

**МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ДЛЯ ЕМІСІЙНОЇ ІЧ-ТОМОГРАФІЇ
ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В ІЗОТРОПНОМУ ШАРІ**

Розглядається математична модель для визначення температурного поля в шарі, який випромінює, поглинає і розсіює ІЧ-радіацію як в об'ємі, так і на поверхні. У рамках моделі сформульовано нелінійні пряму та обернену задачі трансмісійної ІЧ-томографії температурного поля у шарі за відомими просторово-кутовими розподілами потоків ІЧ-радіації, яку він випромінює у зовнішнє середовище. Запропоновано ітераційно-варіаційні методи розв'язування прямої та оберненої задач. На конкретному прикладі проведено чисельне дослідження розроблених алгоритмів.

Вступ. Задача безконтактного визначення температурного поля в діелектричних об'єктах виникає в теплофізиці, матеріалознавстві, інших прикладних науках, а також в різноманітних технічних застосуваннях. Прикладами таких об'єктів є термозахисні покриття космічних апаратів [5], елементи конструкцій і приладів із захисними, тепло- та електроізоляційними покриттями [1], шаруваті структури типу «метал – діелектрик – напівпровідник», які використовуються у приладах мікро- та наноелектроніки [13] тощо.

Останнім часом інтенсивно розвивається техніка інфрачервоної (ІЧ) термографії. Застосування цієї прецизійної методики безконтактних вимірювань дозволяє отримувати теплове зображення об'єкта, вимірюючи інтенсивність ІЧ-радіації, яку випромінює його поверхня, з використанням матричних фотоприймачів. У випадку об'єктів з високою електропровідністю (наприклад, металевих), які є непрозорими для ІЧ-випромінювання, з отриманого теплового зображення можна безпосередньо відновити температурне поле поверхні.

Діелектричні матеріали (наприклад, скло, пластмаси), напівпровідники, біологічні тканини є частково прозорими для ІЧ-випромінювання. В об'єктах, виготовлених із таких матеріалів, внутрішнє ІЧ-випромінювання може поширюватися на значні відстані в об'ємі і виходити через поверхню тіла в зовнішнє середовище. Таким чином, термографічне зображення такого об'єкта формують потоки ІЧ-радіації, що їх випромінюють і точки поверхні, і внутрішні точки тіла. Отже, отримані в такий спосіб емпіричні дані містять апостеріорну інформацію про температуру як поверхні, так і внутрішніх точок тіла. Тому на основі отриманого теплового зображення вже неможливо безпосередньо визначити температурне поле поверхні такого об'єкта. Зрозуміло, що цих даних недостатньо також і для відновлення температурного поля в об'ємі тіла. Результати вимірювань просторово-кутових розподілів потоків ІЧ-радіації, що випромінюють такі об'єкти, можна використати як вхідні дані для обернених задач визначення температурного поля в тілі. Такі задачі можна сформулювати в рамках математичних моделей, які описують поширення ІЧ-випромінювання у суцільних середовищах.

За достатньо високих температур потоки теплового випромінювання можуть істотно впливати на температурне поле об'єкта. Тому в моделі для ІЧ-томографії температурного поля необхідно враховувати взаємозв'язок процесів кондуктивного і радіаційного перенесення енергії.

Відомі декілька математичних постановок крайових задач теплообміну у твердих тілах, які враховують теплове випромінювання.

У найпростішому випадку нехтують впливом власного ІЧ-випромінювання тіла на процес теплообміну, але беруть до уваги задане зовнішнє теплове випромінювання, яке поглинається тілом. Залежно від радіаційних властивостей матеріалу об'єкта, зовнішнє випромінювання може цілком поглинатися поверхнею (якщо тіло непрозоре) або ж проникати в товщу

об'єкта, поглинаючись в об'ємі відповідно до закону Бугера [2]. У такому формулюванні задача є лінійною. Цей підхід застосовують у випадках, коли температура тіла в процесі теплообміну залишається достатньо низькою.

Інший підхід застосовують для непрозорих об'єктів. Тут приймають, що зовнішнє теплове випромінювання, яке потрапляє на тіло, цілком поглинається його поверхнею, перенесенням енергії ІЧ-випромінюванням в об'ємі нехтують, але враховують радіаційний тепловий потік із поверхні у зовнішнє середовище, який, згідно з законом Стефана – Больцмана, пропорційний до четвертої степені температури [4, 11]. Внаслідок цього задача стає істотно нелінійною.

У задачах кондуктивно-променевого теплообміну в середовищах, що випромінюють, поглинають і розсіюють ІЧ-радіацію, використовують взаємозв'язані нелінійні інтегро-диференціальні рівняння теплопровідності та перенесення випромінювання, а також взаємозв'язані, нелінійні і нелокальні крайові умови для них [3, 6, 7, 9, 10, 12, 14]. Для таких задач розроблено декілька наближених методів розв'язування. Внаслідок складності їхньої числової реалізації на сьогодні відомі числові розв'язки лише для окремих випадків, переважно для плоского шару.

Стаття присвячена побудові математичної моделі для визначення температурного поля в шарі низької теплопровідності за просторово-кутовими розподілами потоків ІЧ-радіації, яку він випромінює у зовнішнє середовище. У моделі враховано випромінювання, поглинання і розсіювання ІЧ-радіації як в об'ємі шару, так і на його поверхні. У рамках моделі сформульовано нелінійні пряму та обернену задачі емісійної ІЧ-томографії температурного поля. Розроблено варіаційні методи розв'язування прямої і оберненої задач. Проведено числове дослідження розроблених методів і алгоритмів на конкретному прикладі визначення температурного поля в шарі.

1. Математична модель для емісійної томографії температурного поля. Розглянемо ізотропне тверде тіло \mathcal{B} – шар, обмежений площинами \mathcal{S}_1 та \mathcal{S}_2 , який перебуває в ізотропному газовому середовищі з коефіцієнтом заломлення $n_{\text{ext}} = 1$. Середовище не поглинає, не випромінює і не розсіює ІЧ-радіацію. Тіло нагрівається заданими зовнішніми тепловими потоками і охолоджується внаслідок конвективного теплообміну із зовнішнім середовищем, температура T_{ext} якого відома, та потоку теплового випромінювання, яке виходить через поверхню $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ назовні. За таких умов тіло перебуває у стаціонарному тепловому стані, який характеризується просторовим розподілом температури $T(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \mathcal{V}$.

