УДК 517.524

С. М. Возна, Х. Й. Кучмінська

АПРОКСИМАЦІЙНА ФОРМУЛА У ВИГЛЯДІ ПРИЄДНАНОГО НЕПЕРЕРВНОГО ДРОБУ

Для функції, що задовольняє умови, які забезпечують граничний перехід в обернених різницях інтерполяційної формули Тіле при $x_i \to x_0$, $i = 1, \dots, n$, *отримано розвинення у приєднаний неперервний дріб спеціального вигляду в околі точки* x_0.

1. Попередні дослідження. Правильний неперервний дріб, відповідний до формального ряду Тейлора, можна отримати принаймні двома шляхами: застосувавши метод Вісковатова чи здійснивши граничний перехід, коли всі вузли інтерполяції збігаються до однієї точки в інтерполяційній формулі Тіле [4].

Зауважимо, що обернені розділені різниці, з яких будується формула Тіле,

$$\Phi_k[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k] =$$
$$= \frac{x_k - x_{k-1}}{\Phi_{k-1}[x_0, \dots, x_{k-2}, x_k] - \Phi_{k-1}[x_0, \dots, x_{k-2}, x_{k-1}]}, \qquad k = 1, 2, \dots, n,$$
$$\Phi_0(x) = f(x),$$

є симетричними тільки відносно двох останніх значень аргументу і не є симетричними відносно інших значень аргументу, що не дозволяє зробити граничний перехід при всіх $x_k \to x_0$. Зауваживши, що вираз

$$\rho_k(x_0, \dots, x_k) = \Phi_k[x_0, \dots, x_k] + \Phi_{k-2}[x_0, \dots, x_{k-2}] + \Phi_{k-4}[x_0, \dots, x_{k-4}] +$$
$$+ \dots + \Phi_{k-2[k/2]}[x_0, \dots, x_{k-2[k/2]}],$$

де $[m]$ – ціла частина числа m, симетричний відносно всіх $k+1$ значень аргументу, Т. Тіле [4] запропонував обернені різниці для функції $f(x)$ у вигляді

$$\rho_k(x_0, \dots, x_k) =$$
$$= \frac{x_k - x_{k-1}}{\rho_{k-1}(x_0, \dots, x_{k-2}, x_k) - \rho_{k-1}(x_0, \dots, x_{k-2} x_{k-1})} + \rho_{k-2}(x_0, \dots, x_{k-2}), \qquad (1)$$
$$\rho_{-1} = 0, \qquad k = 1, 2, \dots .$$

Оператор ρ_k не можна розуміти як повторне застосування оператора ρ_{k-1}, він також не є дистрибутивним.

Якщо різниця $\rho_k(x_0, x_1, \dots, x_k)$ залежить від усіх послідовних значень аргументу, то позначатимемо її через ρ_k.

За допомогою обернених різниць ρ_k можна визначити обернені розділені різниці Φ_k:

$$\Phi_0(x_0) = f(x_0) = \rho_0(x_0),$$
$$\Phi_1[x_0, x_1] = \rho_1(x_0, x_1),$$
$$\Phi_k[x_0, \dots, x_k] = \rho_k(x_0, \dots, x_k) - \rho_{k-2}(x_0, \dots, x_{k-2}),$$

і отримати інтерполяційну формулу Тіле

$T_n(x) =$

$$= f(x_0) + \cfrac{x - x_0}{\rho_1(x_0, x_1) + \cfrac{x - x_1}{\rho_2(x_0, x_1, x_2) - f(x_0) + \genfrac{}{}{0pt}{}{}{\vdots \atop {} + \cfrac{x - x_{n-1}}{\rho_n(x_0, \dots, x_n) - \rho_{n-2}(x_0, \dots, x_{n-2})}}}}} =$$

$$= f(x_0) + \frac{x - x_0|}{|\rho_1} + \frac{x - x_1|}{|\rho_2 - f(x_0)} + \dots + \frac{x - x_{n-1}|}{|\rho_n - \rho_{n-2}}, \qquad (2)$$

