УДК 517.95

Н. П. Процах

ЗМІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ АНІЗОТРОПНОГО РІВНЯННЯ ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ

Доведено існування та єдиність розв'язку (в сенсі розподілів) змішаної задачі для анізотропного гіперболічного рівняння третього порядку. Рівняння містить нелінійності степеневого вигляду, степенем яких є функція.

1. Вступ. Починаючи з кінця минулого століття, багато дослідників розпочали вивчення рівнянь, які виникають при описі поширення хвиль у в'язкопружному матеріалі. Такі явища можна моделювати за допомогою задач для нелінійних гіперболічних рівнянь третього порядку (див., наприклад, [5, 8, 9, 17]).

У цій праці вивчено змішану задачу для гіперболічного рівняння третього порядку з нелінійностями степеневого вигляду, які мають анізотропний характер та містять функції у показниках нелінійності. Досліджено існування та єдиність розв'язку (в сенсі розподілів) цієї задачі в узагальнених просторах Соболєва та Лебеґа. Зауважимо, що ці простори вперше ввів у 1931 році В. Орліч [16], а деякі їх властивості вивчено в [15]. Задачі для рівнянь з першою або другою похідною за часовою змінною в узагальнених просторах Лебеґа вивчали в [1, 3, 6, 10, 11, 14, 15]. Розв'язність змішаних задач для анізотропних параболічних і гіперболічних рівнянь та деякі їх властивості доведено в [10–13], причому в [11] рівняння містять степеневі нелінійності зі змінними показниками.

Метою роботи є дослідження розв'язності в узагальнених просторах Соболєва змішаної задачі для анізотропного гіперболічного рівняння.

2. Формулювання задачі. Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – обмежена область з межею Γ, яка є регулярною в сенсі Кальдерона [2, с. 45]. Позначимо через τ число з проміжку $(0,T]$; $Q_\tau = \Omega \times (0,\tau)$; $S_\tau = \Gamma \times (0,\tau)$; $\Omega_\tau = \{(x,t) : x \in \Omega,\ t = \tau\}$; $Q_{s,\tau} = \Omega \times (s,\tau)$; $s \in [0,T)$, $s < \tau$; $\Omega_0 = \Omega \times \{t = 0\}$.

Розглянемо в області Q_T задачу

$$u_{tt} - \sum_{i=1}^{n}\left(a_i(x,t)\left|u_{x_i}\right|^{p_i(x)-2} u_{x_i}\right)_{x_i} - \sum_{i,j=1}^{n}(d_{ij}(x,t)u_{x_it})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)u_{x_i} +$$

$$+ b_0(x,t)u_t + c(x,t)u + g(x,t)|u|^{q(x)-2} u = f(x,t), \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

$$u|_{S_T} = 0. \tag{3}$$

Припускатимемо, що для коефіцієнтів рівняння (1) виконуються умови:

(**A**) $a_i, a_{it} \in L^\infty(Q_T)$, $\alpha_1 \le a_i(x,t)$ майже для всіх $(x,t) \in Q_T$, $i = 1,\dots,n$, α_1 – додатна стала;

(**B**) $b_i \in L^\infty(Q_T)$, $i = 0,1,\dots,n$;

(**C**) $c_i \in L^\infty(Q_T)$;

(**D**) $d_{ij}, d_{ijt} \in L^\infty(Q_T)$, $d_{ij}(x,t) = d_{ji}(x,t)$, $\sum_{i,j=1}^{n} d_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \ge d_0 \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2$ майже для всіх $\xi \in \mathbb{R}^N$, $i,j = 1,\dots,n$, d_0 – додатна стала;

(**G**) $g,\ g_t \in L^\infty(Q_T)$, $g(x,t) \ge g_0 > 0$ майже для всіх $(x,t) \in Q_T$;

(**P**) $p_i : \Omega \to (1,+\infty)$, $p_i \in L^\infty(\Omega)$, $1 < \overline{p}_i = \operatorname*{ess\,inf}_{\Omega} p_i(x) \le \operatorname*{ess\,sup}_{\Omega} p_i(x) = \widehat{p}_i < \infty$, $i = 1,2,\ldots,n$;

(**Q**) $q : \Omega \to (1,+\infty)$, $q \in L^\infty(\Omega)$, $1 < \overline{q} = \operatorname*{ess\,inf}_{\Omega} q(x) \le \operatorname*{ess\,sup}_{\Omega} q(x) = \widehat{q} < \infty$;

(**P1**) для кожного $i = 1,2,\ldots,n$ виконується одна з умов:

1) $\widehat{p}_i \le R(\overline{p}_i) = \begin{cases} \dfrac{n\overline{p}_i}{n-\overline{p}_i}, & 1 < \overline{p}_i < n, \\ +\infty, & \overline{p}_i \ge n; \end{cases}$

2) існують сталі s_j, s_j^* і відкриті множини $\Omega_j \subset \Omega$, $j = 1,\ldots,m$, які складаються зі скінченного числа компонент з ліпшицевою межею, такі, що $\operatorname{mes}\left(\Omega \setminus \bigcup_{1\le j\le m} \Omega_j\right) = 0$, $1 = s_1 < s_2 < s_1^* < s_3 < s_2^* < \ldots < s_{m-1} < s_{m-2}^* < n < s_m < s_{m-1}^* < s_m^* = +\infty$, і, крім того, $s_j \le p_i(x) \le s_j^*$ майже для всіх $x \in \Omega_j$, $j = 1,\ldots,m$, $s_k^* < R(s_k)$, $k = 1,\ldots,m-1$;

(**Q1**) виконується одна з умов:

1) $\widehat{q} \le R(\overline{q}) = \begin{cases} \dfrac{n\overline{q}}{n-\overline{q}}, & 1 < \overline{q} < n, \\ +\infty, & \overline{q} \ge n; \end{cases}$

2) існують сталі s_j, s_j^* і відкриті множини $\Omega_j \subset \Omega$, $j = 1,\ldots,m$, які складаються зі скінченного числа компонент з ліпшицевою межею, такі, що $\operatorname{mes}\left(\Omega \setminus \bigcup_{1\le j\le m} \Omega_j\right) = 0$, $1 = s_1 < s_2 < s_1^* < s_3 < s_2^* < \ldots < s_{m-1} < s_{m-2}^* < n < s_m < s_{m-1}^* < s_m^* = +\infty$, і, крім того, $s_j \le q(x) \le s_j^*$ майже для всіх $x \in \Omega_j$, $j = 1,\ldots,m$, $s_k^* < R(s_k)$, $k = 1,\ldots,m-1$.

Введемо такі позначення: $p(x) = (p_1(x),\ldots,p_n(x))$, $\overline{p} = (\overline{p}_1,\ldots,\overline{p}_n)$, $\widehat{p} = (\widehat{p}_1,\ldots,\widehat{p}_n)$, $\overline{p}_0 = \min\{\overline{p}_1,\ldots,\overline{p}_n\}$, $\widehat{p}_0 = \max\{\widehat{p}_1,\ldots,\widehat{p}_n\}$.

Згідно з припущеннями (**A**), (**B**), (**C**), (**G**) існують такі сталі β_0, β_1, c_0, $g_1, g_2, \alpha_2, \alpha_3$, що $\beta_1 = \operatorname*{ess\,sup}_{Q_T} \sum_{i=1}^{n} b_i^2(x,t)$, $b_0(x,t) \ge \beta_0$, $|c(x,t)| \le c_0$, $|g(x,t)| \le g_1$, $|g_t(x,t)| \le g_2$, $|a_i(x,t)| \le \alpha_2$, $|a_{it}(x,t)| \le \alpha_3$, $i = 1,\ldots,n$, майже для всіх $(x,t) \in Q_T$.

Введемо простори:

$L^{s(x)}(\Omega)$, $s(x) \in \{p_1(x), p_2(x), \ldots, p_n(x), q(x)\}$ (узагальнений простір Лебеґа) [15] з нормою $\|v; L^{s(x)}(\Omega)\| = \inf\left\{ \mu > 0 : \int_\Omega \dfrac{|v|^{s(x)}}{\mu^{s(x)}} dx \le 1 \right\}$;

$H_0^1(Q_T) = \{u : u \in H^1(Q_T),\ u\big|_{S_T} = 0\}$;

$H_0^l(\Omega) = \{u : u \in H^l(\Omega),\ u\big|_\Gamma = 0\}$, $l \in \mathbb{N}$;

$V_0^{1,p,q}(\Omega) = \{u : u \in L^{q(x)}(\Omega),\ u_{x_i} \in L^{p_i(x)}(\Omega),\ i = 1,\ldots,n,\ u\big|_\Gamma = 0\}$;

$V_0^{1,\widehat{p}_0,\widehat{q}}(\Omega) = \{u : u \in L^{\widehat{q}}(\Omega),\ u_{x_i} \in L^{\widehat{p}_0}(\Omega),\ i = 1,\ldots,n,\ u\big|_\Gamma = 0\}$;

$V_0^{1,p,q}(Q_T) = \{u : u \in L^{q(x)}(Q_T),\ u_{x_i} \in L^{p_i(x)}(Q_T),\ i = 1,\ldots,n,\ u\big|_{S_T} = 0\}$.

