмежувались 60-ма членами ряду у формулі обернення для варіанту 1° та 90-ма членами – у варіанті 2°. Розраховані за формулами (12) (див. [11]) і за розробленим вище МГІР напруження для обох випадків наведено у табл. 1.

Таблиця 1. Порівняння числового та аналітичного розв'язків.

t	Варіант 1°:				Варіант 2°:			
	$G_{w0}/G_{wn} = 1.2, G_{z0}/G_{zn} = 2,$ $G_{z0}/G_{w0} = 1/1.2, \eta' = 0.5, n = 60$				$G_{w0}/G_{wn} = 4, G_{z0}/G_{zn} = 2,$ $G_{z0}/G_{w0} = 2, \eta' = 10, n = 90$			
	σ_x/q		σ_y/q		σ_x/q		σ_y/q	
	[11]	МГІР	[11]	МГІР	[11]	МГІР	[11]	МГІР
0	0.0024	0.0024	1.0614	1.0613	-0.0074	-0.0074	0.7824	0.7805
1.9	0.0068	0.0068	1.1609	1.1608	-0.0043	-0.0043	0.9159	0.9158
3.8	0.0084	0.0084	1.1937	1.1937	-0.0040	-0.0040	0.9170	0.9168
5.7	0.0089	0.0089	1.2011	1.2011	-0.0047	-0.0047	0.8884	0.8883
7.6	0.0090	0.0090	1.2027	1.2026	-0.0056	-0.0056	0.8554	0.8553
9.5	0.0090	0.0090	1.2030	1.2030	-0.0064	-0.0064	0.8238	0.8238
17.1	0.0090	0.0090	1.2031	1.2030	-0.0089	-0.0089	0.7215	0.7216
26.6	0.0090	0.0090	1.2031	1.2030	-0.0102	-0.0102	0.6375	0.6374
36.1	0.0091	0.0090	1.2032	1.2030	-0.0106	-0.0106	0.5853	0.5849

Бачимо, що обчислені за різними підходами напруження практично збігаються, що вказує на достовірність отриманих результатів.

Дослідження впливу в'язкості на напруження у пластинці з вклю-

ченням. Наведемо результати розрахунків для еліптичного пружного включення з відношенням півосей $b/a = 0.5$ за розтягу пластинки на нескінченності зусиллями $p = 1$, $q = 1$, $\tau = 0.5$ при $G_{w0}/G_{wn} = 1$, $G_{z0}/G_{zn} = 4$, $G_{z0}/G_{w0} = 1$, $v_{w0} = v_{w\infty} = v_{z0} = v_{z\infty} = 0.3$, $\eta' = 1$. Залежності від часової координати розрахованих напружень у включенні наведено на рис. 1 (при обчисленнях у формулі обернення покладали $\ell = 10$, $c = 1$). Тут криві 1-4 відповідають на-

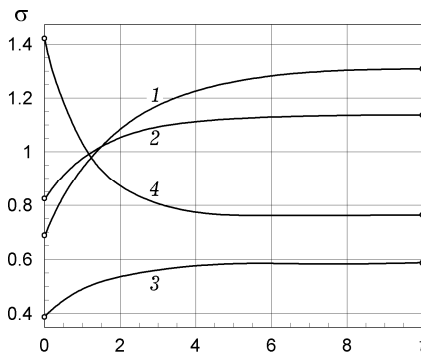


Рис. 1

пруженням σ_x , σ_y , τ_{xy} , $\sigma_y(a + 0)$ у матриці. Кругечками справа зображено відповідні напруження, які відповідають усталеному розподілу (їх обчислювали окремо), тобто розраховані за формулою обернення криві при великих значеннях часу збігаються із відповідними асимптотичними значеннями. Аналогічні миттєві значення у початковий момент часу (кругечки зліва) також збігаються із розрахованими значеннями на кривих. Звідси можна зробити висновок, що вибрана формула обернення для цього класу задач дозволяє обчислювати напруження з контрольованою точністю.

Зазначимо, що ряди у формулі обернення швидко збігаються (обмежувались 60-ма членами).

Характерною особливістю для цієї задачі, у якій включення є ідеально пружним, є те, що напруження в часі монотонно або зростають, або спадають. Це означає, що максимальні напруження можна знайти шляхом розв'язування двох класичних задач теорії пружності з миттєвими та усталеними пружними характеристиками. Аналогічну ситуацію спостерігаємо і при в'язкопружному включенні та ідеально пружній матриці.