з якої при всіх $x_k \to x_0$, $k = 1, 2, \dots, n$, внаслідок симетрії обернених різниць маємо відповідний неперервний дріб до формального степеневого ряду

$$f(x_0) + \cfrac{(x - x_0)}{`f(x_0) + \cfrac{(x - x_0)}{2`[`f(x)]_{x=x_0} + \genfrac{}{}{0pt}{}{}{\vdots \atop {} + \cfrac{(x - x_0)}{n`[{}^{(n-1)}f(x)]_{x=x_0}}}}}, \qquad (3)$$

де $i`[{}^{(i-1)}f(x)]_{x=x_0} = {}^{(i)}f(x_0) - {}^{(i-2)}f(x_0)$,

а ${}^{(n)}f(x) = \lim\limits_{\substack{x_i \to x_0 \\ i=1,\dots,n}} \rho_n(x_0, x_1, \dots, x_n)$, $n = 1, 2, \dots,$ − n-на обернена похідна від функції $f(x)$ у точці $x = x_0$ [4].

Для побудови приєднаного дробу до формального ряду Тейлора метод, подібний до методу Вісковатова, запропоновано в монографії У. Джоунса та В. Трона [2]. З використанням цієї ідеї нами отримано з формального ряду Тейлора приєднаний неперервний дріб спеціального вигляду

$$c_0 + c_1(x - x_0) + \cfrac{k_1(x - x_0)^2}{1 + l_1(x - x_0) - \cfrac{k_2(x - x_0)^2}{1 + l_2(x - x_0) - \ddots}} =$$

$$= c_0 + c_1(x - x_0) + \frac{k_1(x - x_0)^2}{1 + l_1(x - x_0)(x - x_0) - \mathop{D}\limits_{i=2}^{\infty} \dfrac{k_i(x - x_0)^2}{1 + l_i(x - x_0)}}, \qquad (4)$$

де $k_n \neq 0$, $k_n = \dfrac{\varphi_{n+1}\varphi_{n-1}}{\varphi_n^2}$, $n = 1, 2, \dots,$

$$\varphi_0 = \varphi_1 = 1, \qquad \varphi_m = \begin{vmatrix} c_2 & c_3 & \dots & c_m \\ c_3 & c_4 & \dots & c_{m+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_m & \dots & \dots & c_{2m-2} \end{vmatrix}, \qquad m = 2, 3, \dots,$$

та $l_0 = c_1$, $l_n = \dfrac{\chi_n}{\varphi_n} - \dfrac{\chi_{n+1}}{\varphi_{n+1}}$, $n = 1, 2, \dots,$

$$\chi_1 = 0, \quad \chi_2 = c_3, \quad \chi_m = \begin{vmatrix} c_2 & c_3 & \dots & c_{m-1} & c_{m+1} \\ c_3 & c_4 & \dots & c_m & c_{m+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_m & c_{m+1} & \dots & c_{2m-3} & c_{2m-1} \end{vmatrix}, \quad m = 3, 4, \dots,$$

$\varphi_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, і досліджено його властивості [5].

У цій роботі пропонуємо нову схему обчислення коефіцієнтів дробу (4), у якій будемо використовувати формулу Тіле (2) та інтерполяційну формулу, що базується на приєднаному неперервному дробі (4) [1]:

$$f(x_0) + W_1(x_1)(x - x_0) + \mathop{\mathrm{D}}_{k=0}^{n-1} \frac{(x - x_{2k})(x - x_{2k+1})}{W_{2k+2}(x_{2k+2}) + W_{2k+3}(x_{2k+3})(x - x_{2k+3})}, \quad (5)$$

де $W_0(x) = f(x)$,

$$W_{2k}(x_{2k}) = W_{2k}(x_0, x_1, \ldots, x_{2k-2}; x_{2k-1}, x_{2k}) =$$

$$= \frac{x_{2k} - x_{2k-1}}{W_{2k-1}(x_0, x_1, \ldots, x_{2k-2}; x_{2k}) - W_{2k-1}(x_0, x_1, \ldots, x_{2k-2}; x_{2k-1})}, \quad (6)$$

$$W_{2k+1}(x_{2k+1}) = W_{2k+1}(x_0, x_1, \ldots, x_{2k}; x_{2k+1}) =$$

$$= \frac{W_{2k}(x_0, x_1, \ldots, x_{2k-2}; x_{2k-1}, x_{2k+1}) - W_{2k}(x_0, x_1, \ldots, x_{2k-2}; x_{2k-1}, x_{2k})}{x_{2k+1} - x_{2k}}, \quad (6')$$

