

**ПЛОСКА СИМЕТРИЧНА ЗАДАЧА ПРО УДАР ТВЕРДОГО  
ЦИЛІНДРИЧНОГО ТІЛА ПО ПОВЕРХНІ КАВЕРНИ  
ПРИ СУПЕРКАВІТАЦІЙНОМУ ОБТІКАННІ**

*Досліджується процес ударної взаємодії твердого циліндричного тіла з поверхнею циліндричної порожнини. Розв'язання сформульованої нестационарної змішаної крайової задачі з невідомою границею зводиться до спільного розв'язування нескінченної системи лінійних інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду та диференціального рівняння руху тіла. Отримано гідродинамічні та кінематичні характеристики процесу.*

**Вступ.** У наш час експериментально доведено можливість створення підводних транспортних апаратів на основі нових фізичних принципів руху тіл під водою – суперкавітаційного руху [12–14, 19]. При цьому тіло рухається усередині кавітаційної порожнини, що його оточує, – суперкаверни – і може розвивати швидкість руху, сумірну зі швидкістю поширення звуку у воді. Суперкавітаційний рух викликає значний інтерес у дослідників. Останні результати досліджень можна знайти, наприклад, у публікаціях [16, 17].

Однією з проблем суперкавітаційного руху є забезпечення стійкості руху тіла в каверні [10, 12–14, 19]. За такого руху тіло контактує з поверхнею каверни лише у своїй головній частині. Прикладена до області контакту тіла з поверхнею каверни гідродинамічна сила опору руху з боку рідини створює перекидальний момент щодо центру мас тіла, викликаючи нестійкість суперкавітаційного руху тіла в рідині. Цією нестійкістю пояснюють виникнення серії поперечних ударів тіла по поверхні каверни, що можуть суттєво впливати на загальний характер руху тіла. Це свідчить про актуальність дослідження процесу удару тіла по поверхні каверни.

У більшості робіт задачі занурення циліндричних тіл у рідину через поверхню каверни досліджувались із використанням моделі нестисливої рідини. У монографії [9] наводиться розв'язання задачі про занурення твердого циліндра через горизонтальну вільну поверхню рідини, де визначається діюча на циліндр величина гідродинамічної сили за малої глибини занурення, що дозволяє апроксимувати коло параболою. У роботі [10] наводяться результати розв'язування задач занурення циліндра в рідину через поверхню циліндричної порожнини для випадку малих зазорів. У статтях [3, 18] розв'язано задачу занурення циліндра в рідину через поверхню каверни для довільного співвідношення радіусів циліндра й порожнини. У [3] визначаються залежності ширини змоченої поверхні тіла від глибини занурення за різних значень зазору, а також наводиться аналітична формула для імпульсивної сили, а у [18] наводяться формули для визначення як імпульсивної, так і гідродинамічної сил.

Модель стислої рідини як така, що більш адекватно описує процес взаємодії тіла з рідиною при відносно високих швидкостях [1], використовується у публікаціях [6, 7]. Зокрема, в роботі [6] наведено постановку задачі та одержано її асимптотичний розв'язок для початкової стадії взаємодії у випадку нескінченно малого зазору, тобто у випадку, коли поперечні розміри тіла і порожнини збігаються. Сформульовано загальну постановку задачі для довільного зазору, яка є змішаною нестационарною початково-крайовою задачею з невідомою змінною в часі границею, і одержано розв'язувальні нескінченні системи інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду [7]. Для малого зазору подано асимптотичний розв'язок задачі, для невеликого – чисельний розв'язок вказаних систем. У цій публікації, що базується на результатах роботи [7], одержано чисельний розв'язок для довільного зазору.