Коли одночасно в'язкопружними є і матриця, і включення, характер розподілу напружень у часі ускладнюється та істотно залежить від відношення η' часових коефіцієнтів. Графіки зміни в часі в'язкопружних напружень σ_y/q у круговому включенні за розтягу зусиллями q у вертикальному напрямку при $G_{w0}/G_{wn} = 4$, $G_{z0}/G_{zn} = 2$, $v_{w0} = v_{w\infty} = v_{z0} = v_{z\infty} = 0.3$ для різних значень відношення часових коефіцієнтів $\eta' = \eta_w/\eta_z$ ілюструють рис. 2 і рис. 3. На рис. 2 наведено дані для випадку, коли жорсткішою є матриця ($G_{z0}/G_{w0} = 2$), а на рис. 3 – для випадку жорсткішого включення ($G_{z0}/G_{w0} = 0.5$).

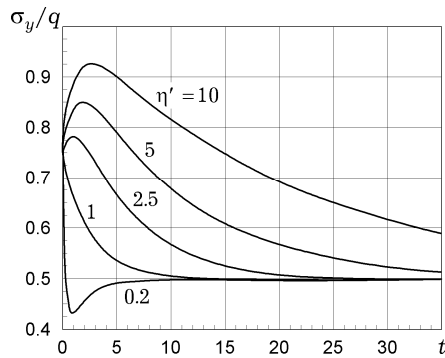


Рис. 2

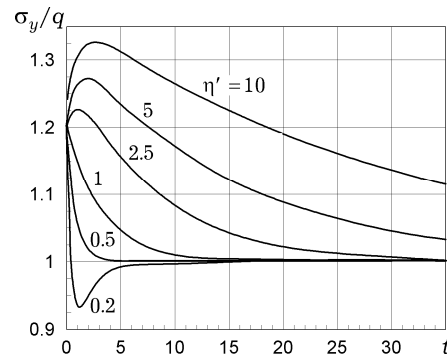


Рис. 3

Із аналізу результатів обчислень, наведених на рисунках, випливає, що при великих значеннях параметра η' максимальними є напруження у моментах часу, близьких до початкового, і вони можуть бути істотно більшими від миттєвих та усталених напружень.

Включення з тріщиною. Розглянемо пластинку з пружним включенням, яке послаблене прямолінійною тріщиною $y = 0$, $-a < x < a$ з вільними від навантаження берегами. Покладемо, що пластинка розтягується зусиллями $pH(t)$ в напрямку осі Oy . Використаємо інтегральні рівняння (3), в яких Φ_R , Ψ_R – допоміжні дислокаційні потенціали для однорідної нескінченної пластинки з тріщиною $y = 0$, $-a < x < a$, береги якої вільні від навантаження [1]. При використанні цих рівнянь умови на тріщині задовольняються тотожно.

Розглянемо спочатку випадок, коли в'язким є тільки або включення, або матриця. Розрахунки виконано для кругового включення радіуса R з центром у початку координат при $R/a = 2$, $v_{w0} = v_{wn} = v_{z0} = v_{zn} = 3/7$, $m = 1$.

На рис. 4 наведено залежності відносних значень коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) $F_I = K_I/(p\sqrt{\pi a})$ від часової координати $t = \tau/\eta$, де η – параметр для в'язкопружного включення або матриці:

крива 1 при $G_{w0}/G_{wn} = 1$, $G_{z0}/G_{zn} = 2$, $G_{z0}/G_{w0} = 3$
(матриця в'язкопружна);

- крива 2 при $G_{w0}/G_{wn} = 2$, $G_{z0}/G_{zn} = 1$, $G_{z0}/G_{w0} = 3$
(включення в'язкопружне);
крива 3 при $G_{w0}/G_{wn} = 2$, $G_{z0}/G_{zn} = 1$, $G_{z0}/G_{w0} = 1/3$
(матриця в'язкопружна);
крива 4 при $G_{w0}/G_{wn} = 1$, $G_{z0}/G_{zn} = 2$, $G_{z0}/G_{w0} = 1/3$
(включення в'язкопружне).

У початковий момент часу розраховані відносні КІН дорівнюють 0.5163 і 1.493. Ці величини є близькими до значень КІН 0.5144 і 1.491 при вибраних вище механічних характеристиках для пружних матеріалів.