3. Допоміжні леми. Доведемо допоміжні твердження про введені простори та функціонали, які будуть використані при отриманні основних результатів статті.

Лема 1. *Функціонал* $J(u) = \int\limits_{\Omega} \frac{1}{p}|u|^p\,dx$, *де* p – *число (або функція* $p(x)$*), більше від 1, є випуклим.*

Д о в е д е н н я. Оскільки для всіх $\theta \in [0,1]$

$$|(1-\theta)u + \theta v|^p \le |(1-\theta)u + \theta v|^{p-1}(1-\theta)|u| + |(1-\theta)u + \theta v|^{p-1}\theta|v| =$$

$$= \frac{|(1-\theta)u + \theta v|^{p-1}(1-\theta)^{1/p'}}{(\delta p)^{1/p}} \cdot (1-\theta)^{1/p}(p\delta)^{1/p}|u| +$$

$$+ \frac{|(1-\theta)u + \theta v|^{p-1}\theta^{1/p'}}{(\delta p)^{1/p}}\theta^{1/p}(p\delta)^{1/p}|v| \le$$

$$\le \frac{|(1-\theta)u + \theta v|^p}{(\delta p)^{p'/p}p'} + \delta\big[(1-\theta)|u|^p + \theta|v|^p\big],$$

де $p' = \frac{p}{p-1}$, то $1 - \frac{1}{\delta^{p'/p}p^{p'/p}p'}|(1-\theta)u + \theta v|^p \le \delta\big[(1-\theta)|u|^p + \theta|v|^p\big]$.

Нехай $\delta^{p'/p} > \frac{1}{p^{p'/p}p'}$. Тоді $|(1-\theta)u + \theta v|^p \le z(\delta)\big[(1-\theta)|u|^p + \theta|v|^p\big]$, де $z(\delta) = \frac{\delta}{1 - \frac{1}{\delta^{p'/p}p^{p'/p}p'}}$. Покажемо існування $\delta_0 > 0$, $\delta_0^{p'/p} > \frac{1}{p^{p'/p}p'}$, такого, що $z(\delta_0) = 1$, тобто $\delta_0 = 1 - \frac{1}{\delta_0^{p'/p}p^{p'/p}p'}$. Введемо функцію $f(\delta) = \delta + \frac{a}{\delta^{\alpha}}$, де $a = \frac{1}{p^{p'/p}p'}$, $\alpha = \frac{p'}{p} = \frac{1}{p-1}$. Похідна $f'(\delta) = 1 - \frac{\alpha a}{\delta^{\alpha+1}} = 0$. Звідси знайдемо $\delta_0 = (\alpha a)^{1/(\alpha+1)}$. Зауважимо, що

$$\alpha a = \frac{p'}{p}\frac{1}{p^{p'/p}p'} = \frac{1}{p^{p'/p+1}}, \quad \frac{p'}{p} + 1 = p', \quad \alpha a = \frac{1}{p^{p'}}, \quad (\alpha a)^{1/p'} = \frac{1}{p} = \delta_0.$$

Очевидно, що $\delta_0^{p'/p} > \frac{1}{p^{p'/p}p'}$ і

$$f(\delta_0) = \delta_0 + \frac{a}{\delta_0^{\alpha}} = (\alpha a)^{1/(\alpha+1)} + a(\alpha a)^{-\alpha/(\alpha+1)} = (\alpha a)^{1/(\alpha+1)} +$$

$$+ a^{1/(\alpha+1)}\alpha^{-\alpha/(\alpha+1)} = (\alpha a)^{1/(\alpha+1)}(1+\alpha^{-1}) = (\alpha a)^{1/(\alpha+1)}\frac{(1+\alpha)}{\alpha} = \frac{1}{p}\cdot p = 1.$$

Тому і $z(\delta_0) = 1$. Отже, $|(1-\theta)u + \theta v|^p \le (1-\theta)|u|^p + \theta|v|^p$ для $p > 1$ (для всіх $\theta \in (0,T)$). Лему доведено. ◊

Позначимо $V_1(Q_T) = H_0^1(Q_T) \cap V_0^{1,p,q}(Q_T)$, а через l – таку сталу, що вкладення простору $H_0^l(Q_T)$ у простір $V_0^{1,\hat{p}_0,\hat{q}}(\Omega)$ є щільним і неперервним.

Лема 2. *Простір* $C^1([0,T];H_0^l(\Omega))$ *щільно та неперервно вкладений в* $V_1(Q_T)$.

Д о в е д е н н я. Перевіримо вкладення $C^1([0,T];H_0^l(\Omega))$ у $V_1(Q_T)$. Оскільки $u_t \in L^2((0,T);H_0^l(\Omega))$, де $l \ge 1$, то $u_t \in L^2((0,T);H_0^1(\Omega)) \subset V_1(Q_T)$. Функція $u \in C^1([0,T];H_0^l(\Omega))$ і простір $H_0^l(\Omega) \subset V_0^{1,\hat{p}_0,\hat{q}}(\Omega)$ щільно та неперервно. Тому $u \in C([0,T];V_0^{1,\hat{p}_0,\hat{q}}(\Omega)) \subset C([0,T];V_0^{1,p,q}(\Omega)) \subset V_0^{1,p,q}(Q_T) \subset V_1(Q_T)$.

Доведемо щільність цього вкладення. Нехай $u \in V_1(Q)$. Продовжимо функцію u нулем поза $[0,T]$ і збережемо за нею те саме позначення. Розглянемо функції

$$\omega(t) = \begin{cases} Ce^{-t^2/(t^2-1)}, & |t| < 1, \\ 0, & |t| \ge 1, \end{cases} \quad \omega_n(t) = n\omega(nt), \quad u_n(x,t) = \int_{\mathbb{R}^1} \omega_n(t-\tau)u(x,\tau)\,d\tau .$$

Сталу C виберемо з умови $\int_{\mathbb{R}^1} \omega(t)\,dt = 1$.

Покажемо, що функції u_n належать до простору $C^1([0,T];H_0^l(\Omega))$. Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$ та $t_0 \in [0,T]$. Розглянемо

$$\|u_n(x,t) - u_n(x,t_0);H_0^l(\Omega)\|^2 + \|u_{n,t}(x,t) - u_{n,t}(x,t_0);H_0^l(\Omega)\|^2 =$$

$$= \int_\Omega \Bigg[\sum_{|\alpha| \le l} \left|D^\alpha u_n(x,t) - D^\alpha u_n(x,t_0)\right|^2 + \sum_{|\alpha| \le l} \Big|D^\alpha u_{n,t}(x,t) -$$

$$- D^\alpha u_{n,t}(x,t_0)\Big|^2 \Bigg] dx = \int_\Omega \Bigg[\Bigg| \sum_{|\alpha|\le l} \int_{\mathbb{R}^1} (\omega_n(t-\tau) - \omega_n(t_0-\tau)) D^\alpha u(x,\tau)\,d\tau \Bigg|^2 +$$

$$+ \Bigg| \int_{\mathbb{R}^1} \sum_{|\alpha|\le l} (\omega_{n,t}(t-\tau) - \omega_{n,t}(t_0-\tau)) D^\alpha u(x,\tau)\,d\tau \Bigg|^2 \Bigg] dx \le$$

$$\le \int_\Omega \Bigg| \int_{\mathbb{R}^1} (\omega_n(t-\tau) - \omega_n(t_0-\tau))d\tau \Bigg|^2 \Bigg(\int_{\mathbb{R}^1} (\omega_n(t-\tau) -$$

$$- \omega_n(t_0-\tau)) \Bigg[\sum_{|\alpha|\le l} \left|D^\alpha u(x,\tau)\right|^2 + \sum_{|\alpha|\le l} \left|D^\alpha u_\tau(x,\tau)\right|^2 \Bigg] d\tau \Bigg) dx \le C\varepsilon ,$$

оскільки $w_n \in C([0,T])$ і для $|t - t_0| < \delta$ різниця $|w_n(t-\tau) - w_n(t_0-\tau)| < \varepsilon$.