**Постановка задачі.** Розглянемо таку механічну систему: в безмежній рідині знаходиться нескінченно-протяжна кругова циліндрична порожнина радіуса  $R_c$ ; усередині порожнини міститься нескінченно-протяжний твердий круговий циліндр радіуса  $R_b$ , вісь якого паралельна осі порожнини, причому  $R_b < R_c$ . Позначимо через  $d = R_c - R_b$  величину зазору між каверною і тілом. Тіло під дією зовнішніх сил робить поперечні удари по поверхні каверни. Нехай у початковий момент часу  $t = 0$  циліндр досягає поверхні порожнини і починає занурюватися крізь неї зі швидкістю  $v_0(t)$ , причому початкова швидкість занурення  $v_0 = v_0(0)$  значно менша від швидкості звуку в рідині. Рідину будемо вважати ідеальною стисливою, а глибини занурення крізь поверхню каверни  $z^*$  – малими, що дозволяє скористатися для опису руху рідини хвильовим рівнянням в акустичному наближенні та знести граничні умови на незбурену поверхню каверни.

Зв'яжемо поверхню порожнини з нерухомою декартовою системою координат  $Oxyz$  (рис. 1): центр  $O$  розмістимо на осі порожнини, вісь  $Ox$  спрямуємо горизонтально, вісь  $Oz$  – вертикально вниз, вісь  $Oy$  – по осі каверни. Оскільки гідродинамічна картина процесу занурення циліндричного тіла в рідину через поверхню каверни в довільному поперечному перерізі повторюється, то можна обмежитися розглядом руху в одному з перерізів, наприклад, у площині  $xOz$  і, таким чином, розглядати плоску задачу.

У площині  $xOz$  введемо також полярну систему координат: центр перерізу  $O$  – полюс полярної системи,  $\theta$  – полярний кут, що відкладається від додатного напрямку осі  $Oz$ ,  $r$  – полярний радіус.

Введемо безрозмірні змінні:

$$\bar{x} = \frac{x}{R_b}, \quad \bar{z} = \frac{z}{R_b}, \quad \bar{r} = \frac{r}{R_b}, \quad \bar{t} = \frac{Ct}{R_b},$$

$$\bar{p} = \frac{p}{\rho C^2}, \quad \bar{V} = \frac{V}{C}, \quad \bar{\mu} = \frac{\mu}{\pi \rho R_b^2}, \quad \bar{F} = \frac{F}{\rho C^2 R_b},$$

де  $R_b$  – характерний лінійний розмір (радіус тіла);  $\rho$  – густина рідини;  $p$  – гідродинамічний тиск;  $V$  – швидкість деформування поверхні каверни;  $F$  – гідродинамічна сила;  $C$  – швидкість звуку в рідині;  $\mu$  – погонна маса циліндра. Оскільки надалі будемо використовувати тільки безрозмірні змінні, то риску над ними опускаємо.

Рух ідеальної стисливої рідини в акустичному наближенні щодо хвильового потенціалу  $\phi$  описується в циліндричних координатах хвильовим рівнянням [11]

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0. \quad (1)$$

Гідродинамічний тиск і швидкість деформування поверхні каверни визначаються за формулами

$$p = -\frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad V = \text{grad } \phi. \quad (2)$$

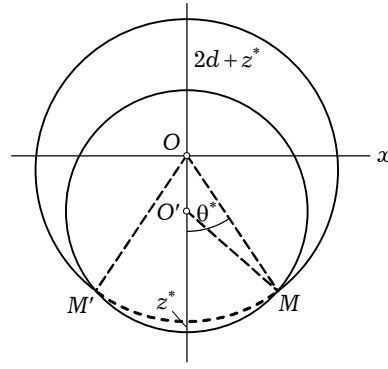


Рис. 1

Граничні умови подамо у такому вигляді:

– у межах області контакту тіла з поверхнею каверни задано умову непроникності поверхні тіла для рідини

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=1} = v_0(t) \cos \theta, \quad |\theta| < \theta^*, \quad (3)$$

де кут  $\theta^*$  визначає границю області контакту;

– на вільній поверхні каверни тиск сталий і для спрощення приймемо, що він дорівнює нулеві:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{r=1} = 0, \quad |\theta| > \theta^*. \quad (4)$$