Бачимо, що у випадку, коли тільки або включення, або матриця є в'язкими, КІН монотонно зростають або спадають від їх значень у початковий момент часу до ustalених (при $\tau \rightarrow \infty$). Тобто максимальні КІН, які є часто основними в розрахунках на міцність, можуть бути визначені на основі розгляду двох пружних задач.

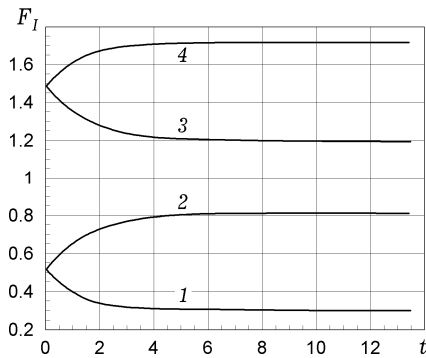


Рис. 4

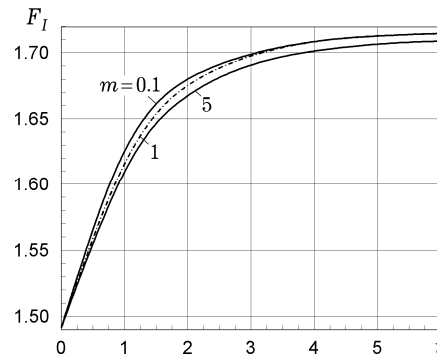


Рис. 5

Оскільки у наведені фізичні співвідношення входить параметр m , оцінимо його вплив. Результати обчислень КІН для значень $m = 0.1, 1.0, 5.0$ при $G_{w0}/G_{wn} = 1$, $G_{z0}/G_{zn} = 2$, $G_{z0}/G_{w0} = 1/3$ наведено на рис. 5. Бачимо, що параметр m у розглядуваному випадку неістотно впливає на КІН.

Виконано також обчислення КІН для випадку, коли включення та матриця є в'язкопружними. Розрахунки виконано при $R/a = 2$. На рис. 6 наведено відносні значення КІН F_I при різних значеннях відношення η' залежно від часової координати при $G_{w0}/G_{wn} = 2$, $G_{z0}/G_{zn} = 2$, $G_{z0}/G_{w0} = 3$, $m = 1$.

При вибраних значеннях пружних сталей у випадку, коли $\eta' = 1$, КІН не залежать від часу.

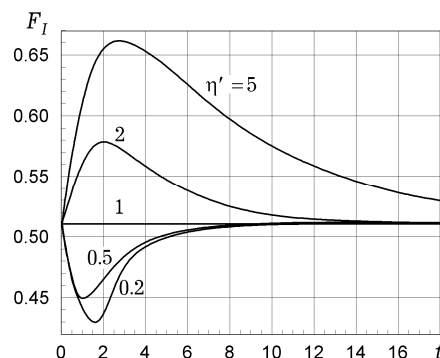


Рис. 6

Висновки. Розроблено числовий алгоритм розрахунку в'язкопружних напружень у пластинках із включеннями, послаблених включеннями, який базується на МГП та інтегральному перетворенні Лапласа. Поставлена задача зведена до розв'язування систем алгебраїчних рівнянь відносно зображень Лапласа від значень невідомих функцій у вузлових точках на межі поділу матеріалів. Оригінали цих функцій знайдено з використанням уточненої формули обернення перетворення Лапласа. Наведений тестовий приклад вказує на високу точність запропонованого підходу. Проведено розрахунки в'язкопружних напружень та КІН для нескінченної пластинки із включеннями, яке послаблене тріщиною. Встановлено характерні особливості в розподілі напружень та КІН залежно від в'язкопружних параметрів матеріалів.