Доведемо, що $u_n \to u$ при $n \to \infty$ у нормі простору $V_1(Q_T)$. Зауважимо, що для довільного $i \in \{1,\dots,n\}$ при $h \to 0$

$$\int_{Q_T} |u_{n,x_i} - u_{x_i}|^{p_i(x)}\,dx\,dt = \int_{Q_T} \Bigg| \int_{\mathbb{R}^1} \omega_n(t-\tau)[u_{x_i}(x,\tau) - u_{x_i}(x,t)]d\tau \Bigg|^{p_i(x)} dx\,dt =$$

$$= \int_{Q_T} \Bigg| \int_{-1/n}^{1/n} \omega_n(h)\big[u_{x_i}(x,t+h) - u_{x_i}(x,t)\big]\,dh \Bigg|^{p_i(x)} dx\,dt \le$$

$$\le \int_{Q_T} \Bigg(\int_{-1/n}^{1/n} (\omega_n(h))^{p_i'(x)}dh \Bigg)^{p_i(x)/p_i'(x)} \Bigg(\int_{-1/n}^{1/n} |u_{x_i}(x,t+h) -$$

$$- u_{x_i}(x,t)|^{p_i(x)}\,dh \Bigg) dx\,dt \le \frac{n}{2}(2C)^{\hat{p}_0} \int_{-1/n}^{1/n} \int_{Q_T} |u_{x_i}(x,t+h) -$$

$$- u_{x_i}(x,t)|^{p_i(x)} dx\,dt\,dh \le \frac{n}{2}(2C)^{\hat{p}_0} \sup_{|h|\le 1/n} \int_{Q_T} |u_{x_i}(x,t+h) -$$

$$- u_{x_i}(x,t)|^{p_i(x)} dx\,dt \to 0$$

(лема 1.5 [2, с. 164]), тому згідно з наслідком 1 [15] $\left\|u_{n,x_i} - u_{x_i};L^{p_i(x)}(Q_T)\right\| \to 0$ при $n \to \infty$. Аналогічно доводимо, що $\|u_n - u;L^{q(x)}(Q_T)\| \to 0$ при $n \to \infty$.

Зазначимо, що

$$\int_{Q_T} \left|u_{n,t} - u_t\right|^2 dx\,dt = \int_{Q_T} \left|\int_{\mathbb{R}^1} \omega_{n,t}(t-\tau)[u(x,\tau) - u(x,t)]\,d\tau\right|^2 dx\,dt =$$

$$= \int_{Q_T} \left|\int_{\mathbb{R}^1} \omega_n(t-\tau)[u_\tau(x,\tau) - u_t(x,t)]\,d\tau\right|^2 dx\,dt \le$$

$$\le \frac{n}{2}(2C)^2 \sup_{|h|\le 1/n} \int_{Q_T} |u_t(x,t+h) - u_t(x,t)|^2 dx\,dt \to 0\,.$$

Аналогічно знаходимо, що $\int_{Q_T} \left|u_{n,tx_i} - u_{tx_i}\right|^2 dx\,dt \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Отже,

$$\|u_n - u; V_1(Q_T)\| \to 0 \qquad \text{при} \qquad n \to \infty\,.$$

Доведемо неперервність вкладення $C^1([0,T]; H_0^l(\Omega))$ в $V_1(Q_T)$. Введемо множини

$$A = \left\{t \in [0,T] : \left\|u_{x_i}(\cdot,t); L^{p_i(x)}(\Omega)\right\| \le 1\right\},$$

$$B = \left\{t \in [0,T] : \left\|u_{x_i}(\cdot,t); L^{p_i(x)}(\Omega)\right\| > 1\right\}.$$

Тоді, застосувавши лему 1 [1], одержимо (для довільного $i \in \{1,\ldots,n\}$)

$$\left\|u_{x_i}; L^{p_i(x)}(Q_T)\right\|^{s_1} \le \int_{Q_T} \left|u_{x_i}\right|^{p_i(x)} dx\,dt \le \int_A\int_\Omega \left|u_{x_i}\right|^{p_i(x)} dx\,dt +$$

$$+ \int_B\int_\Omega \left|u_{x_i}\right|^{p_i(x)} dxdt \le \int_A \left\|u_{x_i}(\cdot,t); L^{p_i(x)}(\Omega)\right\|^{\overline{p}_i} dt +$$

$$+ \int_B \left\|u_{x_i}(\cdot,t); L^{p_i(x)}(\Omega)\right\|^{\widehat{p}_i} dt \le \operatorname{mes} A \max_{t\in A} \left\|u_{x_i}(\cdot,t); L^{p_i(x)}(\Omega)\right\|^{\overline{p}_i} +$$

$$+ \operatorname{mes} B \max_{t\in B} \left\|u_{x_i}(\cdot,t); L^{p_i(x)}(\Omega)\right\|^{\widehat{p}_i} \le \operatorname{mes} A \max_{t\in A} \left\|u(\cdot,t); H_0^l(\Omega)\right\|^{\overline{p}_i} +$$

$$+ \operatorname{mes} B \max_{t\in B} \left\|u(\cdot,t); H_0^l(\Omega)\right\|^{\widehat{p}_i} \le \operatorname{mes} A \left\|u; C([0,T]; H_0^l(\Omega))\right\|^{\overline{p}_i} +$$

$$+ \operatorname{mes} B \left\|u; C([0,T]; H_0^l(\Omega))\right\|^{\widehat{p}_i} \le T \left\|u; C([0,T]; H_0^l(\Omega))\right\|^{\overline{p}_i} +$$

$$+ \left\|u; C([0,T]; H_0^l(\Omega))\right\|^{\widehat{p}_i}.$$

Тут $s_1 = \begin{cases} \overline{p}_i, & \left\|u; L^{p_i(x)}(Q_T)\right\| \ge 1, \\ \widehat{p}_i, & \left\|u; L^{p_i(x)}(Q_T)\right\| < 1. \end{cases}$

Аналогічні оцінки можемо отримати для

$$\left\|u; L^{q(x)}(Q_T)\right\|, \qquad \left\|u_t; L^2((0,T); H_0^1(\Omega))\right\|, \qquad \left\|u; V_1(Q_T)\right\|.$$

Отже, вкладення $C([0,T]; H_0^l(\Omega))$ в $V_1(Q_T)$ є неперервним. Лему доведено. ◊

Лема 3. *Множина функцій* $\{\psi_N : N \ge 1\}$ *вигляду* $\sum_{k=1}^{N} c_k^N(t)\varphi^k(x)$, *де* $\{\varphi^k(x) : k \ge 1\}$ *– база простору* $H_0^l(\Omega)$, $c_k^N \in C^1([0,T])$, *є щільною в* $V_1(Q_T)$.

Д о в е д е н н я. Оскільки за лемою 2 простір $C^1([0,T]; H_0^l(\Omega))$ щільно та неперервно вкладений в $V_1(Q_T)$, то $\|\cdot; V_1(Q_T)\| \le C_1 \left\|\cdot; C^1([0,T]; H_0^l(\Omega))\right\|^{s_2}$, де стала s_2 залежить тільки від функцій $p_i(x)$, $q(x)$, і для довільної функції $u \in V_1(Q)$ існує функція $\chi \in C^1([0,T]; H_0^l(\Omega))$ така, що $\|u - \chi; V_1(Q_T)\| \le \varepsilon$.