для функції однієї змінної $f(x)$, якщо відомі її значення у вузлах інтерполяції $x_0, x_1, \ldots, x_{2n+1}$. Для здійснення граничного переходу у формулі (5) при всіх $x_i \to x_0$, $i = 1, 2, \ldots, 2n+1$, змішані різниці (6), (6′) виражаються через обернені різниці інтерполяційної формули Тіле (2).

2. Основні результати. Нехай маємо два неперервні дроби $b^* + \mathop{\mathrm{D}}_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^*}{b_n^*}$ та $b + \mathop{\mathrm{D}}_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$ з n-ми підхідними дробами f_n^* і f_n відповідно. Якщо $f_n^* = f_{2n}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, тоді $b^* + \mathop{\mathrm{D}}_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^*}{b_n^*}$ називають парною частиною дробу $b + \mathop{\mathrm{D}}_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$.

Зауважимо, що парною частиною неперервного дробу $b + \mathop{\mathrm{D}}_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1}$ є дріб [2]

$$\frac{1|}{|1 + a_2} - \frac{a_2 a_3|}{|1 + a_3 + a_4} - \frac{a_4 a_5|}{|1 + a_5 + a_6} - \ldots .$$

Запишемо парну частину дробу, оберненого до дробу Тіле (2), для заданих вузлів інтерполяції $x_0, x_1, \ldots, x_{2n+1}$:

$$\left(f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{\rho_1} + \frac{(x - x_0)(x - x_1)|}{\left| -\rho_1^2(\rho_2 - \rho_0) - \rho_1(x - x_1) - \frac{\rho_1^2}{(\rho_3 - \rho_1)}(x - x_2) \right.} + \right.$$

$$+ \frac{(x - x_2)(x - x_3)|}{\left| \frac{(\rho_3 - \rho_1)^2(\rho_4 - \rho_2)}{\rho_1^2} + \frac{(\rho_3 - \rho_1)}{\rho_1^2}(x - x_3) + \frac{(\rho_3 - \rho_1)^2}{\rho_1^2(\rho_5 - \rho_3)}(x - x_4) \right.} +$$

$$\left. + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{n-1} \frac{(x - x_{2k})(x - x_{2k+1})|}{|\psi_{2k}} \right)^{-1}, \quad (7)$$

де $\psi_{2k} = \begin{cases} \psi_1, & \mathrm{mod}\,(2k,4) = 0, \\ \psi_2, & \mathrm{mod}\,(2k,4) = 5, \end{cases}$

$$\psi_1 = -\frac{\rho_1^2 \prod\limits_{i=1}^{k/2} (\rho_{4i+1} - \rho_{4i-1})^2 (\rho_{2k+2} - \rho_{2k})}{\prod\limits_{i=1}^{k/2} (\rho_{4i-1} - \rho_{4i-3})^2} - \frac{\rho_1^2 \prod\limits_{i=1}^{k/2-1} (\rho_{4i+1} - \rho_{4i-1})^2 (\rho_{2k+1} - \rho_{2k-1})}{\prod\limits_{i=1}^{k/2} (\rho_{4i-1} - \rho_{4i-3})^2} \times$$

$$\times (x - x_{2k+1}) - \frac{\rho_1^2 \prod\limits_{i=1}^{k/2} (\rho_{4i+1} - \rho_{4i-1})^2}{\prod\limits_{i=1}^{k/2} (\rho_{4i-1} - \rho_{4i-3})^2 (\rho_{2k+3} - \rho_{2k+1})} (x - x_{2k+2}),$$