Електромагнітне теплове випромінювання, яке виникає в об'ємі тіла внаслідок теплового руху заряджених частинок, поширюється в області \mathcal{V} шару, поглинаючись і розсіюючись уздовж свого шляху і, досягнувши поверхні \mathcal{S} , може виходити у зовнішнє середовище. Локальною характеристикою теплового випромінювання є його спектральна густина $I_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega})$ – функція від просторових координат $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y, z)$, напрямку поширення $\boldsymbol{\omega}$ та частоти ν . Одиниичний вектор $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(\theta, \varphi)$ визначається зенітним θ та азимутальним φ кутами: $\omega_x = \sin \theta \cos \varphi$, $\omega_y = \sin \theta \sin \varphi$, $\omega_z = \cos \theta$. Вводючи замість θ змінну $\mu = \cos \theta \in (1, -1)$, що взаємно однозначно пов'язана зі змінною $\theta \in (0, \pi)$, розглядатимемо $\boldsymbol{\omega}$ та I_ν як функції від μ та φ : $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(\mu, \varphi)$, $I_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega}) = I_\nu(x, y, z, \mu, \varphi)$.

Спектральна густина $I_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{n})$ випромінювання, яке поширюється уздовж заданого напрямку $\boldsymbol{\omega}_s = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \right) \Big|_{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}}^{-1}$, де $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, s – дійсний пара-

метр, задовольняє рівняння перенесення випромінювання [6]

$$\frac{\partial I_v(s)}{\partial s} + (\alpha_v + \sigma_v)I_v(s) = S_v^e(T(\mathbf{r}(s))) + S_v^{sc}(I_v(s)). \quad (1)$$

Тут α_v та σ_v – спектральні коефіцієнти поглинання та розсіювання випромінювання в об'ємі тіла, $[\alpha_v] = [\sigma_v] = \text{м}^{-1}$. Другий доданок у лівій частині визначає відтік теплового випромінювання, яке поширюється уздовж напрямку $\boldsymbol{\omega}_s$ внаслідок його поглинання середовищем і розсіювання на інші напрямки. Доданки $S_v^e(s, \boldsymbol{\omega}_s)$ та $S_v^{sc}(s, \boldsymbol{\omega}_s)$ визначають приплив теплового випромінювання внаслідок його емісії середовищем і розсіювання у напрямку $\boldsymbol{\omega}_s$ з інших напрямків $\boldsymbol{\omega} \in \Omega$ повного тілесного кута $\Omega = \{\theta \times \varphi \mid \forall \theta \in [0, \pi], \forall \varphi \in [0, 2\pi)\}$:

$$S_v^e(T(s)) = n^2 \alpha_v I_{vb}(T(\mathbf{r}(s))),$$

$$S_v^{sc}(I_v(s)) = \frac{\sigma_v}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 p(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_s) I_v(\mathbf{r}(s), \boldsymbol{\omega}) d\mu d\varphi, \quad (2)$$

де

$$I_{vb}(T) \equiv \frac{2hv^3}{c_0 \exp\left(\frac{hv}{k_B T} - 1\right)}. \quad (3)$$

Тут n – показник заломлення електромагнітних хвиль у тілі, c_0 – швидкість світла у вакуумі, $I_{vb}(T)$ – спектральна інтенсивність випромінювання абсолютно чорного тіла у вакуумі, $T = T(\mathbf{r}(s))$ – температура середовища в точці $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, h – стала Планка, k_B – стала Больцмана, $p(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_s)$ – індикатриса розсіювання.

Стационарне температурне поле $T(\mathbf{r})$ в області задовольняє рівняння

$$\nabla \cdot (\lambda \nabla T(\mathbf{r})) = Q^e(T(\mathbf{r})) - Q^a(I_v(\mathbf{r})). \quad (4)$$

Тут λ – коефіцієнт теплопровідності матеріалу тіла. Дві складові у правій частині рівняння Q^e та Q^a враховують локальну втрату внутрішньої енергії тілом внаслідок емісії ним теплового випромінювання та її приріст внаслідок поглинання тілом теплового електромагнітного поля:

$$Q^e(T) = 4\pi n^2 \int_0^\infty \alpha_v I_{vb}(T) dv, \quad Q^a(I_v) = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \int_0^\infty \alpha_v I_v dv d\mu d\varphi. \quad (5)$$

Крайові умови для рівнянь (1), (4) запишемо з урахуванням емісії, поглинання та розсіювання ІЧ-випромінювання поверхнею. Для цього введемо безрозмірні спектральні коефіцієнти поверхневого поглинання ε_v та розсіювання ρ_v : $\varepsilon_v = \varepsilon_{v1}$, $\rho_v = \rho_{v1}$ на \mathcal{S}_1 , $\varepsilon_v = \varepsilon_{v2}$, $\rho_v = \rho_{v2}$ на \mathcal{S}_2 . Відповідно до цього у рівнянні балансу енергії для елемента поверхні врахуємо: **а)** кондуктивний тепловий потік $-\lambda \nabla T$; **б)** конвективний теплообмін із зовнішнім середовищем $H(T - T_{\text{ext}})$; **в)** приплив енергії теплового випромінювання q_{ext}^a , що падає на поверхню із зовнішнього середовища; **г)** приплив енергії теплового випромінювання q_{in}^a , що падає на поверхню \mathcal{S} з об'єму \mathcal{V} тіла; **д)** відтік енергії з поверхні, зумовлений тепловим випромінюванням $q_{\text{in}}^e(\mathbf{r})$ поверхні \mathcal{S} всередину тіла; **е)** відтік енергії з поверхні, зумовле-

ний тепловим випромінюванням q_{out}^e поверхні \mathcal{S} у зовнішнє середовище:

$$q_{\text{ext}}^a(\mathbf{r}) = \begin{cases} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^0 \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\omega} \int_0^\infty \varepsilon_v I_v^{\text{ext}}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega}) dv d\mu d\varphi, & \mathbf{r} \in \mathcal{S}_1, \\ \int_0^{2\pi} \int_0^1 \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\omega} \int_0^\infty \varepsilon_v I_v^{\text{ext}}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega}) dv d\mu d\varphi, & \mathbf{r} \in \mathcal{S}_2, \end{cases} \quad (6)$$

$$q_{\text{in}}^a(\mathbf{r}) = \begin{cases} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\omega} \int_0^\infty \varepsilon_v I_v(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega}) dv d\mu d\varphi, & \mathbf{r} \in \mathcal{S}_1, \\ \int_0^{2\pi} \int_{-1}^0 \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\omega} \int_0^\infty \varepsilon_v I_v(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega}) dv d\mu d\varphi, & \mathbf{r} \in \mathcal{S}_2, \end{cases} \quad (7)$$

$$q_{\text{in}}^e(\mathbf{r}) = 2\pi n^2 \int_0^\infty \varepsilon_v I_{bv}(T(\mathbf{r})) dv,$$

$$q_{\text{out}}^e(\mathbf{r}) = 2\pi \int_0^\infty \varepsilon_v I_{bv}(T(\mathbf{r})) dv, \quad \mathbf{r} \in \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2. \quad (8)$$