З теореми Вейєрштрасса [2, с. 150] випливає, що існують такі $N \in \mathbb{N}$ та $\{a_k : k \in \{1,\dots,N\}\} \subset H_0^l(\Omega)$, що

$$\left\| \chi - \sum_{k=1}^{N} a_k t^k ; V_1(Q_T) \right\| \le C_1 \left\| \chi - \sum_{k=1}^{N} a_k t^k ; C^1([0,T]; H_0^l(\Omega)) \right\|^{s_2} < C_1 \varepsilon .$$

Для кожного a_k, $k \in \{1,\dots,N\}$, існують такі $l_k(N) \in \mathbb{N}$ і $\{\alpha_m^k : 1 \le m \le \le l_k\} \subset \mathbb{R}$, що $\left\| a_k - \sum_{m=1}^{l_k} \alpha_m^k \varphi^k ; H_0^l(\Omega) \right\| < \dfrac{\varepsilon}{T^k N}$, $k \in \{1,\dots,N\}$. Нехай $\psi_N(x,t) = = \sum_{k=1}^{N} \left(\sum_{m=1}^{l_k} \alpha_m^k \varphi^k(x) \right) t^k$, $(x,t) \in Q_T$. Тоді

$$\| u - \psi_N ; V_1(Q_T) \| \le \| u - \chi ; V_1(Q_T) \| + \left\| \chi - \sum_{k=1}^{N} a_k t^k ; V_1(Q_T) \right\| +$$
$$+ \left\| \sum_{k=1}^{N} a_k t^k - \psi_N ; V_1(Q_T) \right\| \le \varepsilon + C_1 \varepsilon +$$
$$+ C_1 \left\| \sum_{k=1}^{N} a_k t^k - \sum_{k=1}^{N} \left(\sum_{m=1}^{l_k} \alpha_m^k \varphi^k \right) t^k ; C^1([0,T]; H_0^l(\Omega)) \right\|^{s_2} \le (1 + C_1)\varepsilon .$$

Лему доведено. ◊

Існування та єдиність розв'язку.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* (**A**), (**B**), (**C**), (**D**), (**G**), (**P**), (**Q**), (**P1**), (**Q1**), *а* $f \in L^2(Q_T)$, $u_0 \in V_0^{1,p,q}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$, *числа* $\bar{p} > 2$, $\bar{q} > > 2$, $i = 1,\dots,n$. *Тоді існує розв'язок* u *задачі* (1)–(3) (*в сенсі розподілів*) *такий, що* $u \in C([0,T]; H_0^1(\Omega)) \cap V_0^{1,p,q}(Q_T)$, $u_t \in L^2([0,T]; H_0^1(\Omega))$.

Д о в е д е н н я. Нехай $\{\varphi^k(x) : k \ge 1\}$ – база простору $H_0^l(\Omega)$, ортонормована в $L^2(\Omega)$. Розглянемо послідовність функцій

$$u^N(x,t) = \sum_{k=1}^{N} c_k^N(t) \varphi^k(x), \qquad N = 1,2,\dots ,$$

де $c_1^N,\dots,c_N^N$ є розв'язком задачі Коші

$$\int_\Omega \Big[u_{tt}^N \varphi^k + \sum_{i,j=1}^{n} d_{ij}(x,t) u_{x_i t}^N \varphi_{x_j}^k + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t) \left| u_{x_i}^N \right|^{p_i(x)-2} u_{x_i}^N \varphi_{x_i}^k +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t) u_{x_i}^N \varphi^k + b_0(x,t) u_t^N \varphi^k + c(x,t) u^N \varphi^k +$$
$$+ g(x,t) \left| u^N \right|^{q(x)-2} u^N \varphi^k - f(x,t) \varphi^k \Big] dx = 0 , \tag{4}$$

$$c_k^N(0) = u_{0,k}^N, \qquad c_{k,t}^N(0) = u_{1,k}^N, \qquad k = 1,\dots,N, \qquad t \in [0,T]. \tag{5}$$

Тут

$$u_0^N(x) = \sum_{k=1}^{N} u_{0,k}^N \varphi^k(x), \qquad u_1^N(x) = \sum_{k=1}^{N} u_{1,k}^N \varphi^k(x) ,$$
$$\lim_{N\to\infty} \left\| u_0 - u_0^N \right\|_{V_0^{1,p,q}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)} = 0, \qquad \left\| u_1 - u_1^N \right\|_{L^2(\Omega)} = 0 .$$

На підставі теореми Каратеодорі [4, с. 54] існує розв'язок задачі (4), (5), який має абсолютно неперервну похідну та визначений на проміжку $[0, t_0]$, $t_0 \in (0,T]$. З оцінок, отриманих нижче, випливатиме, що $t_0 = T$.

Домножимо кожне рівняння системи (4) відповідно на функцію $c_{k,t}^N(t)e^{-æt}$, $æ > 0$, підсумуємо за k від 1 до N, проінтегруємо за t по проміжку $[0,\tau]$, $\tau \le T$. Після виконання цих операцій одержимо рівність

$$\int\limits_{Q_\tau}\Big[u_{tt}^N u_t^N + \sum_{i,j=1}^n d_{ij}(x,t)u_{x_i t}^N u_{x_j t}^N + \sum_{i=1}^n a_i(x,t)\left|u^N\right|^{p_i(x)-2} u_{x_i}^N u_{x_i t}^N +$$

$$+\sum_{i=1}^n b_i(x,t)u_{x_i}^N u_t^N + b_0(x,t)(u_t^N)^2 + c(x,t)u^N u_t^N +$$

$$+ g(x,t)\left|u^N\right|^{q(x)-2} u^N u_t^N - f(x,t)u_t^N\Big]e^{-æt}dx\,dt = 0\,. \qquad (6)$$

Зауважимо, що за умов (**P1**), (**Q1**) і згідно з теоремою 2 [1] у першому доданку цієї рівності можна проінтегрувати частинами. Врахувавши умови (**A**), (**B**), (**C**), (**P**), (**D**), (**G**), (**Q**), (**P1**), (**Q1**), при $\delta_0 > 0,\ \delta_1 > 0$ одержимо

$$I_1 := \int\limits_{Q_\tau} u_{tt}^N u_t^N e^{-æt}dx\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}\left|u_t^N\right|^2 e^{-æ\tau}dx + \frac{æ}{2}\int\limits_{Q_\tau}\left|u_t^N\right|^2 e^{-æt}dx\,dt - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0}\left|u_1^N\right|^2 dx\,,$$

$$I_2 := \int\limits_{Q_\tau}\sum_{i,j=1}^n d_{ij}(x,t)u_{x_i t}^N u_{x_j t}^N e^{-æt}dx\,dt \ge d_0\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^n (u_{x_i t}^N)^2 e^{-æt}dx\,dt\,,$$

$$I_3 := \int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^n a_i(x,t)\left|u_{x_i}^N\right|^{p_i(x)-2} u_{x_i}^N u_{x_i t}^N e^{-æt}dx\,dt =$$

$$= \int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^n \frac{a_i(x,\tau)}{p_i(x)}\left|u_{x_i}^N\right|^{p_i(x)} e^{-æ\tau}dx - \int\limits_{\Omega_0}\sum_{i=1}^n \frac{a_i(x,0)}{p_i(x)}\left|u_{0,x_i}^N\right|^{p_i(x)}dx +$$

$$+ \int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^n \frac{æa_i(x,t) - a_{it}(x,t)}{p_i(x)}\left|u_{x_i}^N\right|^{p_i(x)} e^{-æt}dx\,dt \ge$$

$$\ge \frac{\alpha_1}{\hat{p}_0}\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^n\left|u_{x_i}^N\right|^{p_i(x)} e^{-æ\tau}dx - \frac{\alpha_2}{\bar{p}_0}\int\limits_{\Omega_0}\sum_{i=1}^n\left|u_{0,x_i}^N\right|^{p_i(x)}dx +$$

$$+ \frac{æ\alpha_2 - \alpha_3}{\hat{p}_0}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^n\left|u_{x_i}^N\right|^{p_i(x)} e^{-æt}dx\,dt\,,$$

$$I_4 := \int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^n b_i(x,t)u_{x_i}^N u_t^N e^{-æt}dx\,dt \le \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\left[\delta_0\beta_1\sum_{i=1}^n\left|u_{x_i}^N\right|^2 + \frac{1}{\delta_0}\left|u_t^N\right|^2\right]e^{-æt}dx\,dt\,,$$

$$I_5 := \int\limits_{Q_\tau} b_0(x,t)(u_t^N)^2 e^{-æt}dx\,dt \ge \beta_0\int\limits_{Q_\tau}(u_t^N)^2 e^{-æt}dx\,dt\,,$$

$$I_6 := \int\limits_{Q_\tau} c(x,t)u^N u_t^N e^{-æt}dx\,dt \le \frac{c_0}{2}\int\limits_{Q_\tau}(\delta_1\left|u^N\right|^2 + \frac{1}{\delta_1}\left|u_t^N\right|^2)e^{-æt}dx\,dt\,,$$

$$I_7 := \int\limits_{Q_\tau} g(x,t)\left|u^N\right|^{q(x)-2} u^N u_t^N e^{-æt}dx\,dt \ge \int\limits_{\Omega_\tau}\frac{1}{q(x)}g(x,t)\left|u^N\right|^{q(x)} e^{-æ\tau}dx -$$

$$- \int\limits_{\Omega_0}\frac{1}{q(x)}g(x,0)\left|u_0^N\right|^{q(x)}dx + \frac{æg_0 - g_2}{\hat{q}}\int\limits_{Q_\tau}\left|u^N\right|^{q(x)} e^{-æt}dx\,dt \ge$$

$$\ge \frac{g_0}{\hat{q}}\int\limits_{\Omega_\tau}\left|u^N\right|^{q(x)} e^{-æ\tau}dx - \frac{g_1}{\bar{q}}\int\limits_{\Omega_0}\left|u_0^N\right|^{q(x)}dx + \frac{æg_0 - g_2}{\hat{q}}\int\limits_{Q_\tau}\left|u^N\right|^{q(x)} e^{-æt}dxdt\,,$$

$$I_8 := \int\limits_{Q_\tau} f(x,t)u_t^N e^{-æt}dx\,dt \le \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\left[|f(x,t)|^2 + \left|u_t^N\right|^2\right]e^{-æt}dx\,dt\,.$$