Збурення, викликані в рідині тілом, що занурюється, на нескінченності затухають:

$$\varphi \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Оскільки до початку занурення рідина перебувала у стані спокою, то будемо мати нульові початкові умови для потенціалу:

$$\varphi|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{t=0} = 0. \quad (6)$$

Поперечний рух тіла в порожнині визначається диференціальним рівнянням

$$\mu \frac{dv_0(t)}{dt} = -\frac{F(t)}{\pi}, \quad v_0(0) = v_0, \quad (7)$$

де гідродинамічна сила опору зануренню тіла з боку рідини  $F(t)$  обчислюється за формулою

$$F(t) = 2 \int_0^{\theta^*} p(t, \theta) \cos \theta d\theta. \quad (8)$$

Кут  $\theta^*$  є полярним кутом точки перетину двох кіл, що обмежують поверхні тіла та каверни, і обчислюється зі співвідношення

$$\theta^* = \arccos \left( \frac{(z^*)^2 + 2d(d + z^* + 1)}{2(d + 1)(d + z^*)} \right), \quad (9)$$

де  $z^* = \int_0^t v_0(\tau) d\tau$  – глибина занурення тіла крізь поверхню порожнини. За-

зор  $d$  у безрозмірних позначеннях визначається за формулою  $d = R_c - 1$ .

Таким чином, сформульована задача (1), (3)–(7) є нестационарною змішаною крайовою задачею з рухомою наперед невідомою границею.

Слід зазначити, що ця задача містить елементи нелінійності, оскільки гідродинамічна сила, яка розміщена в правій частині диференціального рівняння руху (7), має складну функціональну залежність від значення кута  $\theta^*$ , що, в свою чергу, згідно з (9) визначається через  $v_0(t)$ .

**Метод розв'язування.** Застосовуючи до рівняння (1) перетворення Лапласа за часом  $t$  із параметром  $s$  [15], отримуємо в просторі зображень рівняння

$$\frac{\partial^2 \varphi^L}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi^L}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi^L}{\partial \theta^2} - s^2 \varphi^L = 0. \quad (10)$$

Величини в просторі зображень за Лапласом будемо позначати індексом « $L$ ».

Використовуючи метод Фур'є відокремлення змінних і враховуючи умову затухання на нескінченності (5), одержимо загальний розв'язок рівняння (10) у вигляді

$$\varphi^L = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(s) K_n(sr) \cos n\theta, \quad (11)$$

де  $A_n$  – невідомі коефіцієнти,  $K_n(sr)$  – функції Макдональда [2].

Розвинемо в ряди Фур'є за  $\cos n\theta$  швидкість деформування поверхні каверни  $V(t, \theta)$  і гідродинамічний тиск  $p(t, \theta)$  на ній:

$$p(t, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) \cos n\theta, \quad (12)$$

$$V(t, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n(t) \cos n\theta. \quad (13)$$

Застосовуючи до виразів (2) для тиску  $p(t, \theta)$  і швидкості  $V(t, \theta)$ , а також до розвинень (12), (13) перетворення Лапласа за  $t$  і враховуючи вираз (11), одержуємо співвідношення між коефіцієнтами рядів Фур'є для тиску та швидкості в просторі зображень

$$V_n^L(t) = p_n^L(s) + \mathcal{R}_n^L(s) \cdot p_n^L(s), \quad (14)$$

де  $\mathcal{R}_n^L(s)$  має вигляд  $\mathcal{R}_n^L(s) = -1 - \frac{K_n'(s)}{K_n(s)}$ .