В результаті отримаємо такі крайові умови для рівняння теплопровідності (4) на поверхнях \mathcal{S}_1 та \mathcal{S}_2 :

$$-\lambda \mathbf{n} \cdot \nabla T(\mathbf{r}) = H(\mathbf{r})(T(\mathbf{r}) - T_{\text{ext}}(\mathbf{r})) - q_{\text{ext}}^a(\mathbf{r}) + q(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2. \quad (9)$$

Тут використано позначення

$$q(\mathbf{r}) = -q_{\text{in}}^a(\mathbf{r}) + q_{\text{in}}^e(\mathbf{r}) + q_{\text{out}}^e(\mathbf{r}). \quad (10)$$

Щоб записати умови для інтенсивності випромінювання на поверхнях \mathcal{S}_1 та \mathcal{S}_2 , подамо функцію $I_v(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega})$ у вигляді

$$I_v(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega}) = \begin{cases} I_v^+(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega}) & \forall \boldsymbol{\omega} \in \Omega^+, \\ I_v^-(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega}) & \forall \boldsymbol{\omega} \in \Omega^-, \end{cases} \quad \forall \mathbf{r} \in \mathcal{V}, \quad (11)$$

де $\Omega^+ = \{\theta \times \varphi \mid \forall \theta \in (0, \pi/2), \varphi \in (0, 2\pi)\}$, $\Omega^- = \{\theta \times \varphi \mid \forall \theta \in (\pi/2, \pi), \varphi \in (0, 2\pi)\}$ – півсферичні тілесні кути.

Кожна зі складових $I_v^+(s)$ та $I_v^-(s)$ задовольняє рівняння (1), а їхня сума визначає інтенсивність випромінювання $I_v(s)$, що поширюється уздовж лінії $\mathbf{r}(s)$.

У балансі випромінювання, яке виходить із точок граничних поверхонь і поширюється всередину тіла \mathcal{B} , врахуємо: **а**) зовнішнє випромінювання I_v^{ext} , яке проникає крізь поверхню в об'єм \mathcal{V} ; **б**) теплове випромінювання самої поверхні; **в**) випромінювання, яке поширюється з об'єму тіла у напрямку поверхні і розсіюється нею всередину тіла.

В результаті отримаємо умови для інтенсивностей $I_v^+(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega})$ та $I_v^-(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega})$ на граничних поверхнях \mathcal{S}_1 та \mathcal{S}_2 :

$$I_v^+(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega}) = (1 - \varepsilon_{v1})(1 - \rho_{v1})I_v^{\text{ext}}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega}_1) + \varepsilon_{v1}n^2 I_{vb}(T(\mathbf{r})) + \rho_{v1} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^0 p_1(\boldsymbol{\omega}', \boldsymbol{\omega}) I_v^-(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega}') d\mu' d\varphi', \quad \boldsymbol{\omega} \in \Omega^+, \quad \mathbf{r} \in \mathcal{S}_1, \quad (12)$$

$$I_v^-(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega}) = (1 - \varepsilon_{v2})(1 - \rho_{v2})I_v^{\text{ext}}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega}_1) + \varepsilon_{v2}n^2 I_{vb}(T(\mathbf{r})) + \rho_{v2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 p_2(\boldsymbol{\omega}', \boldsymbol{\omega}) I_v^+(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega}') d\mu' d\varphi', \quad \boldsymbol{\omega} \in \Omega^-, \quad \mathbf{r} \in \mathcal{S}_2. \quad (13)$$

Тут $\boldsymbol{\omega}_1 = \boldsymbol{\omega}_1(\theta_1, \varphi_1)$ – вектор, залежний від $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(\theta, \varphi)$, $\varphi_1 = \varphi$, $\sin \theta_1 = \frac{1}{n} \sin \theta$;
 $p_1(\boldsymbol{\omega}', \boldsymbol{\omega})$, $p_2(\boldsymbol{\omega}', \boldsymbol{\omega})$ – індикатрисис розсіювання поверхонь \mathcal{S}_1 , \mathcal{S}_2 .

Рівняння (1), (4) та умови (9), (12), (13) утворюють математичну модель для опису процесів теплопровідності та перенесення випромінювання у шарі, який випромінює, поглинає та розсіює ІЧ-радіацію як в об'ємі, так і на поверхнях.

2. Задачі теплообміну та емісійної томографії температурного поля. Сформулюємо в рамках побудованої моделі задачу теплообміну, а також пряму та обернену задачі емісійної томографії температурного поля у шарі \mathcal{B} .

Задача теплообміну. Нехай задано просторово-кутові розподіли спектральної густини ІЧ-випромінювання $I_{v_2}^{\text{ext}}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega})$, $\mathbf{r} \in \mathcal{S}_1$, $\boldsymbol{\omega} \in \Omega^+$, та $I_{v_2}^{\text{ext}}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega})$, $\mathbf{r} \in \mathcal{S}_2$, $\boldsymbol{\omega} \in \Omega^-$, які падають ззовні на поверхні \mathcal{S}_1 та \mathcal{S}_2 тіла \mathcal{B} , температура середовища $T_1(\mathbf{r}) = T_{\text{ext}}(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \mathcal{S}_1$, та $T_2 = T_{\text{ext}}(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \mathcal{S}_2$, поблизу поверхонь \mathcal{S}_1 та \mathcal{S}_2 . За відомих властивостей матеріалу шару λ , h , n , α_v , σ_v , $p(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}')$, ε_{vi} , ρ_{vi} , $p_i(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}')$ треба знайти температурне поле $T(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \mathcal{V}$, і просторово-кутовий розподіл спектральної інтенсивності випромінювання в тілі $I_v(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega})$, $\mathbf{r} \in \mathcal{V}$, $\boldsymbol{\omega} \in \Omega = \Omega^+ \cup \Omega^-$, які задовольняють рівняння (1), (4) та крайові умови (9), (12), (13).