Враховуючи оцінки інтегралів $I_1 - I_8$, з (6) матимемо нерівність

$$\int_{\Omega_\tau}\left[(u_t^N)^2+\frac{2\alpha_1}{\hat{p}_0}\sum_{i=1}^n\left|u_{x_i}^N\right|^{p_i(x)}+\frac{2g_0}{\hat{q}}\left|u^N\right|^{q(x)}\right]e^{-\ae\tau}\,dx+\int_{Q_\tau}\left[2d_0\sum_{i=1}^n\left|u_{x_it}^N\right|^2+\right.$$
$$+\left(\ae+2\beta_0-1-\frac{1}{\delta_0}-\frac{c_0}{\delta_1}\right)\left|u_t^N\right|^2+\frac{2(\ae\,\alpha_2-\alpha_3)}{\hat{p}_0}\sum_{i=1}^n\left|u_{x_i}^N\right|^{p_i(x)}-$$
$$\left.-\delta_0\beta_1\sum_{i=1}^n\left|u_{x_i}^N\right|^2-c_0\delta_1\left|u^N\right|^2+\frac{2(\ae\,g_0-g_2)}{\hat{q}}\sum_{i=1}^n\left|u_{x_i}^N\right|^{q(x)}\right]e^{-\ae t}\,dx\,dt\le$$
$$\le\int_{\Omega_0}\left[\left|u_1^N\right|^2+\frac{2\alpha_2}{\bar{p}_0}\sum_{i=1}^n\left|u_{0,x_i}^N\right|^{p_i(x)}+\frac{2g_1}{\bar{q}}\sum_{i=1}^n\left|u_0^N\right|^{q(x)}\right]dx+$$
$$+\int_{Q_\tau}|f(x,t)|^2\,e^{-\ae t}\,dx\,dt,\qquad \tau\in(0,T]. \tag{7}$$

Оскільки $\left|u^N(x,\tau)\right|^2\le 2\left[\left|u_0^N\right|^2+\left(\int_0^\tau u_t^N(x,t)dt\right)^2\right]\le 2\left[\left|u_0^N\right|^2+T\int_0^\tau(u_t^N(x,t))^2dt\right]$, то

$$\int_{\Omega}\left|u^N(x,\tau)\right|^2e^{-\ae\tau}\,dx\le 2\int_{\Omega_0}\left|u_0^N\right|^2dx+2T\int_{Q_\tau}(u_t^N(x,t))^2e^{-\ae t}\,dx\,dt\,, \tag{8}$$

і

$$\int_{Q_\tau}\left|u^N(x,t)\right|^2e^{-\ae t}\,dx\,dt\le 2T\int_{\Omega_0}\left|u_0^N\right|^2dx+2T^2\int_{Q_\tau}(u_t^N(x,t))^2e^{-\ae t}\,dx\,dt\,. \tag{9}$$

Подібно отримаємо оцінку

$$\int_{Q_\tau}\left|u_{x_i}^N(x,t)\right|^2e^{-\ae t}dx\,dt\le 2T\int_{\Omega_0}\left|u_{0,x_i}^N\right|^2dx+2T^2\int_{Q_\tau}(u_{x_it}^N(x,t))^2e^{-\ae t}dx\,dt\,,$$
$$i=1,\dots,n\,. \tag{10}$$

Тому

$$c_0\delta_1\int_{Q_\tau}\left|u^N(x,t)\right|^2e^{-\ae t}\,dx\,dt\le 2Tc_0\delta_1\int_{\Omega_0}\left|u_0^N\right|^2dx+$$
$$+2T^2c_0\delta_1\int_{Q_\tau}(u_t^N(x,t))^2e^{-\ae t}\,dx\,dt$$

і

$$\delta_0\beta_1\int_{Q_\tau}\left|u_{x_i}^N(x,t)\right|^2e^{-\ae t}dx\,dt\le 2T\delta_0\beta_1\int_{\Omega_0}\left|u_{0,x_i}^N\right|^2dx+$$
$$+2\delta_0\beta_1T^2\int_{Q_\tau}(u_{x_it}^N(x,t))^2e^{-\ae t}\,dx\,dt,\qquad i=1,\dots,n\,.$$

Врахувавши одержані оцінки, нерівність (7) перепишемо у вигляді

$$\int_{\Omega_\tau}\left[(u_t^N)^2+(u^N)^2+\frac{2\alpha_1}{\hat{p}_0}\sum_{i=1}^n\left|u_{x_i}^N\right|^{p_i(x)}+\frac{2g_0}{\hat{q}}\left|u^N\right|^{q(x)}\right]e^{-\ae\tau}dx+\int_{Q_\tau}\left[(2d_0-\right.$$
$$-2\delta_0\beta_1T^2-4\delta_0)\sum_{i=1}^n\left|u_{x_it}\right|^2+\left(\ae+2\beta_0-\frac{c_0}{\delta_1}-\frac{1}{\delta_0}-1-4T-2T^2c_0\delta_1\right)\left|u^N\right|^2+$$
$$\left.+\frac{2(\ae\alpha_2-\alpha_3)}{\hat{p}_0}\sum_{i=1}^n\left|u_{x_i}\right|^{p_i(x)}+\frac{2(\ae\,g_0-g_2)}{\hat{q}}\left|u^N\right|^{q(x)}\right]e^{-\ae t}\,dx\,dt\le$$
$$\le\int_{\Omega_0}\left[\left|u_1^N\right|^2+\frac{2\alpha_2}{\bar{p}_0}\sum_{i=1}^n\left|u_{0,x_i}^N\right|^{p_i(x)}+(2Tc_0\delta_1+4)\left|u_0^N\right|^2+(2T\beta_1\delta_0+\right.$$

$$+ 4T\delta_0)\sum_{i=1}^{n}\left|u_{0,x_i}^N\right|^2 + \frac{2\delta_1}{\bar{q}}\sum_{i=1}^{n}\left|u_0^N\right|^{q(x)}\Bigg]dx + \int_{Q_\tau}|f(x,t)|^2 e^{-æt}\,dxdt\,. \quad (11)$$

Вибравши тут $\delta_1 = 1$, $\delta_0 = \dfrac{d_0}{2\beta_1 T^2 + 4}$, $æ = \max\Big\{1,\ -2\beta_0 + c_0 + \dfrac{1}{\delta_0} + 2 + 4T +$

$+ 2T^2 c_0,\ \dfrac{\alpha_3}{\alpha_2} + 1,\ \dfrac{g_2}{g_0} + 1\Big\}$, отримаємо

$$\int_{\Omega_\tau}\Bigg[(u_t^N)^2 + (u^N)^2 + \sum_{i=1}^{n}\left|u_{x_i}^N\right|^{p_i(x)} + \sum_{i=1}^{n}\left|u_{x_i}^N\right|^2 + \sum_{i=1}^{n}\left|u_{x_i t}^N\right|^2 +$$

$$+ \left|u^N\right|^{q(x)}\Bigg]e^{-æ\tau}dx \le M_1\,, \quad (12)$$

де $\tau \in [0,T]$, $M_1 \ge 1$, при цьому стала M_1 не залежить від N.