$$\psi_2 = \frac{\prod\limits_{i=1}^{[k/2]+1} (\rho_{4i-1} - \rho_{4i-3})^2 (\rho_{2k+2} - \rho_{2k})}{\rho_1^2 \prod\limits_{i=1}^{[k/2]} (\rho_{4i+1} - \rho_{4i-1})^2} + \frac{\prod\limits_{i=1}^{[k/2]} (\rho_{4i-1} - \rho_{4i-3})^2 (\rho_{2k+1} - \rho_{2k-1})}{\rho_1^2 \prod\limits_{i=1}^{[k/2]} (\rho_{4i+1} - \rho_{4i-1})^2} (x - x_{2k+1}) +$$

$$+ \frac{\prod\limits_{i=1}^{[k/2]+1} (\rho_{4i-1} - \rho_{4i-3})^2}{\rho_1^2 \prod\limits_{i=1}^{[k/2]} (\rho_{4i+1} - \rho_{4i-1})^2 (\rho_{2k+3} - \rho_{2k+1})} (x - x_{2k+2}).$$

Теорема 1. *Обернений дріб до інтерполяційного дробу* (5) *є парною частиною дробу оберненого до дробу Тіле* (2) *тоді й тільки тоді, коли*

$$W_0(x_0) = \rho_0(x_0), \qquad W_1(x_0, x_1) = \frac{1}{\rho_1(x_0, x_1)},$$

$$W_2(x_2) = -\rho_1^2(\rho_2 - \rho_0) - \rho_1(x_2 - x_1), \qquad W_3(x_3) = -\frac{\rho_1 \cdot \rho_3}{\rho_3 - \rho_1},$$

$$W_4(x_4) = \frac{\rho_3 - \rho_1}{\rho_1^2}\left[(\rho_3 - \rho_1)(\rho_4 - \rho_2) + (x_4 - x_3)\right],$$

$$W_5(x_5) = \frac{(\rho_3 - \rho_1)(\rho_5 - \rho_1)}{\rho_1^3(\rho_5 - \rho_3)}, \tag{8}$$

та

$$W_{4k-2}(x_{4k-2}) = -\frac{\rho_1^2 \prod\limits_{i=1}^{k-2} (\rho_{4i+1} - \rho_{4i-1})^2 (\rho_{4k-3} - \rho_{4k-5})}{\prod\limits_{i=1}^{k-1} (\rho_{4i-1} - \rho_{4i-3})^2} \times$$

$$\times \left[(\rho_{4k-3} - \rho_{4k-5})(\rho_{4k-2} - \rho_{4k-4}) + (x_{4k-2} - x_{4k-3})\right], \tag{9}$$

$$W_{4k}(x_{4k}) = \frac{\prod\limits_{i=1}^{k-1} (\rho_{4i-1} - \rho_{4i-3})^2 (\rho_{4k-1} - \rho_{4k-3})}{\rho_1^2 \prod\limits_{i=1}^{k-1} (\rho_{4i+1} - \rho_{4i-1})^2} \times$$

$$\times \left[(\rho_{4k-1} - \rho_{4k-3})(\rho_{4k} - \rho_{4k-2}) + (x_{4k} - x_{4k-1})\right], \tag{10}$$

$$W_{4k+1}(x_{4k+1}) = \frac{\prod_{i=1}^{k-1}(\rho_{4i-1}-\rho_{4i-3})^2(\rho_{4k-1}-\rho_{4k-3})(\rho_{4k+1}-\rho_{4k-3})}{\rho_1^2\prod_{i=1}^{k-1}(\rho_{4i+1}-\rho_{4i-1})^2(\rho_{4k+1}-\rho_{4k-1})}, \qquad (11)$$

$$W_{4k-1}(x_{4k-1}) = -\frac{\rho_1^2\prod_{i=1}^{k-2}(\rho_{4i+1}-\rho_{4i-1})^2(\rho_{4k-3}-\rho_{4k-5})(\rho_{4k-1}-\rho_{4k-5})}{\prod_{i=1}^{k-1}(\rho_{4i-1}-\rho_{4i-3})^2(\rho_{4k-1}-\rho_{4k-3})} \qquad (12)$$

для $k \geq 2$, *причому* $\prod_{i=1}^{0} = 1$.