За відомим розв'язком задачі теплообміну можна обчислити інтенсивності ІЧ-випромінювання $I_{v_1}^{\text{out}}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega})$, $\mathbf{r} \in \mathcal{S}_1$, $\boldsymbol{\omega} \in \Omega^-$, та $I_{v_2}^{\text{out}}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega})$, $\mathbf{r} \in \mathcal{S}_2$, $\boldsymbol{\omega} \in \Omega^+$, яке тіло \mathcal{B} емітує в зовнішнє середовище через поверхні \mathcal{S}_1 та \mathcal{S}_2 . Їх утворюють: зовнішнє випромінювання, розсіяне поверхнею, випромінювання, яке виділяє поверхня тіла та випромінювання з товщі шару, яке виходить через поверхню тіла в зовнішнє середовище:

$$\begin{aligned} I_{v_1}^{\text{out}}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega}) &= \rho_{v_1} \int_0^{2\pi} \int_0^1 p_1(\boldsymbol{\omega}', \boldsymbol{\omega}) I_{v_1}^{\text{ext}}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega}') d\mu' d\varphi' + \varepsilon_{v_1} I_{v_b}(T(\mathbf{r})) + \\ &+ (1 - \varepsilon_{v_1})(1 - \rho_{v_1}) I_v^-(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega}), \quad \mathbf{r} \in \mathcal{S}_1, \quad \boldsymbol{\omega} \in \Omega^-, \\ I_{v_2}^{\text{out}}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega}) &= \rho_{v_2} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^0 p_2(\boldsymbol{\omega}', \boldsymbol{\omega}) I_{v_2}^{\text{ext}}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega}') d\mu' d\varphi' + \varepsilon_{v_2} I_{v_b}(T(\mathbf{r})) + \\ &+ (1 - \varepsilon_{v_2})(1 - \rho_{v_2}) I_v^+(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega}), \quad \mathbf{r} \in \mathcal{S}_2, \quad \boldsymbol{\omega} \in \Omega^+. \end{aligned} \quad (14)$$

Пряма задача емісійної ІЧ-томографії. Нехай задано просторово-кутові розподіли спектральної густини ІЧ-випромінювання $I_{v_2}^{\text{ext}}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega})$, $\mathbf{r} \in \mathcal{S}_1$, $\boldsymbol{\omega} \in \Omega^+$, та $I_{v_2}^{\text{ext}}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega})$, $\mathbf{r} \in \mathcal{S}_2$, $\boldsymbol{\omega} \in \Omega^-$, які падають ззовні на поверхні \mathcal{S}_1 та \mathcal{S}_2 тіла \mathcal{B} , і температури середовищ $T_1(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \mathcal{S}_1$ та $T_2(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \mathcal{S}_2$, поблизу поверхонь \mathcal{S}_1 та \mathcal{S}_2 . Вважаючи відомими теплофізичні і радіаційні (об'ємні і поверхневі) властивості, з урахуванням рівнянь (1), (4) і співвідношень (9), (12), (13) треба визначити просторово-кутові розподіли спектральної інтенсивності випромінювання $I_{v_1}^{\text{out}}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega})$, $\mathbf{r} \in \mathcal{S}_1$, $\boldsymbol{\omega} \in \Omega^-$, та $I_{v_2}^{\text{out}}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega})$, $\mathbf{r} \in \mathcal{S}_2$, $\boldsymbol{\omega} \in \Omega^+$, які тіло віддає у зовнішнє середовище через поверхні \mathcal{S}_1 та \mathcal{S}_2 . Розв'язування цієї задачі зводиться до розв'язування задачі теплообміну та обчислення розподілів $I_{v_1}^{\text{out}}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega})$, $I_{v_2}^{\text{out}}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega})$ за формулами (14).

Отримані розподіли $I_{\nu 1}^{\text{out}}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega})$ та $I_{\nu 2}^{\text{out}}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega})$ дозволяють оцінити вимірнувальні інформативні параметри, які можна використати як апостеріорні дані для формулювання обернених задач визначення температурного поля в тілі.

Обернена задача емісійної ІЧ-томографії. Нехай задано просторово-кутові розподіли інтенсивності ІЧ-випромінювання $I_{\nu 1}^{\text{out}}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega})$, $\mathbf{r} \in \mathcal{S}_1$, $\boldsymbol{\omega} \in \Omega^-$ та $I_{\nu 2}^{\text{out}}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega})$, $\mathbf{r} \in \mathcal{S}_2$, $\boldsymbol{\omega} \in \Omega^+$, яке тіло \mathcal{B} емітує в зовнішнє середовище через поверхні \mathcal{S}_1 та \mathcal{S}_2 . Вважаючи відомими теплофізичні і радіаційні (об'ємні і поверхневі) властивості, треба знайти температурне поле $T(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \mathcal{V}$, та просторово-кутовий розподіл спектральної інтенсивності випромінювання $I_{\nu}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega})$, $\mathbf{r} \in \mathcal{V}$, $\boldsymbol{\omega} \in \Omega$, які узгоджуються в певному сенсі із рівняннями (1), (4) та співвідношеннями (9), (12), (13).

3. Ітераційний метод розв'язування прямої задачі. Труднощі розв'язування прямої задачі зумовлені: **а)** її розмірністю – у тривимірному випадку необхідно встановити температурне поле $T(\mathbf{r})$ як функцію трьох скалярних координат x , y , z і спектральну інтенсивність випромінювання $I_{\nu}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega})$ як функцію просторових x , y , z та двох куткових θ , ϕ координат і частоти ν ; **б)** зв'язністю кондуктивного та променевого теплоперенесення – рівняння (1) і (4), а також крайові умови (9), (12), (13) залежать від обох шуканих функцій $T(\mathbf{r})$ і $I_{\nu}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega})$, крім того, рівняння (1), що описує перенесення випромінювання уздовж довільного напрямку $\mathbf{r}(s)$, містить доданок $S_{\nu}^{\text{sc}}(s)$ у правій частині, залежний від розв'язків цього рівняння для всіх інших напрямків, які перетинають лінію $\mathbf{r}(s)$; **в)** нелінійністю – рівняння (2), (4) і крайові умови (9), (10), (13) є нелінійними стосовно температури T ; **г)** великою кількістю характеристик матеріалу та залежністю радіаційних властивостей від частоти ν .

Розглянемо далі одновимірну задачу для ізотропного плоского шару $-\infty < x < \infty$, $-b < y < b$, $-\infty < z < \infty$.