Тоді за теоремою про згортку оригіналів двох функцій, враховуючи рекурентну формулу для подання  $K_n'(s)$  у вигляді  $K_n'(s) = -\frac{n}{s} K_n(s) - K_{n-1}(s)$  [15], а також табличні співвідношення між зображенням і оригіналом [5]

$$e^s K_n(s) \rightarrow \frac{z_1^n + z_2^n}{2\sqrt{(t+1)^2 - 1}}, \quad \frac{e^s}{s} K_n(s) \rightarrow \frac{z_1^n - z_2^n}{2n}, \quad \frac{e^s}{s} K_0(s) \rightarrow \ln z_1,$$

$$z_1(t) = t + 1 + \sqrt{(t+2) \cdot t}, \quad z_2(t) = t + 1 - \sqrt{(t+2) \cdot t},$$

отримаємо залежності

$$V_n(t) = p_n(t) + \int_0^t p_n(\tau) \mathcal{R}_n(t - \tau) d\tau, \quad (15)$$

що зв'язують коефіцієнти Фур'є  $V_n(t)$  і  $p_n(t)$ . Функцію  $\mathcal{R}_n(t)$  знаходимо з інтегрального рівняння Вольтерра 1-го роду зі слабкою особливістю:

$$\int_0^t \mathcal{R}_n(\tau) G_n(t - \tau) d\tau = g_n(t), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (16)$$

$$G_n(t) = \frac{z_1^n(t) + z_2^n(t)}{2\sqrt{t(t+2)}}, \quad g_n(t) = \frac{z_1^n(t) + z_2^n(t)}{2\sqrt{t+2}} \sqrt{t}.$$

З урахуванням розвинень (12), (13) і співвідношень (15) отримаємо зв'язок між швидкістю  $V(t, \theta)$  і тиском  $p(t, \theta)$  на поверхні порожнини:

$$V(t, \theta) = p(t, \theta) + \sum_{n=0}^{\infty} \left( \int_0^t p_n(\tau) \mathcal{R}_n(t - \tau) d\tau \right) \cos n\theta. \quad (17)$$

Зі співвідношення (17) з урахуванням граничних умов (3), (4) і співвідношень (2) отримаємо

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) \cos n\theta = \left\{ v_0(t) \cos \theta - \sum_{n=0}^{\infty} \left( \int_0^t p_n(\tau) \mathcal{R}_n(t-\tau) d\tau \right) \cos n\theta \right\} H(\theta^* - |\theta|), \quad (18)$$

де  $H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$  – функція Гевісайда.

Розвиваючи в ряди Фур'є за  $\cos n\theta$  праву частину виразу (18) і прирівнюючи відповідні коефіцієнти, отримуємо нескінченну систему лінійних інтегральних рівнянь Вольterra 2-го роду відносно коефіцієнтів  $p_n(t)$ :

$$p_n(t) = v_{0n}(t) - \sum_{m=0}^{\infty} \beta_{mn} \int_0^t p_m(\tau) \mathcal{R}_m(t-\tau) d\tau, \quad n = 0, 1, \dots, \infty, \quad (19)$$

де коефіцієнти  $v_{0n}(t)$  і  $\beta_{mn}(\theta^*)$  мають вигляд

$$v_{0n}(t) = \begin{cases} \frac{v_0(t)}{\pi} \sin \theta^*, & n = 0, \\ \frac{v_0(t)}{\pi} \left( \theta^* + \frac{\sin 2\theta^*}{2} \right), & n = 1, \\ \frac{v_0(t)}{\pi} \left( \frac{\sin(n+1)\theta^*}{n+1} + \frac{\sin(n-1)\theta^*}{n-1} \right), & n > 1, \end{cases}$$

$$\beta_{mn}(\theta^*) = \begin{cases} \frac{\theta^*}{\pi}, & n = m, \quad n = 0, \\ \frac{1}{\pi} \frac{\sin m\theta^*}{m}, & m \neq 0, \quad n = 0, \\ \frac{1}{\pi} \left( \theta^* + \frac{\sin 2m\theta^*}{2m} \right), & n = m, \quad n \neq 0, \\ \frac{1}{\pi} \left( \frac{\sin(n+m)\theta^*}{n+m} + \frac{\sin(m-n)\theta^*}{m-n} \right), & n \neq m, \quad n \neq 0. \end{cases}$$

Коефіцієнти  $V_n(t)$  з урахуванням знайдених коефіцієнтів  $p_n(t)$  визначаємо за формулою (15), а швидкість деформування поверхні каверни  $V(t, \theta)$  і гідродинамічний тиск  $p(t, \theta)$  – за формулами (12), (13) відповідно.