Д о в е д е н н я. *Необхідність*. Нехай $x_0, x_1, \ldots, x_{4k+1}$ – вузли інтерполяції формул (5) і (7). Позначимо через P_n, Q_n підхідні чисельники та знаменники знаменника дробу (7), а через $\tilde{P}_n$, $\tilde{Q}_n$ – підхідні чисельники та знаменники дробу (5). Якщо обернений дріб до інтерполяційного дробу (5) є парною частиною дробу, оберненого до дробу Тіле (2), тоді $\frac{P_n}{Q_n} = \frac{\tilde{P}_n}{\tilde{Q}_n}$, $n = 0, 1, 2, \ldots, 2k$.

Знайдемо звідси перші шість співвідношень (8).

Дійсно, з рівності $\frac{P_0}{Q_0} = \frac{\tilde{P}_0}{\tilde{Q}_0}$ випливає, що

$$\rho_0 + \frac{(x - x_0)}{\rho_1} = W_0(x_0) + W_1(x_1)(x - x_0),$$

тому

$$\rho_0(x_0) = W_0(x_0), \qquad W_1(x_1) = \frac{1}{\rho_1}, \qquad Q_0 = \tilde{Q}_0 = 1.$$

З рівності $\frac{P_1}{Q_1} = \frac{\tilde{P}_1}{\tilde{Q}_1}$ маємо

$$\rho_0 + \frac{(x - x_0)}{\rho_1} + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{-\rho_1^2(\rho_2 - \rho_0) - \rho_1(x - x_1) - \frac{\rho_1^2(x - x_2)}{\rho_3 - \rho_1}} =$$

$$= W_0(x_0) + W_1(x_1)(x - x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{W_2(x_2) + W_3(x_3)(x - x_2)},$$

тому

$$-\rho_1^2(\rho_2 - \rho_0) - \rho_1(x - x_1) - \frac{\rho_1^2(x - x_2)}{(\rho_3 - \rho_1)} = W_2(x_2) + W_3(x_3)(x - x_2).$$

При $x = x_2$ маємо

$$W_2(x_2) = -\rho_1^2(\rho_2 - \rho_0) - \rho_1(x_2 - x_1),$$

при $x = x_3$

$$W_3(x_3) = -\frac{\rho_1\,\rho_3}{(\rho_3 - \rho_1)}.$$

Аналогічно з рівності $\frac{P_2}{Q_2} = \frac{\tilde{P}_2}{\tilde{Q}_2}$ визначаємо $W_4(x_4)$ і $W_5(x_5)$.

Щоб довести правильність співвідношень (9)–(12), використаємо метод повної математичної індукції. Покажемо, що співвідношення (9)–(12) справджуються при $n = 2$. З огляду на рівність $\frac{P_3}{Q_3} = \frac{\tilde{P}_3}{\tilde{Q}_3}$ і з урахуванням рекурентних формул для підхідних чисельників і знаменників підхідних дробів запишемо

$$P_3 = (x - x_4)(x - x_5) \cdot P_2 + \left[-\frac{\rho_1^2 (\rho_5 - \rho_3)^2 (\rho_6 - \rho_4)}{(\rho_3 - \rho_1)^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{\rho_1^2 (\rho_5 - \rho_3)}{(\rho_3 - \rho_1)^2}(x - x_5) - \frac{\rho_1^2 (\rho_5 - \rho_3)^2}{(\rho_3 - \rho_1)^2 (\rho_7 - \rho_5)} \right] \cdot P_1,$$

$$\tilde{P}_3 = (x - x_4)(x - x_5) \cdot \tilde{P}_2 + \left[W_6(x_6) + W_7(x_7)(x - x_6) \right] \cdot \tilde{P}_1,$$

$$Q_3 = (x - x_4)(x - x_5) \cdot Q_2 + \left[-\frac{\rho_1^2 (\rho_5 - \rho_3)^2 (\rho_6 - \rho_4)}{(\rho_3 - \rho_1)^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{\rho_1^2 (\rho_5 - \rho_3)}{(\rho_3 - \rho_1)^2}(x - x_5) - \frac{\rho_1^2 (\rho_5 - \rho_3)^2}{(\rho_3 - \rho_1)^2 (\rho_7 - \rho_5)} \right] \cdot Q_1,$$

$$\tilde{Q}_3 = (x - x_4)(x - x_5) \cdot \tilde{Q}_2 + \left[W_6(x_6) + W_7(x_7)(x - x_6) \right] \cdot \tilde{Q}_1.$$