Нехай температура T тіла залежить лише від координати: $T = T(y)$, а інтенсивність – від координати y і напрямку поширення: $I_{\nu} = I_{\nu}(y, \mu)$. Радіаційні характеристики матеріалу не залежать від частоти ν . Такий підхід є відомий як наближення сірих тіл [6] і в ньому, замість спектральної інтенсивності випромінювання $I_{\nu}(y, \mu)$, використовують інтегральну

$$I(y, \mu) = \int_0^{\infty} I_{\nu}(y, \mu) d\nu.$$

За таких умов рівняння (4) та (1) набувають вигляду [9]

$$\frac{d^2 \bar{T}(\bar{y})}{d\bar{y}^2} = \frac{2\bar{\alpha}}{\bar{\lambda}} \left[2(\bar{T}(\bar{y}))^4 - \int_{-1}^1 J(\bar{y}, \mu) d\mu \right], \quad (15)$$

$$\mu \frac{\partial J(\bar{y}, \mu)}{\partial \bar{y}} + J(\bar{y}, \mu) = \frac{1}{2} (1 - \bar{\alpha}) \int_{-1}^1 J(\bar{y}, \mu') d\mu' + \bar{\alpha} (\bar{T}(\bar{y}))^4. \quad (16)$$

Тут введено позначення: $\bar{y}_0 = y/\ell_0$ – просторова координата, нормована на оптичну товщину $\ell_0 \equiv 1/\beta$, де $\beta \equiv \alpha + \sigma$; α та σ – інтегральні коефіцієнти поглинання та розсіювання випромінювання в об'ємі; $\bar{\lambda} = \lambda\beta/(\sigma_{SB} n^2 T_0^3)$, σ_{SB} – стала Стефана – Больцмана; $\bar{\alpha} = \alpha/\beta$ – нормований коефіцієнт поглинан-

ня; $\bar{T} \equiv T/T_0 = \bar{T}(\bar{y})$ – нормована температура; $J \equiv I/I_B(T_0) = J(\bar{y}, \mu)$ – нормована інтенсивність випромінювання, $I_B(\cdot) = \sigma_{SB} n^2(\cdot)^4 / \pi$.

Нехай на поверхні $\bar{y} = -\bar{b}$ виконуються умови першого роду $T(-b) = T_0 = \text{const}$, а поверхня $\bar{y} = \bar{b}$ обмінюється теплом із зовнішнім середовищем за конвективним і радіаційним механізмами. Тоді крайові умови для температури \bar{T} на поверхнях $\bar{y} = \pm \bar{b}$ матимуть вигляд

$$\begin{aligned} \bar{T} \Big|_{\bar{y}=-\bar{b}} &= 1, \\ \bar{\lambda} \frac{d\bar{T}}{d\bar{y}} \Big|_{\bar{y}=\bar{b}} + \bar{H}(\bar{T} \Big|_{\bar{y}=\bar{b}} - \bar{T}_2) &= -\varepsilon \left[(\bar{T} \Big|_{\bar{y}=\bar{b}})^4 - 2(1-\rho) \int_0^1 J^+ \Big|_{\bar{y}=\bar{b}} \mu d\mu \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

Тут позначено $\bar{b} \equiv b/\ell_0$, $\bar{H} \equiv H/(\sigma_{SB} n^2 T_0^3)$.

Нехай поверхня $\bar{y} = \bar{b}$ є абсолютно чорною: $\varepsilon_1 = 1$, а поверхня $\bar{y} = -\bar{b}$ випромінює, поглинає, ізотропно розсіює та пропускає ІЧ-радіацію; її інтегральні коефіцієнти поглинання та відбивання дорівнюють ε та ρ . За відсутності зовнішнього теплового випромінювання крайові умови (13) на поверхнях $\bar{y} = -\bar{b}$ та $\bar{y} = \bar{b}$ набувають вигляду

$$\begin{aligned} J^+ \Big|_{\bar{y}=-\bar{b}} &= 1, \\ J^- \Big|_{\bar{y}=\bar{b}} &= \varepsilon J_B(\bar{T}) \Big|_{\bar{y}=\bar{b}} + 2\rho \int_0^1 J^+ \mu' d\mu' \Big|_{\bar{y}=\bar{b}}. \end{aligned} \quad (18)$$

Для розв'язування задачі теплообміну застосуємо ітераційний підхід. З цією метою, виходячи із рівнянь (15) і (16), утворимо ітераційну послідовність

$$\frac{d^2 \bar{T}^{(k+1)}}{d\bar{y}^2} = \Theta(\bar{T}^{(k)}, J^{(k)}), \quad (19)$$

$$\mu \frac{\partial J^{(k+1)}}{\partial \bar{y}} + J^{(k+1)} = f(\bar{T}^{(k+1)}, J^{(k)}). \quad (20)$$

Тут позначено

$$\Theta(\bar{T}^{(k)}, J^{(k)}) = \frac{2\bar{\alpha}}{\bar{\lambda}} \left(2J_B(\bar{T}^{(k)}(\bar{y})) - \int_{-1}^1 J^{(k)}(\bar{y}, \mu) d\mu \right), \quad (21)$$

$$f(\bar{T}^{(k+1)}, J^{(k)}) = \bar{\alpha} (\bar{T}^{(k+1)}(\bar{y}))^4 + \frac{1}{2} (1 - \bar{\alpha}) \int_{-1}^1 J^{(k)}(\bar{y}, \mu') d\mu'. \quad (22)$$

У формулах (19)–(22) і далі верхній індекс в дужках вказує на номер ітерації.

Виходячи із крайових умов (17), запишемо

$$\begin{aligned} \bar{T}^{(k)} \Big|_{\bar{y}=-\bar{b}} &= 1, \\ \bar{\lambda} \frac{d\bar{T}^{(k+1)}}{d\bar{y}} \Big|_{\bar{y}=\bar{b}} + \bar{h} \left(\bar{T}^{(k+1)} \Big|_{\bar{y}=\bar{b}} - \bar{T}_2 \right) &= \mathcal{Q} \left(\bar{T}^{(k)} \Big|_{\bar{y}=\bar{b}}, J^{(k)} \Big|_{\bar{y}=\bar{b}} \right), \end{aligned} \quad (23)$$

де

$$\mathcal{Q} \left(\bar{T}^{(k)} \Big|_{\bar{y}=\bar{b}}, J^{(k)} \Big|_{\bar{y}=\bar{b}} \right) = -\varepsilon \left[(\bar{T}^{(k)} \Big|_{\bar{y}=\bar{b}})^4 - 2(1-\rho) \int_0^1 J^{(k)} \Big|_{\bar{y}=\bar{b}} \mu d\mu \right]. \quad (24)$$