Використовуючи співвідношення (8) і (12), отримаємо гідродинамічну силу опору зануренню тіла в рідину крізь поверхню порожнини каверни

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) b_n(\theta^*),$$

де

$$b_n(\theta^*) = \begin{cases} \sin \theta^*, & n = 0, \\ \theta^* + \frac{\sin 2\theta^*}{2}, & n = 1, \\ \frac{\sin(n+1)\theta^*}{n+1} + \frac{\sin(n-1)\theta^*}{n-1}, & n > 1. \end{cases}$$

Тоді диференціальне рівняння (7) набуде вигляду

$$\mu \frac{dv_0(t)}{dt} = -\frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) b_n(\theta^*), \quad v_0(0) = v_0. \quad (20)$$

**Чисельне розв'язання задачі.** Дослідження ударного процесу, що розглядається, у цій постановці зводиться до розв'язування нескінченної системи лінійних інтегральних рівнянь Вольтерра 2-го роду (19) спільно з диференціальним рівнянням (20).

Розв'язування задачі здійснювали чисельно на скінченному відрізку часу  $[0, T]$ , який розбивали на рівні частини з кроком  $\Delta t$ , і в отриманих вузлах інтервалу часу обчислювали всі шукані величини.

Нескінченну систему інтегральних рівнянь (19) і праву частину диференціального рівняння (20) піддавали зрізуванню. Обґрунтування такого зрізування зроблено, зокрема, в [4]. Порядок зрізування  $N$  вибирали з міркувань практичної збіжності розв'язку. У системі (19) всі інтеграли обчислювали за квадратурною формулою лівих прямокутників. У результаті цю систему зводили до системи алгебраїчних рівнянь. Диференціальне рівняння (20) замінювали різницеvim. Для поліпшення збіжності рядів Фур'є застосовували  $\sigma$ -множники Гіббса [8]

$$\sigma_n = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ \frac{\sin \frac{\pi n}{N}}{\frac{\pi n}{N}}, & n = 1, \dots, N. \end{cases}$$

Ядро  $\mathcal{R}_n(t)$  нескінченної системи інтегральних рівнянь Вольтерра 2-го роду (19) задовольняє рівняння Вольтерра 1-го роду (16). Для його обчислення використовували такий підхід:

- інтервал інтегрування розбивали на рівні малі відрізки  $[t_j; t_{j+2}]$ ,  $j = 0, 2, \dots, M - 2$ ;
- кожен інтеграл заміняли сумою інтегралів по відрізку розбиття  $[t_j; t_{j+2}]$ ;
- значення  $\mathcal{R}_n(t)$  на кожному інтервалі  $[t_j; t_{j+2}]$  вважали сталими і виносили за знак інтеграла зі значенням  $\mathcal{R}_n(t_{j+1})$ ;
- інтеграли  $\int_{t_j}^{t_{j+2}} G_n(t - \tau) d\tau$  обчислювалися аналітично;
- в результаті такої процедури рівняння (16) зводиться до системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно  $\mathcal{R}_n(t_k)$  із трикутною матрицею, де  $k \in (0; M/2)$ .

В обчисленнях на проміжку часу  $[0, 4]$  варіювали такі параметри: безрозмірна погонна маса тіла  $\mu = 0.25 \div 20, \infty$  (значення  $\mu \rightarrow \infty$  відповідає випадку руху тіла зі сталою швидкістю, див. рівняння (7)); початкова швидкість проникання  $v_0 = 0.01 \div 0.05$ ; зазор між порожниною і тілом  $d = 0.2 \div 1$ .