1. Божидарнік В. В., Максимович О. В. Визначення напруженого стану біля крайових тріщин у пластині з отвором складної форми // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2010. – **46**, № 1. – С. 19–26.
Te same: *Bozhydarnik V. V., Maksymovych O. V.* Determination of the stressed state near edge cracks in a plate containing a hole of complex shape // *Mater. Sci.* – 2010. – **46**, No. 1. – P. 16–26.
2. Калоєров С. А., Мироненко А. Б. Исследование вязкоупругого и термовязкоупругого состояния пластинки с упругими эллиптическими или линейными включениями // Прикл. механика. – 2007. – **43**, № 2. – С. 88–98.
То же: *Kaloerov S. A., Mironenko A. B.* Analyzing the viscoelastic state of a plate with elliptic or linear elastic inclusions // *Int. Appl. Mech.* – 2007. – **43**, No. 2. – P. 198–208.
3. Кушнір Р. М., Максимович В. М., Соляр Т. Я. Визначення нестационарних температур на основі уточнених формул обернення перетворення Лапласа // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2002. – **38**, № 2. – С. 18–26.
Te same: *Kushnir R. M., Maksymovych V. M., Solyar T. Ya.* Determination of nonstationary temperatures with the help of improved formulas of the inverse Laplace transformation // *Mater. Sci.* – 2002. – **38**, No. 2. – P. 172–184.
4. Максимович В. М., Приходько О. С., Соляр Т. Я. Визначення напружень біля пружних включень у пластинках складної форми // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2014. – **57**, № 3. – С. 109–118.
Te same: *Maksymovych V. M., Prykhod'ko O. S., Solyar T. Ya.* Determination of stresses near elastic inclusions in plates of complex shape // *J. Math. Sci.* – 2016. – **217**, No. 3. – P. 271–282.
5. Максимович В. М., Соляр Т. Я. Визначення в'язкопружних напружень у пластинах із включеннями // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2015. – **58**, № 3. – С. 91–96.
6. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – Москва: Наука, 1966. – 708 с.
Te same: *Muskhelishvili N. I.* Some basic problems of the mathematical theory of elasticity. – Nordhoff, Gröningen: Springer, 1977. – xxxi+732 p.
7. Саврук М. П., Зеленьак В. М. Двовимірні задачі термопружності для кусково-однорідних тіл з тріщинами. – Львів: Растр-7, 2009. – 212 с.
8. Саврук М. П., Осив П. Н., Прокопчук И. В. Численный анализ в плоских задачах теории трещин. – Київ: Наук. думка, 1989. – 248 с.
9. Соляр Т. Я. В'язкопружні напруження у пластинках із включеннями // Матеріали III Міжнар. наук. конф. «Сучасні проблеми механіки» (Київ, 27–29 серпня 2015), 2015. – С. 78.
10. *Evaristo Riande, Ricardo Diaz-Calleja, Margarita Prolongo, Rosa Masegosa, Catalina Salom.* Polymer viscoelasticity: Stress and strain in practice. – Boca Raton: CRC Press, 1999. – 904 p.
11. *Hardiman N. J.* Elliptic elastic inclusion in an infinite elastic plate // *Quart. J. Mech. Appl. Math.* – 1954. – **7**, No. 2. – P. 226–230.
12. *Kushnir R., Solyar T.* A numerical-analytical approach to the analysis of nonstationary temperature fields in multiply-connected solids // *Mech., Mater. Sci. & Eng.* – 2016. – No. 3. – P. 90–106. – Doi 10.13140/RG.2.1.1167.0165.

ВЯЗКОУПРУГИЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ПЛАСТИНКАХ С ВКЛЮЧЕНИЕМ С ТРЕЩИНОЙ

Исследованы вязкоупругие напряжения в пластинках с включением, ослабленным трещиной, на основании метода граничных интегральных уравнений и интегрального преобразования Лапласа. Детально рассмотрен случай, когда реологические соотношения между напряжениями и деформациями записаны в дифференциальной форме. Для решения краевой задачи вязкоупругости использован известный подход, в котором рассматривается соответствующая задача теории упругости при замене дифференциальных операторов постоянными величинами. Решение дополнительной задачи построено с помощью метода граничных интегральных уравнений, которые сведены к системе алгебраических уравнений. Решение этой системы после замены в ней упругих величин соответствующими дифференциальными операторами проведено с использованием интегрального преобразования Лапласа с последующим применением уточненной адаптированной к данному классу задач численно-аналитической формулы обращения.

VISCOELASTIC STRESSES IN PLATES CONTAINING INCLUSION WITH CRACK

Viscoelastic stresses in plates with inclusion weakened by crack are investigated on the basis of the method of boundary integral equations and integral Laplace transform. The case where the rheological relations between stresses and deformations are written in differential form is examined in detail. For solving the boundary problem of viscoelasticity the known approach is used, in which the corresponding problem of elasticity theory where the differential operators are replaced by constant values is considered. The solution of the auxiliary problem is constructed using the method of boundary integral equations which are reduced to a system of algebraic equations. After replacing elastic values in this system by corresponding differential operators its solution is carried out using the integral Laplace transform and subsequent applying the refined numerical and analytical inversion formula adapted to this class of problems.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
13.02.15