Аналогічно, виходячи із умов (18), запишемо

$$J^{+(k)} \Big|_{\bar{y}=\bar{b}} = 1,$$

$$J^{-(k+1)} \Big|_{\bar{y}=\bar{b}} = \varepsilon J_B(\bar{T}^{(k+1)}) \Big|_{\bar{y}=\bar{b}} + 2\rho \int_0^1 J^{+(k)} \mu' d\mu' \Big|_{\bar{y}=\bar{b}}. \quad (25)$$

Як випливає з формул (21), (22), за відомого розв'язку на k -й ітерації права частина $\Theta^{(k)}(\bar{y})$ рівняння (19) є відомою функцією незалежної змінної \bar{y} , а з формули (24) випливає, що правою частиною умови (23)₂ є відоме дійсне число $Q^{(k)}$. Інтегруючи лінійну крайову задачу (19), (23), отримаємо температурне поле в шарі на $k+1$ -й ітерації. Підставляючи отриманий розв'язок у формулу (22), визначимо праву частину рівняння (20) як функцію незалежної змінної \bar{y} . Обчисливши також праву частину умови (25)₂ за відомими функціями $\bar{T}^{(k+1)}(\bar{y})$ та $J^{(k)}(\bar{y}, \mu)$, інтегруємо крайову задачу (20), (25) і знаходимо функцію $J^{(k+1)}(\bar{y}, \mu)$. В результаті отримуємо

$$\bar{T}^{(k+1)}(\bar{y}) = \int_{-\bar{b}}^{\bar{y}} \int_{-\bar{b}}^{\zeta} \Theta^{(k)}(\zeta) d\zeta d\zeta + \left(Q^{(k)} - \int_{-\bar{b}}^{\bar{b}} \Theta^{(k)}(\bar{y}) d\bar{y} \right) (\bar{y} + \bar{b}) + 1, \quad (26)$$

$$J^{+(k+1)}(\bar{y}, \mu) = \int_{-\bar{b}}^{\bar{y}} \frac{f^{(k)}(\zeta) e^{-(\bar{y}-\zeta)/\mu}}{\mu} d\zeta + e^{-(\bar{y}+\bar{b})/\mu},$$

$$J^{-(k+1)}(\bar{y}, \mu) = \int_{\bar{b}}^{\bar{y}} \frac{f^{(k)}(\zeta) e^{-(\bar{y}-\zeta)/\mu}}{\mu} d\zeta +$$

$$+ e^{-(\bar{y}-\bar{b})/\mu} \left(\varepsilon J_B(\bar{T}^{(k)}) \Big|_{\bar{y}=\bar{b}} + 2\rho \int_0^1 p J^{+(k)} \mu' d\mu' \Big|_{\bar{y}=\bar{b}} \right). \quad (27)$$

Ефективність розглянутого тут підходу до розв'язування задачі теплообміну чисельно досліджена в публікації [8]. За початкове наближення вибирали наближення радіаційної рівноваги [6, 8, 9].

На рис. 1 показано розподіли температури \bar{T} (рис. 1а) та інтенсивності випромінювання \bar{J}^+ (при $\mu = 1$) (рис. 1б) в шарі для значень температур $T_0 = 750, 1000, 1250$ К.

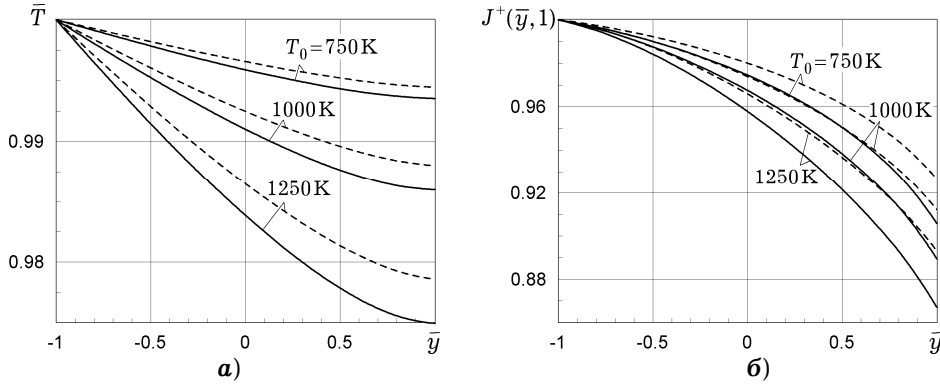


Рис. 1

Суцільні лінії на рис. 1 та рис. 2 відповідають значенням радіаційних параметрів $\varepsilon = \rho = 0.1$; штрихові — $\varepsilon = \rho = 0.2$. Значення інших параметрів приймали сталими: $\bar{\lambda} = 1$, $\bar{b} = 1$, $\alpha = 5500 \text{ м}^{-1}$, $\sigma = 4500 \text{ м}^{-1}$, $n = 1.65$, $T_{\text{out}} = 300 \text{ К}$, $H = 5 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$.

Радіаційний потік, який випромінює шар через поверхню $\bar{y} = \bar{b}$, містить дві складових: \bar{q}_B^{out} – потік, який випромінює поверхня $\bar{y} = \bar{b}$, що має температуру $\bar{T}(\bar{b})$, та потік \bar{q}_V^{out} , що виходить із товщі шару:

$$\bar{q}^{\text{out}} = \bar{q}_B^{\text{out}} + \bar{q}_V^{\text{out}} = \varepsilon \sigma_{SB} \bar{T}^4(b) + 2\pi(1 - \varepsilon)(1 - \rho) \int_0^1 J^+(y, \mu) \mu d\mu \Big|_{y=b}. \quad (28)$$

Обчислення потоків \bar{q}_B^{out} , \bar{q}_V^{out} виконано з використанням розв'язків (26), (27). На рис. 2 показано залежності складових \bar{q}_B^{out} , \bar{q}_V^{out} від температури T_0 поверхні $\bar{y} = \bar{b}$ за різних коефіцієнтів поглинання та відбивання ε і ρ поверхні $\bar{y} = \bar{b}$: $\varepsilon = \rho = 0.1$ (суцільні лінії) та $\varepsilon = \rho = 0.2$ (штрихові лінії).

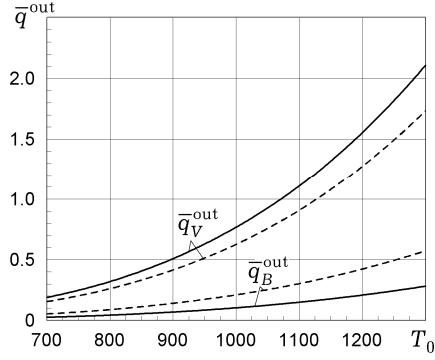


Рис. 2

Ітераційний метод розв'язування оберненої задачі. Як впливає із залежностей, наведених на рис. 2, частка теплового випромінювання, яке виникає в об'ємі шару є істотна. Тож, вимірюючи потік \bar{q}^{out} , отримуємо інформацію як про поверхневу температуру, так і про розподіл температури в об'ємі. Тому розглянемо обернену задачу емісійної томографії температурного поля в шарі за значенням потоку \bar{q}^{out} .