Звідси при $x = x_6$ маємо

$$W_6(x_6) = -\frac{\rho_1^2 (\rho_5 - \rho_3) \left[(\rho_5 - \rho_3)(\rho_6 - \rho_4) + (x_6 - x_5) \right]}{(\rho_3 - \rho_1)^2},$$

а при $x = x_7$ отримуємо

$$W_7(x_7) = -\frac{\rho_1^2 (\rho_5 - \rho_3)(\rho_7 - \rho_3)}{(\rho_3 - \rho_1)^2 (\rho_7 - \rho_5)}.$$

Аналогічно з рівності $\frac{P_4}{Q_4} = \frac{\tilde{P}_4}{\tilde{Q}_4}$ визначаємо $W_8(x_8)$, $W_9(x_9)$:

$$W_8(x_8) = \frac{(\rho_3 - \rho_1)^2 (\rho_7 - \rho_5) \left[(\rho_7 - \rho_5)(\rho_8 - \rho_6) + (x_8 - x_7) \right]}{\rho_1^2 (\rho_5 - \rho_3)^2},$$

$$W_9(x_9) = \frac{(\rho_3 - \rho_1)^2 (\rho_7 - \rho_5)(\rho_9 - \rho_5)}{\rho_1^2 (\rho_5 - \rho_3)^2 (\rho_9 - \rho_7)}.$$

Припустимо, що співвідношення (9)–(12) виконуються для всіх $n = 2k$ і доведемо, що вони справджуються для $n = 2k + 1$. Нехай $\frac{P_{2k+1}}{Q_{2k+1}} = \frac{\tilde{P}_{2k+1}}{\tilde{Q}_{2k+1}}$. Використовуючи рекурентні формули для підхідних чисельників і знаменників, отримаємо рівність

$$\mathrm{P}_{2k+1} = (x - x_{4k})(x - x_{4k+1}) \cdot \mathrm{P}_{2k} + \left[\frac{\rho_1^2 \prod_{i=1}^{k} (\rho_{4i+1} - \rho_{4i-1})^2 (\rho_{4k+2} - \rho_{4k})}{\prod_{i=1}^{k} (\rho_{4i-1} - \rho_{4i-3})^2} - \right.$$

$$- \frac{\rho_1^2 \prod_{i=1}^{k-1} (\rho_{4i+1} - \rho_{4i-1})^2 (\rho_{4k+1} - \rho_{4k-1})(x - x_{4k+1})}{\prod_{i=1}^{k} (\rho_{4i-1} - \rho_{4i-3})^2} -$$

$$\left. - \frac{\rho_1^2 \prod_{i=1}^{k} (\rho_{4i+1} - \rho_{4i-1})^2 (x - x_{4k+1})}{\prod_{i=1}^{k} (\rho_{4i-1} - \rho_{4i-3})^2 (\rho_{4k+3} - \rho_{4k+1})} \right] \cdot \mathrm{P}_{2k-1},$$

$$\tilde{\mathrm{P}}_{2k+1} = (x - x_{4k})(x - x_{4k+1}) \cdot \tilde{\mathrm{P}}_{2k} +$$

$$+ \left[W_{4k+2}(x_{4k+2}) + W_{4k+3}(x_{4k+3})(x - x_{4k+2}) \right] \cdot \tilde{\mathrm{P}}_{2k-1}$$

та

$$\mathrm{Q}_{2k+1} = (x - x_{4k})(x - x_{4k+1}) \cdot \mathrm{Q}_{2k} + \left[\frac{\rho_1^2 \prod_{i=1}^{k} (\rho_{4i+1} - \rho_{4i-1})^2 (\rho_{4k+2} - \rho_{4k})}{\prod_{i=1}^{k} (\rho_{4i-1} - \rho_{4i-3})^2} - \right.$$

$$- \frac{\rho_1^2 \prod_{i=1}^{k-1} (\rho_{4i+1} - \rho_{4i-1})^2 (\rho_{4k+1} - \rho_{4k-1})(x - x_{4k+1})}{\prod_{i=1}^{k} (\rho_{4i-1} - \rho_{4i-3})^2} -$$