На рис. 2 показано залежність від часу гідродинамічного тиску  $p(t)$  у лобовій точці за різних значень погонної маси циліндричного тіла  $\mu = 0.5, 2, 4, \infty$  для початкової швидкості  $v_0 = 0.05$  і значення зазору між каверною і тілом  $d = 0.2$ .

Із рис. 2 можна помітити, що гідродинамічний тиск у лобовій точці тіла в момент часу  $t = 0$ , відповідно до гіпотези плоскої хвилі, дорівнює своєму максимальному значенню  $p = \rho C v_0$  в розмірних позначеннях. Далі на початковому етапі розглянутого часового інтервалу тиск різко падає, причому тим швидше, чим легше тіло.

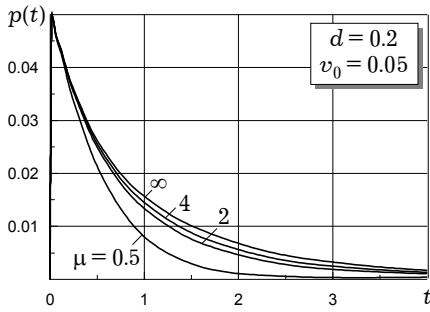


Рис. 2

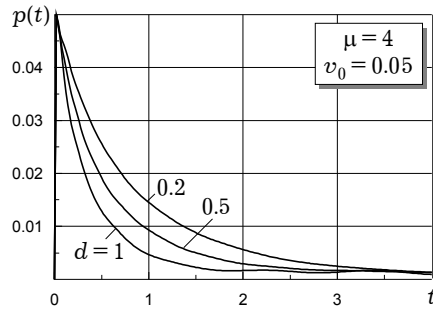


Рис. 3

На рис. 3 показано залежність від часу гідродинамічного тиску в лобовій точці за різних значень зазору  $d = 0.2, 0.5, 1$  для початкової швидкості  $v_0 = 0.05$  та маси тіла  $\mu = 4$ . Із рис. 3 можна помітити, що гідродинамічний тиск у лобовій точці тим більший, чим менший зазор  $d$ .

На рис. 4 наведено розподіл гідродинамічного тиску  $p(t)$  по поверхні порожнини в моменти часу  $t = 0.5, 1.5$  за різних значень зазору  $d = 0.5, 1$  для значень швидкості  $v_0 = 0.05$  і маси  $\mu = 4$ . Із рис. 4 бачимо, що на розглянутому інтервалі часу меншим значенням зазору  $d$  відповідає вищий тиск у межах області контакту та більша сама область контакту.

На рис. 5 показано залежність гідродинамічної сили  $F(t)$  від часу для швидкості  $v_0 = 0.05$ , зазору  $d = 0.2$  за різних значень маси  $\mu = 0.5, 2, 4, \infty$ .

Із рис. 5 можна помітити, що

- чим масивніше тіло, тим більша гідродинамічна сила;
- гідродинамічна сила на розглянутому часовому інтервалі досягає свого максимального значення, причому тим швидше, чим легше тіло.