Нехай поверхня $\bar{y} = -\bar{b}$ шару \mathcal{B} перебуває в ідеальному тепловому контакті із абсолютно чорною поверхнею, температура T_0 якої невідома. Поверхня $\bar{y} = \bar{b}$ обмінюється теплом за конвективним та радіаційними механізмами із зовнішнім середовищем, температура \bar{T}_2 якого задана. Якщо вибрати за нормувальну температуру деяке фіксоване значення $T_{\text{norm}} \neq T_0$, то температура $\bar{T}(\bar{y})$ та інтенсивність випромінювання $J(\bar{y}, \mu)$ в шарі задовольнятимуть за таких умов рівняння (15), (16) і крайові умови вигляду (17), (18), у яких замість співвідношень (17)₁ та (18)₁ використано відповідні співвідношення

$$\bar{T} \Big|_{\bar{y}=-\bar{b}} = \bar{T}_0, \quad J^+ \Big|_{\bar{y}=-\bar{b}} = \bar{T}_0^4, \quad (29)$$

Вважаючи відомими теплофізичні, а також об'ємні й поверхневі радіаційні властивості матеріалу шару, знайти одновимірне температурне поле шару $\bar{T} = \bar{T}(\bar{y})$ та розподіл інтенсивності випромінювання $J(\bar{y}, \mu)$, які узгоджуються із рівняннями (15), (16) та умовами (29)₁, (17)₂, (29)₂, (18)₂.

Така задача виникає на практиці, коли необхідно визначити температуру поверхні, вкритої діелектричним шаром, неруйнівним безконтактним методом. Наприклад, визначити температури розплаву металу, вкритого шаром шлаку.

Розглянемо ітераційний алгоритм розв'язування оберненої задачі.

Нехай $\bar{q}_{\text{emp}}^{\text{out}}$ – задане значення радіаційного потоку, що випромінюється шаром \mathcal{B} крізь поверхню $\bar{y} = \bar{b}$, встановлене емпіричним шляхом. Задамо деяке значення температури \bar{T}_0 поверхні $\bar{y} = -\bar{b}$ і розв'яжемо пряму задачу (15), (16), (29)₁ (17)₂, (29)₂, (18)₂, використовуючи ітераційний метод,

описаний у попередньому розділі. Позначимо через $\bar{q}^{\text{out}}(\bar{T}_0)$ значення теплового потоку, розрахованого за формулою (28) на основі отриманого розв'язку прямої задачі. Якщо температура \bar{T}_0 дорівнює істинній температурі \bar{T}_0^{act} поверхні \mathcal{S}_1 , за якої здійснювалося визначення емпіричного потоку $\bar{q}_{\text{emp}}^{\text{out}}$, то виконуватиметься співвідношення $|\bar{q}^{\text{out}}(\bar{T}_0) - \bar{q}_{\text{emp}}^{\text{out}}| < \bar{\varepsilon}$, де додатний параметр $\bar{\varepsilon}$ залежить від похибок вимірювання та обчислень.

Таким чином, для знаходження невідомого значення \bar{T}_0 слід мінімізувати неявно задану функцію

$$\Phi(\bar{T}_0) = |\bar{q}^{\text{out}}(\bar{T}_0) - \bar{q}_{\text{emp}}^{\text{out}}| \quad (30)$$

або знайти розв'язок неявно заданого рівняння

$$\bar{q}^{\text{out}}(\bar{T}_0) - \bar{q}_{\text{emp}}^{\text{out}} = 0. \quad (31)$$

Тут термін «неявно заданий» вживаємо у тому смислі, що аналітична структура ні функції (30), ні рівняння (31) апріорі невідомі, проте значення функції $\bar{q}^{\text{out}}(\bar{T}_0)$ можна обчислити для будь-якого заданого значення її аргументу шляхом розв'язування прямої задачі.

Числові дослідження запропонованого алгоритму провели із використанням числового експерименту. З цією метою задавали значення температури \bar{T}_0^{act} , розв'язували пряму задачу і за формулою (29) обчислювали потік \bar{q}^{out} , який приймали за $\bar{q}_{\text{emp}}^{\text{out}}$. Рівняння (31) розв'язували методом поділу відрізка. Для цього вибирали інтервал зміни шуканої змінної $\bar{T}_0 \in [\bar{T}_{01}, \bar{T}_{02}]$. Ітераційний процес зупиняли за досягнення точності $1.5 \cdot 10^{-4}$. Необхідна кількість ітерацій залежала від вибраного інтервалу $[\bar{T}_{01}, \bar{T}_{02}]$. Так, при $\bar{T}_{01} = 0.6\bar{T}_0^{\text{act}}$, $\bar{T}_{02} = 1.4\bar{T}_0^{\text{act}}$ процес завершувався за 8 ітерацій.

Провели також дослідження впливу похибки $\delta\bar{q}_{\text{emp}}^{\text{out}}$ вимірювання значення $\bar{q}_{\text{emp}}^{\text{out}}$. З цією метою змінювали задане емпіричне значення в межах $\pm 2\%$ та обчислювали істинну похибку визначення \bar{T}_0 . Результати виконаних розрахунків показано на рис. 3, де наведено залежність похибки визначення температури $\delta T_0 = (\bar{T}_0 - \bar{T}_0^{\text{act}}) / \bar{T}_0^{\text{act}}$ від похибки вимірювання потоку $\delta\bar{q}_{\text{emp}}^{\text{out}}$.

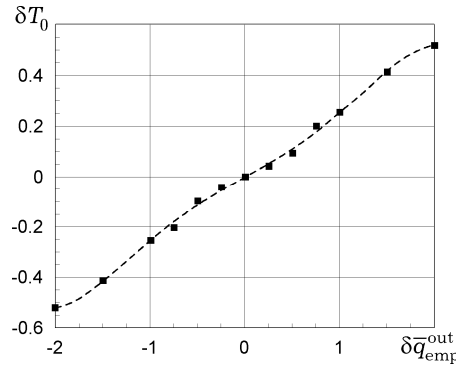


Рис. 3

Як бачимо, у діапазоні $\pm 2\%$ похи-

бок вимірювання відносна похибка визначення температури \bar{T}_0 є меншою від похибки вимірювання інтегрального потоку випромінювання.