Тоді з (12), умов (**P1**), (**Q1**) і лем 1, 5 [1] одержуємо оцінки

$$\left\|u^N\right\|_{L^\infty((0,T);V_0^{1,p,q}(\Omega))} \le M_2\,, \qquad \left\|u^N\right\|_{L^2((0,T);H_0^1(\Omega))} \le M_2\,, \quad (13)$$

$$\left\|u^N\right\|_{V_0^{1,p,q}(Q_T)} \le M_2\,, \quad (14)$$

$$\left\|u_t^N\right\|_{L^\infty((0,T);H_0^1(\Omega))} \le M_2\,, \quad (15)$$

де стала M_2 не залежить від N. Введемо оператор $A : V_0^{1,p,q}(Q_T) \to$ $\to (V_0^{1,p,q}(Q_T))^*$ за формулою

$$\langle Au,\, v\rangle_{0,T} = \int_{Q_T}\Bigg[\sum_{i=1}^{n}a_i(x,t)\left|u_{x_i}^N\right|^{p_i(x)-2}u_{x_i}^N v_{x_i} + g(x,t)\left|u^N\right|^{q(x)-2}u^N v\Bigg]dx\,dt\,,$$

де $u, v \in V_0^{1,p,q}(Q_T)$, через $\langle\,\cdot,\cdot\,\rangle_{0,T}$ позначено скалярний добуток між просторами $(V_0^{1,p,q}(Q_T))^*$ і $V_0^{1,p,q}(Q_T)$. Очевидно, що A − монотонний оператор. Оскільки

$$\langle A(u+\lambda w),\, v\rangle_{0,T} = \int_{Q_T}\Bigg[\sum_{i=1}^{n}a_i(x,t)\left|u_{x_i} + \lambda w_{x_i}\right|^{p_i(x)-2}(u_{x_i} + \lambda w_{x_i})v_{x_i} +$$

$$+ g(x,t)|u + \lambda w|^{q(x)-2}(u + \lambda w)v\Bigg]dx\,dt\,,$$

то

$$\langle A(u+\lambda w) - A(u),\, v\rangle_{0,T} = \lambda\int_{Q_\tau}\Bigg[\sum_{i=1}^{n}a_i(x,t)(p_i(x)-1)\left|u_{x_i} +\right.$$

$$\left.+ \lambda w_{x_i}\right|^{p_i(x)-2} w_{x_i}v_{x_i} + g(x,t)(q(x)-1)|u + \lambda w|^{q(x)-2}\,wv\Bigg]dx\,dt\,,$$

$$u, v, w \in V_0^{1,p,q}(Q_T)\,.$$

Розглянемо функціонал

$$J(v) = \int_{Q_T}\Bigg[\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i(x,t)}{p_i(x)}\left|v_{x_i}\right|^{p_i(x)} + \frac{g(x,t)}{q(x)}|v|^{q(x)}\Bigg]dx\,dt\,.$$

Згідно з лемою 1 цей функціонал є випуклим. Тоді

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[J(u + hv) - J(v)] = \langle J'(u), v\rangle_{0,T}\,,$$

причому $J'(u) = A(u)$. На підставі твердження 1.1 [7, с. 169] A − напівнеперервний. Згідно з наслідком 1.2 [2, с. 84]

$$\left\| Au^N \right\|_{(V_0^{1,p,q}(Q_T))^*} \le M_3 \,, \tag{16}$$

де стала M_3 не залежить від N. Отже, згідно з (13)−(16) існує підпослідовність $\{u^{N_k}\}_{k=1}^{\infty}$ послідовності $\{u^N\}_{N=1}^{\infty}$ така, що

$u^{N_k}(\,\cdot\,,T) \to u$ слабко в $L^2((0,T);H_0^1(\Omega))$, $\quad u_t^{N_k}(\,\cdot\,,T) \to \omega$ слабко в $L^2(\Omega)$,

$u_t^{N_k}(\,\cdot\,,T) \to u$ *-слабко в $L^\infty((0,T);H_0^1(\Omega))$, $\quad u^{N_k} \to u$ слабко в $V_0^{1,p,q}(Q_T)$,

$u^{N_k} \to u$ сильно в $L^2(Q_T)$, $\quad Au^{N_k} \to \chi$ слабко в $(V_0^{1,p,q}(Q_T))^*$. (17)

Нехай P_N − оператор ортогонального проектування $L^2(\Omega)$ на $\{\varphi^1,\dots,\varphi^N\}$. Оператор $P_N \in \mathcal{L}\{L^2(\Omega),L^2(\Omega)\}$ і обмежений рівномірно. Означимо оператори $B_0 : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$, $B_1 : H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$, $A_0 : V_0^{1,p,q}(\Omega) \to (V_0^{1,p,q}(\Omega))^* \subset H^{-l}(\Omega)$ відповідно такими формулами:

$$(B_0 u, v) = \int_\Omega \left[\sum_{i,j=1}^n d_{ij}(x,t) u_{x_i} v_{x_j} + b_0(x,t) uv \right] dx \,,$$

$$(B_1 u, v) = \int_\Omega \left[\sum_{i=1}^n b_i(x,t) u_{x_i} v + \mathrm{c}(x,t) uv \right] dx \,,$$

$$(Au, v)_{0,T} = \int_0^T (A_0 u, v)\, dt \,.$$

Для оператора P_N виконуються включення

$$P_N \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega), H_0^1(\Omega)),\ \ P_N \in \mathcal{L}(H^{-1}(\Omega), H^{-1}(\Omega)),\ \ P_N \in \mathcal{L}(H^{-l}(\Omega), H^{-l}(\Omega)).$$

Тоді з (4) випливає, що

$$u_{tt}^N + P_N(B_0 u_t^N) + P_N(B_1 u^N) + P_N(A_0 u^N) = P_N f \,.$$

Маємо

$$\left\| B_0 u_t^N \right\|_{L^2((0,T);H^{-1}(\Omega))} \le M_3, \qquad \left\| B_1 u^N \right\|_{L^2((0,T);H^{-1}(\Omega))} \le M_3 \,,$$

$$\left\| Au^N \right\|_{L^2((0,T);H^{-l}(\Omega))} \le M_3 \,.$$

Отже, враховуючи рівномірну обмеженість оператора проектування P_N,

$$\left\| u_{tt}^N \right\|_{L^2((0,T);H^{-l}(\Omega))} \le M_3 \,.$$

Оскільки $\left\| u_t^N \right\|_{L^2((0,T);H_0^1(\Omega))} \le M_3$ і $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ компактно, то на підставі теореми 5.1 [7, с. 70] $u_t^{N_k} \to u_t$ сильно в $L^2(Q_T)$ при $N_k \to \infty$.

Зазначимо, що $u \in C([0,T];H_0^1(\Omega))$. Крім того, можна вважати, що $u^{N_k}(\,\cdot\,,T) \to \xi$ слабко в $H_0^1(\Omega)$ при $N_k \to \infty$.

Нехай N_0 − довільне фіксоване натуральне число,

$$M_{N_0} = \left\{ w : w(x,t) = \sum_{k=1}^{N_0} z_k^{N_0}(t) \varphi^k(x),\ z_k^{N_0} \in C^1([0,T]),\ k = 1,\dots,N_0 \right\}$$

і $M = \bigcup\limits_{N_0=1}^{\infty} M_{N_0}$. За лемою 3 множина M щільна у просторі таких функцій v, що $v \in V_0^{1,p,q}(Q_T) \cap H_0^1(Q_T)$.

Тоді, використавши властивості (17), з (4) одержуємо рівність

$$\langle\chi, v\rangle_{0,T} + \int_{Q_T}\Big[-u_t v_t + \sum_{i,j=1}^{n} d_{ij}(x,t)u_{x_i}v_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)u_{x_i}v_{x_j} +$$

$$+ b_0(x,t)u_t v + c(x,t)uv - f(x,t)v\Big]dx\,dt +$$

$$+ \int_{\Omega_T}\omega v\,dx - \int_{\Omega_0} u_1(x)v\,dx = 0\,, \tag{18}$$

правильну для довільної функції $v^{N_0} \in H_0^1(Q_T)\cap V_0^{1,p,q}(Q_T)$, причому

$$u \in H^1((0,T);H_0^1(\Omega))\cap V_0^{1,p,q}(Q_T)\cap L^\infty((0,T);V_0^{1,p,q}(\Omega))\,.$$