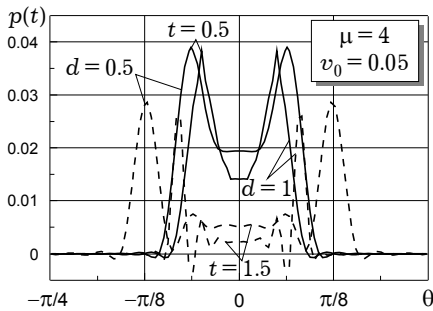


Рис. 4

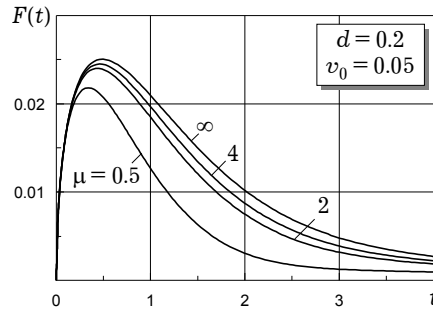


Рис. 5

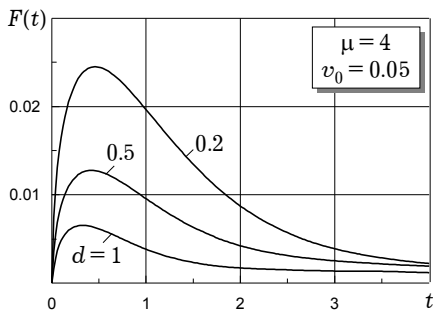


Рис. 6

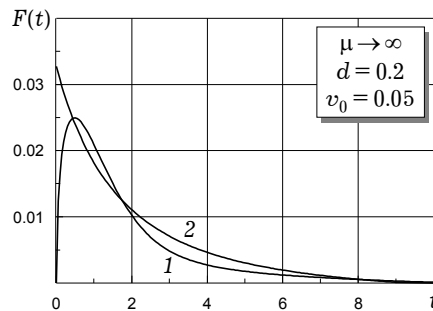


Рис. 7

На рис. 6 показано залежність гідродинамічної сили  $F(t)$  від часу для швидкості  $v_0 = 0.05$ , маси  $\mu = 4$  за різних значень зазору  $d = 0.2; 0.5; 1$ . Із рис. 6 можна помітити, що більшому значенню зазору  $d$  у довільний момент часу відповідає менше значення гідродинамічної сили.

На рис. 7 наведено порівняння значень гідродинамічної сили  $F(t)$  на часовому інтервалі  $[0; 5]$  при прониканні циліндричного тіла зі сталою швидкістю  $v_0$  через поверхню порожнини, отриманих із використанням різних моделей рідини: в цій роботі – модель стисливої рідини (крива 1), в роботі [3] – модель нестисливої рідини (крива 2). У розрахунках використовували такі значення параметрів:  $\mu \rightarrow \infty$ ,  $v_0 = 0.05$ ,  $d = 0.2$ .

Із рис. 7 видно, що

- значення гідродинамічної сили  $F(t)$  для випадку нестисливої рідини (крива 2) у початковий момент часу має скінченний стрибок  $\frac{\pi v_0^2}{d(d+1)}$  (для розглянутого випадку він дорівнює 0.032725), тоді як у випадку стисливої рідини при  $t = 0$  маємо  $F = 0$ ;
- на більш пізніх етапах обидві моделі дозволяють отримувати близькі за значенням результати.

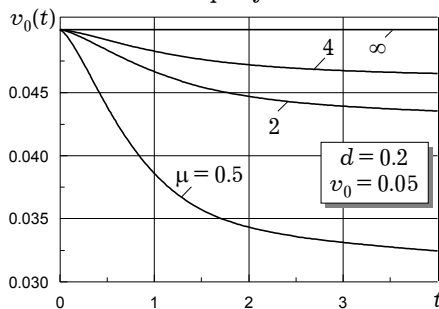


Рис. 8

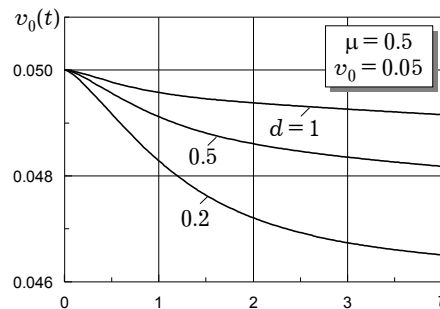


Рис. 9

На рис. 8 показано залежність швидкості руху тіла  $v_0(t)$  від часу для початкової швидкості  $v_0 = 0.05$ , зазору  $d = 0.2$  за значень маси тіла  $\mu = 0.5, 2.0, 4.0, \infty$ . Із рис. 8 видно, що швидкість руху циліндра істотно залежить від його маси: більш масивному тілу в довільний момент часу відповідає більше значення швидкості.