Висновки. Розглянуто математичну модель, яка описує у взаємозв'язку кондуктивний теплообмін і перенесення теплового електромагнітного випромінювання в діелектричному шарі, що поглинає, випромінює та розсіює ІЧ-радіацію як в об'ємі, так і на поверхнях. У рамках моделі сформульовано пряму та обернену задачі емісійної ІЧ-томографії температурного поля за заданими просторово-кутовими розподілами інтенсивності випромінювання, що виходить із тіла через його поверхню. Запропоновано ітераційні методи розв'язування сформульованих задач.

Числові дослідження розроблених алгоритмів проведено для випадку одновимірного температурного поля у плоскому шарі, одна із поверхонь якого перебуває у ідеальному тепловому контакті із абсолютно чорною поверхнею, а інша обмінюється теплом із середовищем за конвективним і радіаційним механізмами.

З використання розробленого ітераційного методу розв'язування прямої задачі досліджено характеристики температурного поля і просторово-кутові розподіли інтенсивності ІЧ-випромінювання в шарі та в зовнішньому середовищі. Встановлено, що потік теплового випромінювання, який виділяє шар, є достатньо інформативним для відновлення температурного поля та інтенсивності випромінювання.

Розв'язування оберненої задачі зведено до мінімізації функції, яка визначає відхилення заданого значення радіаційного потоку, від його розрахованого значення, отриманого на основі розв'язку прямої задачі. Розроблений ітераційний алгоритм розв'язування оберненої задачі, який базується на багаторазовому розв'язуванні прямої задачі.

1. *Бородай М. В., Коломієць І. Д., Бородай Д. М.* Дослідження впливу температури на оптичні характеристики теплозахисної ізоляції космічного корабля багаторазового використання // *Вимір. та обчисл. техніка в технологічних процесах.* – 2011. – № 1. – С. 29–34.
2. *Гачкевич О. Р., Терлецький Р. Ф., Курницький Т. Л.* Механотермодифузія в частково прозорих тілах. – Львів: Сполом, 2007. – 184 с. – Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під заг. ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра: В 5 т. – Т. 2.
3. *Домбровский Л. А.* Приближенные методы расчета теплообмена излучением в дисперсных системах // *Теплоэнергетика.* – 1996. – **43**, № 3. – С. 50–57.
Te same: *Dombrovskii L. A.* Approximate methods for calculating radiation heat transfer in dispersed systems // *Therm. Eng.* – 1996. – **43**, No. 3. – P. 235–243
4. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности. – Москва: Высш. шк., 1967. – 600 с.
Te same: *Luikov A. V.* Analytical heat diffusion theory. – New York: Acad. Press, 2012. – 702 p.
5. *Мокрецова И. А., Зуев А. В.* Математическое моделирование и оптимизация процесса теплопереноса в многослойных теплозащитных покрытиях многоразовых космических аппаратов // *Все материалы: энциклопедический справочник с Приложением «Комментарии к стандартам, ТУ, сертификатам».* – Москва: Наука и технологии. – 2012. – № 5. – С. 61–64.
6. *Озисик М. Н.* Сложный теплообмен. – Москва: Мир, 1976. – 606 с.
Te same: *Özisik M. N.* Radiative transfer and interactions with conduction and convection. – New York: Wiley Intersci. Publ., 1973. – 592 p.
7. *Самарский А. А., Вабищевич П. Н.* Вычислительная теплопередача. – Москва: Едиториал УРСС, 2003. – 784 с.
8. *Чекурін В. Ф., Бойчук Ю. В.* Теплообмін у шарі, що поглинає, випромінює та розсіює ІЧ-радіацію в об'ємі і на поверхні // *Відбір і обробка інформації.* – 2015. – Вип. 42. – С. 5–10.
9. *Чекурін В., Бойчук Ю.* Ітераційний підхід до розв'язування нелінійних задач кондуктивно-променевого теплообміну в плоскому шарі // *Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології.* – 2015. – Вип. 21. – С. 241–249.
10. *Amiri H., Mansouri S. H., Safavinejad A.* Combined conductive and radiative heat transfer in an anisotropic scattering participating medium with irregular geometries // *Int. J. Therm. Sci.* – 2010. – **49**, No. 3. – P. 492–503.
11. *Kushnir R. M., Popovych V. S.* Heat conduction problems of thermosensitive solids under complex heat exchange // In: *Heat conduction – Basic research / V. S. Vikhrenko (ed.)*. – Rijeka: InTech (Croatia), 2011. – 350 p. – (Chap. 6. – P. 131–154.) – <http://www.intechopen.com/books/show/title/heat-conduction-basic-research>.
12. *Lienhard D. H. IV, Lienhard D. H. V* A heat transfer textbook. – Cambridge, MA: Phlogiston Press, 2016. – x+755 p.
13. *Tien C. L., Chen G.* Challenges in microscale conductive and radiative heat transfer // *Trans. ASME. J. Heat Transf.* – 1994. – **116**, No. 4. – P. 799–807.
14. *Xia X.-L., Huang Y., Tan H.-P., Zhang X.-B.* Simultaneous radiation and conduction heat transfer in a graded index semitransparent slab with gray boundaries // *Int. J. Heat Mass Transf.* – 2002. – **45**, No. 13. – P. 2673–2688.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ЭМИССИОННОЙ ИК-ТОМОГРАФИИ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В ИЗОТРОПНОМ СЛОЕ

Рассматривается математическая модель для определения температурного поля в слое, который излучает, поглощает и рассеивает ИК-радиацию как в объеме, так и на поверхности. В рамках модели сформулированы прямая и обратная задачи эмиссионной томографии температурного поля в слое по известным пространственно-угловыми распределениям интенсивности ИК-излучения, которое он испускает во внешнюю среду. Разработаны итерационные методы решения прямой и обратной задач. На конкретном примере проведено численное исследование предложенных алгоритмов.

MATHEMATICAL MODEL FOR IR EMISSION TOMOGRAPHY OF TEMPERATURE FIELD IN ISOTROPIC LAYER

A mathematical model for determination of a temperature field in a layer emitting, absorbing, and scattering IR-radiation in its volume and on the surface, is considered. In the frame of the model the direct and inverse problems for emission tomography of temperature field in the layer are formulated using given spatial-angular distributions of ambient IR-radiation emitting by it. Iterative methods for solution of direct and inverse problems are developed. Numerical study of the developed algorithms is fulfilled on a specific example.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
12.01.16