Крім того, оскільки $u \in H^1(Q_T)\cap V_0^{1,p,q}(Q_T)$ і $u_t \in L^2((0,T);H_0^1(\Omega))$, то рівність (18) справджується і для $v = u$. Знайдемо значення χ. Позначимо $y_k = \langle A(u^{N_k}) - A(v),(u^{N_k} - v)e^{-æt}\rangle$. Тоді

$$0 \le \varliminf_{k\to\infty} y_k = \varliminf_{k\to\infty}\Big[\big\langle A(u^{N_k}), u^{N_k}e^{-æt}\big\rangle_{0,T} - \big\langle A(u^{N_k}), ve^{-æt}\big\rangle_{0,T} -$$

$$-\big\langle A(v),(u^{N_k} - v)e^{-æt}\big\rangle_{0,T}\Big] = \varliminf_{k\to\infty}\Big[\int_{Q_T} fu^{N_k} + |u_t^{N_k}|^2 -$$

$$-\sum_{i,j=1}^{n} d_{ij}(x,t)u_{x_i t}^{N_k}u_{x_j}^{N_k} + æu_t^{N_k}u^{N_k} - \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)u_{x_i}^{N_k}u^{N_k} -$$

$$-c(x,t)|u^{N_k}|^2\Big]e^{-æt}dxdt + \int_{\Omega_T} u_t^{N_k}u^{N_k}e^{-æt}dx - \int_{\Omega_0} u_1^{N_k}u_0^{N_k}dx -$$

$$-\big\langle A(u^{N_k}), ve^{-æt}\big\rangle_{0,T} - \big\langle A(v),(u^{N_k}-v)e^{-æt}\big\rangle_{0,T}\Big] = \varliminf_{k\to\infty}\Big[\int_{Q_T} fu^{N_k} +$$

$$+ æ|u_t^{N_k}|^2 + u_t^{N_k}u^{N_k} - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(æd_{ij}(x,t) - d_{ijt}(x,t))u_{x_i}^{N_k}u_{x_j}^{N_k} -$$

$$-\sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)u_{x_i}^{N_k}u^{N_k} - c(x,t)|u^{N_k}|^2\Big]e^{-æt}dxdt -$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\Omega_T}\sum_{i,j=1}^{n} d_{ij}(x,t)u_{x_i}^{N_k}u_{x_j}^{N_k}e^{-æt}dx - \frac{1}{2}\int_{\Omega_0}\sum_{i,j=1}^{n} d_{ij}(x,0)u_{0,x_i}^{N_k}u_{0,x_j}^{N_k}dx -$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\Omega_T} u_t^{N_k}u^{N_k}e^{-æt}dx - \frac{1}{2}\int_{\Omega_0} u_1^{N_k}u_0^{N_k}dx - \big\langle A(u^{N_k}), ve^{-æt}\big\rangle_{0,T} -$$

$$-\big\langle A(v),(u^{N_k} - v)e^{-æt}\big\rangle_{0,T}\Big] = \Big[\int_{Q_T} fu + |u|^2 + æu_t u - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(æd_{ij}(x,t) -$$

$$-d_{ijt}(x,t))u_{x_i}u_{x_j} - \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)u_{x_i}u - b_0(x,t)u_t u - c(x,t)u^2\Big]e^{-æt}dxdt -$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\Omega_T}\sum_{i,j=1}^{n} d_{ij}(x,T)\xi_{x_i}\xi_{x_j}e^{-æt}dx + \frac{1}{2}\int_{\Omega_0}\sum_{i,j=1}^{n} d_{ij}(x,0)u_{0,x_i}u_{0,x_j}dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\Omega_T}\omega ue^{-æt}dx - \int_{\Omega_0} u_1u_0\,dx - \big\langle\chi, ve^{-æt}\big\rangle_{0,T} -$$

$$-\big\langle A(v),(u - v)e^{-æt}\big\rangle_{0,T} \tag{19}$$

при достатньо великому $æ$.

З рівності (18) при $v = ue^{-æt}$ одержуємо

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_T}\sum_{i,j=1}^{n} d_{ij}(x,T)u_{x_i}u_{x_j}e^{-æT}dx + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0}\sum_{i,j=1}^{n} d_{ij}(x,0)u_{0x_i}u_{0x_j}dx + \int\limits_{Q_T}\Big[|u_t|^2 +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(æd_{ij}(x,t) - d_{ijt}(x,t))u_{x_i}u_{x_j} - f(x,t)u + \sum_{i=1}^{n} b_{ij}(x,t)u_{x_i}u +$$

$$+ b_0(x,t)u_t u + c(x,t)u^2\Big]e^{-æt}dxdt + \int\limits_{\Omega_T}\omega u(x,T)e^{-æT}dx -$$

$$- \int\limits_{\Omega_0} u_1 u_0\, dx + \left\langle \chi, ue^{-æt}\right\rangle_{0,T} = 0\,. \qquad (20)$$

Оскільки $u^{N_k}(\cdot,0) \to u(\cdot,0)$ слабко в $H_0^1(\Omega)$ і $u^{N_k}(\cdot,0) = u_0^{N_k} \to u_0$ сильно в $H_0^1(\Omega)$, то $u(x,0) = u_0(x)$. Тоді

$$\int\limits_{\Omega_T}\left|u^{N_k} - u\right|^2 dx \le \int\limits_{\Omega_0} |\, u^{N_k} - u\,|^2 dx + 2\int\limits_{Q_T}\left|(u_t^{N_k} - u_t)(u^{N_k} - u)\right| dx\,dt$$

і $\int\limits_{\Omega_T}\left|u^{N_k} - u\right|^2 dx \to 0$. Отже, $u(x,T) = \xi$ і

$$\int\limits_{\Omega_T}(u_{x_i}^{N_k} - u_{x_i})v\,dx = \int\limits_{\Omega_0}(u_{0,x_i}^{N_k} - u_{0,x_i})vdx + \int\limits_{Q_T}(u_{x_i t}^{N_k} - u_{x_i t})v\,dx\,dt +$$

$$+ \int\limits_{Q_T}(u_{x_i}^{N_k} - u_{x_i})v_t\,dx\,dt\,.$$

Тому $u_{x_i}^{N_k}(\cdot,T) \to u_{x_i}(\cdot,T)$ слабко в $L^2(\Omega)$, але $u_{x_i}^{N_k}(\cdot,T) \to \xi_{x_i}$ слабко в $L^2(\Omega)$, отже, $u_{x_i}(\cdot,T) = \xi_{x_i}$.

Додавши (19) і (20), отримаємо

$$\left\langle \chi, ue^{-æt}\right\rangle_{0,T} - \left\langle \chi, ve^{-æt}\right\rangle_{0,T} - \left\langle A(v),(u-v)e^{-æt}\right\rangle_{0,T} \ge 0\,.$$

Отже,

$$\left\langle \chi - A(v),(u-v)e^{-æt}\right\rangle_{0,T} \ge 0\,. \qquad (21)$$

Виберемо в цій нерівності $v = u + \lambda w$, де $\lambda > 0$, $w \in V_0^{1,p,q}(Q_T)$. Поділимо (21) на λ та спрямуємо λ до 0. Врахувавши напівнеперервність оператора A, отримаємо, що $\chi = A(u)$.

З рівняння (1) випливає, що

$$u_{tt} = -\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x,t)u_{x_i} + \sum_{i,j=1}^{n}(d_{ij}(x,t)u_{x_i t})_{x_j} +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{n}\left(a_i(x,t)\left|u_{x_i}\right|^{p_i(x)-2}u_{x_i}\right)_{x_i} - b_0(x,t)u_t - c(x,t)u -$$

$$- g(x,t)|u|^{q(x)-2}u + f(x,t).$$

Врахувавши гладкість правої частини цієї рівності, одержимо вкладення $u_{tt} \in (V_0^{1,p,q}(Q_T))^* + L^2((0,T);H^{-1}(\Omega))$.

Оскільки $V_0^{1,p,q}(Q_T) \subset L^r((0,T);V_0^{1,p,q}(\Omega))$, $r = \min\{\overline{p},\overline{q}\}$, то

$$(V_0^{1,p,q}(Q_T))^* \subset L^{r'}((0,T);(V^{1,p,q}(\Omega))^*)\,.$$

Отже,

$$u_{tt} \in L^{r'}((0,T);(V_0^{1,p,q}(\Omega))^* + H^{-1}(\Omega))\,, \qquad \text{де} \qquad r' = \frac{r}{r-1}\,.$$

Оскільки $u_t \in L^2((0,T);H_0^1(\Omega))$ і $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$, то на підставі леми 1.2 [7, с. 20] $u_t \in C([0,T];H^{-1}(\Omega)+(V_0^{1,p,q}(\Omega))^*)$, тобто $u_t(\cdot,0)$ має сенс. Оскільки $u_t^{N_k}(\cdot,0) \to u_t(x,0)$ слабко в $L^2(\Omega)$, $u_t^{N_k}(\cdot,0) \to u_1^{N_k} \to u_1$ в $L^2(\Omega)$, отже, майже всюди в Ω. Тому за [7, с. 25] $u_t(x,0)=u_1(x)$. Аналогічно $u_t(x,T)=\omega$. Отже, u є розв'язком задачі (1)–(3) в сенсі розподілів. ◊

Теорема 2. *Нехай виконуються умови (***A***), (***B***), (***C***), (***D***), (***G***), (***P***), (***Q***) та* $f \in L^2(Q_T)$, $u_0 \in V_0^{1,p,q}(\Omega) \bigcap H_0^1(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$, *числа* $\overline{p}_i > 2$, $\overline{q} > 2$, $i=1,\ldots,n$. *Тоді розв'язок* u *задачі* (1)–(3) (*у сенсі розподілів*) *єдиний у класі функцій* $u,\ u_{x_i} \in L^\infty(Q_T)$, $u_{tt} \in L^2(Q_T)$, $u \in V_0^{1,p,q}(Q_T) \bigcap C([0,T];H_0^1(\Omega))$.