$$\left. - \frac{\rho_1^2 \prod_{i=1}^{k} (\rho_{4i+1} - \rho_{4i-1})^2 (x - x_{4k+1})}{\prod_{i=1}^{k} (\rho_{4i-1} - \rho_{4i-3})^2 (\rho_{4k+3} - \rho_{4k+1})} \right] \cdot \mathrm{Q}_{2k-1},$$

$$\tilde{\mathrm{Q}}_{2k+1} = (x - x_{4k})(x - x_{4k+1}) \cdot \tilde{\mathrm{Q}}_{2k} +$$

$$+ \left[W_{4k+2}(x_{4k+2}) + W_{4k+3}(x_{4k+3})(x - x_{4k+2}) \right] \cdot \tilde{\mathrm{Q}}_{2k-1}.$$

Згідно з припущенням індукції $\dfrac{\mathrm{P}_n}{\mathrm{Q}_n} = \dfrac{\tilde{\mathrm{P}}_n}{\tilde{\mathrm{Q}}_n}$, $n = 0, 1, \ldots, 2k$, тому, покладаючи $x = x_{4k+2}$, матимемо формулу (9). Аналогічно доводимо правильність формул (10)−(12).

Достатність. Нехай виконуються формули (8), тоді

$$W_0 + W_1(x - x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{W_2 + W_3(x - x_2)} =$$

$$= \rho_0 + \frac{(x - x_0)}{\rho_1} + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{-\rho_1^2(\rho_2 - \rho_0) - \rho_1(x_2 - x_1) - \dfrac{\rho_1\rho_3(x - x_2)}{(\rho_3 - \rho_1)}}.$$

Перетворивши знаменник другого дробу:

$$-\rho_1^2(\rho_2-\rho_0)-\rho_1(x_2-x_1)-\frac{\rho_1\rho_3}{(\rho_3-\rho_1)}(x-x_2)=$$

$$=-\rho_1^2(\rho_2-\rho_0)-\rho_1(x_2-x_1)-$$

$$-\frac{\rho_1\rho_3}{(\rho_3-\rho_1)}(x-x_2)-\rho_1(x-x_1)+\rho_1(x-x_1)=$$

$$=-\rho_1^2(\rho_2-\rho_0)-\rho_1(x-x_1)+(x-x_2)\left[\rho_1-\frac{\rho_1\rho_3}{(\rho_3-\rho_1)}\right]=$$

$$=-\rho_1^2(\rho_2-\rho_0)-\rho_1(x-x_1)-\frac{\rho_1^2}{(\rho_3-\rho_1)}(x-x_2),$$

отримаємо, що $\dfrac{P_1}{Q_1}=\dfrac{\tilde{P}_1}{\tilde{Q}_1}$.

Всі інші формули доводимо аналогічно. Теорему доведено. ◊

Якщо функція $f(x)$ задовольняє умови, що забезпечують граничний перехід в формулах (1) при $x_i \to x_0$, $i=1,\dots,2n+1$, то маємо розвинення функції у приєднаний неперервний дріб в околі точки x_0:

$$f(x_0)+\frac{1}{{}^{\backprime}f(x_0)}+$$

$$+\frac{(x-x_0)^2\big|}{\big|-({}^{\backprime}f(x_0))^2\cdot 2\,{}^{\backprime}[{}^{\backprime}f(x)]_{x=x_0}-\left({}^{\backprime}f(x_0)\cdot 3\,{}^{\backprime}[{}^{\backprime\backprime}f(x)]_{x=x_0}+({}^{\backprime}f(x_0))^2\right)(x-x_0)}+$$

$$+(x-x_0)^2\Big|\cdot\left(\left|\frac{(3\,{}^{\backprime}[{}^{\backprime\backprime}f(x)]_{x=x_0})^2\cdot 4\,{}^{\backprime}[{}^{\backprime\backprime\backprime}f(x)]_{x=x_0}}{({}^{\backprime}f(x_0))^2}+\right.\right.$$

$$\left.+\left(\frac{3\,{}^{\backprime}[{}^{\backprime\backprime}f(x)]_{x=x_0}\cdot\left(5\,{}^{\backprime}[{}^{(4)}f(x)]_{x=x_0}+3\,{}^{\backprime}[{}^{\backprime\backprime}f(x)]_{x=x_0}\right)}{({}^{\backprime}f(x_0))^2\cdot 5\,{}^{\backprime}[{}^{(4)}f(x)]_{x=x_0}}\right)(x-x_0)\right)^{-1}+\dots. \qquad (13)$$

Неважко показати, що приєднаний неперервний дріб (4) і приєднаний неперервний дріб (13) збігаються.