Д о в е д е н н я. Доведемо єдиність розв'язку задачі (1)–(3). Припустимо, що існує два розв'язки $u^{(1)}, u^{(2)}$ задачі (1)–(3). Тоді для $u \overset{\text{def}}{=} u^{(1)} - u^{(2)}$ правильна рівність

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} u_t^2 e^{-æ\tau}dx + \int\limits_{Q_\tau}\Bigg[\frac{æ}{2}|u_t|^2 + \sum_{i=1}^n a_i(x,t)\Bigg(\left|u_{x_i}^{(1)}\right|^{p_i(x)-2} u_{x_i}^{(1)} -$$

$$-\left|u_{x_i}^{(2)}\right|^{p_i(x)-2} u_{x_i}^{(2)}\Bigg)u_{x_i t} + \sum_{i,j=1}^n d_{ij}(x,t)u_{x_i t}u_{x_j t} + \sum_{i=1}^n b_i(x,t)u_{x_i}u_t +$$

$$+ b_0(x,t)u_t^2 + c(x,t)uu_t + g(x,t)\Bigg(\left|u^{(1)}\right|^{q(x)-2} u^{(1)} -$$

$$-\left|u^{(2)}\right|^{q(x)-2} u^{(2)}\Bigg)u_t\Bigg]e^{-æt}\,dx\,dt = 0. \tag{22}$$

Крім того, $u(x,0)=0$, $u_t(x,0)=0$. Оцінки доданків цієї рівності аналогічні до оцінок $I_1 - I_8$, а на підставі умови **(A)** маємо

$$\int\limits_{Q_T}\sum_{i=1}^n a_i(x,t)\Bigg(\left|u_{x_i}^{(1)}\right|^{p_i(x)-2} u_{x_i}^{(1)} - \left|u_{x_i}^{(2)}\right|^{p_i(x)-2} u_{x_i}^{(2)}\Bigg)u_{x_i t}e^{-æt}\,dx\,dt =$$

$$= \int\limits_{Q_T}\sum_{i=1}^n a_i(x,t)\int\limits_{u_{x_i}^{(2)}}^{u_{x_i}^{(1)}}(p_i(x)-1)|\tau|^{p_i(x)-2}\,\tau\,d\tau u_{x_i t}e^{-æt}\,dx\,dt \le$$

$$\le \alpha\int\limits_{Q_T}\sum_{i=1}^n(\widehat{p}_i(x)-1)\Bigg(\left|u_{x_i}^{(1)}\right|^{p_i(x)-2} + \left|u_{x_i}^{(2)}\right|^{p_i(x)-2}\Bigg)u_{x_i}u_{x_i t}e^{-æt}\,dx\,dt \le$$

$$\le \frac{M_5}{2}\int\limits_{Q_T}\sum_{i=1}^n\left(\frac{1}{\delta}\left|u_{x_i}\right|^2 + \delta\left|u_{x_i t}\right|^2\right)e^{-æt}dx\,dt.$$

Тоді з (22) випливає нерівність

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} u_t^2 e^{-æ\tau}dx + \int\limits_{Q_T}(2d_0 - \delta M_5)\sum_{i=1}^n\left|u_{x_i t}\right|^2 + \left(\delta_0\beta_1 - \frac{M_5}{\delta}\right)\sum_{i=1}^n\left|u_{x_i}\right|^2 +$$

$$+\left(æ + 2\beta_0 - 2 - \frac{1}{\delta_0} - \frac{c_0}{\delta_1}\right)|u_t|^2 - c_0\delta_1|u|^2\Bigg]e^{-æt}\,dx\,dt \le 0.$$

Вибравши δ_0, δ_1 такими ж, як і при доведенні існування розв'язку, та врахувавши оцінки (8), (9), (10), одержимо оцінку

$$\int\limits_{\Omega} u_t^2 e^{-æ\tau}dx\,dy + \int\limits_{Q_T}\left[\sum_{i=1}^n\left|u_{x_i}\right|^2 + \sum_{i=1}^n\left|u_{x_i t}\right|^2 + |u_t|^2 + |u|^2\right]e^{-æt}\,dx\,dt \le 0,$$

звідки $u \equiv u^{(1)} - u^{(2)} \equiv 0$ майже всюди в Q_T. Отже, $u^{(1)} = u^{(2)}$. ◊

5. Висновки. Знайдено клас нелінійних анізотропних гіперболічних рівнянь, для якого існує єдиний розв'язок змішаної задачі в узагальнених просторах Лебеґа.

1. *Бугрій О., Доманська Г., Процах Н.* Мішана задача для нелінійного рівняння третього порядку в узагальнених просторах Соболєва // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2005. – Вип. 64. – С. 44–61.
2. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – Москва: Мир, 1978. – 336 с.
3. *Доманська Г. П., Лавренюк С. П., Процах Н. П.* Задача для нелінійного гіперболічного рівняння третього порядку // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. – 2005. – Вип. 269. – С. 34–42.
4. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1958. – 474 с.
5. *Кожанов А. И.* Краевые задачи для уравнений математической физики нечетного порядка. – Новосибирск: НГУ, 1990. – 131 с.
6. *Лавренюк С. П., Процах Н. П.* Мішана задача для одного нелінійного параболічного рівняння // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – **43,** № 3. – С. 56–63.
7. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – Москва: Мир, 1972. – 587 с.
8. *Слепцова И. П., Шишков А. Е.* Принцип Фрагмена-Линдалефа для некоторых квазилинейных эволюционных уравнений второго порядка // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 2. – С. 239–249.
9. *Слепцова И. П., Шишков А. Е.* Смешанная задача для уравнения распространения возмущений в вязких средах в неограниченных областях // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1988. – № 11. – С. 28–31.
10. *Antontsev S. N., Shmarev S.* A model porous medium equation with variables exponent of nonlinearity: existence, uniqueness and localization properties of solutions // Nonlinear Anal. Ser. A: Theory and Methods. – 2005. – **60**. – P. 515–545.
11. *Antontsev S. N., Shmarev S.* Localization of solutions of elliptic and parabolic equations caused by anisotropic diffusion // Int. Conf. «Nonlinear Partial Differ. Equations»: Book of abstracts (Alushta, Sept. 17-23, 2005). – 2005. – P. 114.
12. *Bendahmane M., Karlsen K. H.* Renormalized entropy solutions for quasilinear anisotropic degenerate parabolic equations// SIAM. J. Math. Anal. – 2004. – No 2. – P. 405–422.
13. *Bendahmane M., Karlsen K. H.* Uniqueness of entropy solutions for doubly nonlinear anisotropic degenerate parabolic equations // American Mathem. Society: Providence, USA. –2005. – 25 p.
14. *Kováčik O., Čelko M.* Short note on solvability of one class of hyperbolic equation in $W^{k,p(x)}$ // Proc. Seminar on the Orthogonal Polynomials and other Appl 2. – 1995. – P. 3–6.
15. *Kováčik O., Rákosnik J.* On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{l,\,p(x)}$ // Czechosl. Math. J. – 1991. – **41**, No. 4. – P. 592–618.
16. *Orlicz W.* Über konjugierte Exponentenfolgen // Studia Math. – 1931. – No. 3. – P. 200–212.
17. *Yang Zh.* Cauchy problem for quasi-linear wave equations with nonlinear damping and source terms // J. Math. Anal. and Appl. – 2004. – **300**. – P. 218–243.

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ АНИЗОТРОПНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Доказано существование и единственность решения (в смысле распределений) смешанной задачи для анизотропного гиперболического уравнения третьего порядка. Уравнение содержит нелинейности степенного вида, степенью которых является функция.

MIXED PROBLEM FOR ANISOTROPIC THIRD-ORDER EQUATION

The existence and uniqueness of solution (in the sense of distribution) for anisotropic hyperbolic equation of the third order is proved. The equation contains function power non-linearities.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
19.06.06