Дійсно, припускаючи, що дріб (4) і дріб (13) є зображеннями однієї і тієї ж функції $f(x)$ в околі точки $x=x_0$, з тотожності

$$c_0+c_1(x-x_0)+$$

$$+\cfrac{k_1(x-x_0)^2}{1+l_1(x-x_0)-\cfrac{k_2(x-x_0)^2}{1+l_2(x-x_0)-\vdots}}=f(x_0)+\frac{1}{{}^{\backprime}f(x_0)}+$$

$$+\cfrac{(x-x_0)^2}{-({}^{\backprime}f(x_0))^2\cdot 2\,{}^{\backprime}[{}^{\backprime}f(x)]_{x=x_0}-\left({}^{\backprime}f(x_0)\cdot 3\,{}^{\backprime}[{}^{\backprime\backprime}f(x)]_{x=x_0}+({}^{\backprime}f(x_0))^2\right)(x-x_0)+\vdots}$$

при $x = x_0$ отримуємо, що $c_0 = f(x_0)$. Відкинувши ці члени та скоротивши обидві частини тотожності на $(x - x_0)$, матимемо $c_1 = \dfrac{1}{\grave{} f(x_0)}$, далі, здійснивши елементарні перетворення, при $x = x_0$ отримуємо

$$\frac{1}{k_1} = -(\grave{} f(x_0))^2 \cdot 2\grave{}\left[\grave{} f(x)\right]_{x=x_0} \qquad \text{і т. д.}$$

3. Висновки. Запропоновану апроксимаційну формулу у вигляді приєднаного неперервного дробу спеціального вигляду отримано шляхом граничного переходу при всіх $x_i \to x_0$, $i = 1, \ldots, 2n+1$, з інтерполяційної формули типу Ньютона – Тіле з використанням зображення змішаних різниць через обернені різниці Тіле. На наш погляд, цікаво перейти до границі в інтерполяційних формулах у вигляді двовимірних неперервних дробів [3] і побудувати зручні алгоритми обчислення коефіцієнтів отриманих формул.

1. *Возна С. М.* Про збіжність неперервного J-дробу // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – **47,** № 2. – С. 22–29.
2. *Джоунс У., Трон В.* Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. – Москва: Мир, 1985. – 414 с.
3. *Кучмінська Х. Й., Сусь О. М., Возна С. М.* Апроксимативні властивості двовимірних неперервних дробів // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 1. – С. 30–44.
4. *Скоробогатько В. Я.* Теория ветвящихся цепных дробей и ее приложения в вычислительной математике. – Москва: Наука, 1983. – 312 с.
5. *Kuchmins'ka Kh. Yo., Vozna S. M.* Multipoint formula based on associated continued fraction // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – **46,** № 3. – С. 40–47.

АППРОКСИМАЦИОННАЯ ФОРМУЛА В ВИДЕ ПРИСОЕДИНЕННОЙ НЕПРЕРЫВНОЙ ДРОБИ

Для функции, удовлетворяющей условиям, обеспечивающим предельный переход в обратных разностях интерполяционной формулы Тиле при $x_i \to x_0$, $i = 1, \ldots, n$, получено разложение в присоединенную непрерывную дробь специального вида в окрестности точки x_0.

APPROXIMATED FORMULA IN THE FORM OF ASSOCIATED CONTINUED FRACTION

The expansion into the associated continued fraction of a special type in the neighborhood of the point x_0 for the function, satisfying the conditions, providing the passage to the limit in the reciprocal differences of the Thiele interpolated formula at $x_i \to x_0$, $i = 1, \ldots, n$, has been obtained.

Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів

Одержано
28.11.06