На рис. 9 показана залежність швидкості  $v_0(t)$  від часу за різних значень зазору  $d = 0.2, 0.5, 1.0$  для початкової швидкості  $v_0 = 0.05$ , маси  $\mu = 0.5$ . Із рис. 9 видно, що більшому значенню зазору  $d$  відповідає більше значення швидкості руху тіла. Це пояснюється тим, що з ростом зазору  $d$  прониканню тіла перешкоджає менша гідродинамічна сила (див. рис. 6).

**Висновки.** У роботі одержано розв'язок плоскої задачі занурення твердого циліндричного тіла в ідеальну стисливу рідину через поверхню циліндричної порожнини для довільного зазору. Обчислено гідродинамічні і кінематичні характеристики досліджуваного процесу. Задача розв'язана на інтервалі часу, на якому гідродинамічні характеристики встигають досягти своїх максимальних значень. Використання моделі стисливої рідини дозволило отримати більш адекватні фізиці явища результати.

1. *Баженов В. Г., Кочетков А. В., Крылов С. В.* Анализ нелинейных эффектов при проникании тел в сжимаемую жидкость // Прикл. механика. – 1986. – 22, № 2. – С. 125–127.
2. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. – Т. 2. – Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. – Москва: Наука, 1966. – 295 с.
3. *Васин А. Д., Парышев Э. В.* Погружение цилиндра в жидкость через цилиндрическую свободную поверхность // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. – 2001. – № 2. – С. 3–12.



4. Коробейник Ю. Ф. О сходимости метода редукции при решении счетных систем линейных интегральных уравнений // Уч. зап. Ростов. н/Д ун-та. – 1956. – 43, № 6. – С. 21–57.
5. Кубенко В. Д. Нестационарное взаимодействие элементов конструкций со средой. – Киев: Наук. думка, 1979. – 184 с.
6. Кубенко В. Д. Нестационарные поперечные движения тонкого длинного тела при суперкавитационном обтекании // Доп. НАН України. – 2003. – № 6. – С. 41–47.
7. Кубенко В. Д. Плоская задача соударения тонкого длинного тела с поверхностью цилиндрической полости в жидкости // Прикл. механика. – 2006. – № 6. – С. 32–53.
8. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. – Москва: Физматгиз, 1961. – 542 с.
9. Логвинович Г. В. Гидродинамика течений со свободными границами. – Киев: Наук. думка, 1969. – 215 с.
10. Логвинович Г. В. Некоторые вопросы глассирования // Тр. ЦАГИ. – 1980. – Вып. 2052. – С. 3–12.
11. Морс Ф., Фешбах Г. Методы теоретической физики: В 2 т. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1958. – 960 с. – Т. 1.
12. Савченко Ю. Н., Власенко Ю. Д., Семенов В. Н. Экспериментальные исследования высокоскоростных кавитационных течений // Гидромеханика. – 1998. – Вып. 72. – С. 103–111.
13. Савченко Ю. Н., Семенов В. Н., Путилин С. И. Нестационарные процессы при суперкавитационном движении тел // Прикл. гідромеханіка. – 1999. – № 1. – С. 78–97.
14. Савченко Ю. Н., Семенов В. Н., Серебряков В. В. Экспериментальное исследование развитых кавитационных течений при дозвуковых скоростях обтекания // Докл. АН Украины. – 1993. – № 2. – С. 64–69.
15. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. – Москва: Наука, 1979. – 832 с.
16. Hrubec J. D. High-speed imaging of supercavitating underwater projectiles // Experiments in Fluids. – 2001. – 30. – P. 57–64.
17. Kirschner I. N. Supercavitating projectiles experiments at supersonic speeds // Abstract published in the Proceeding of the NATO/AGARD Fluid Dynamics Panel Workshop on High-Speed Body Motion in Water, AGARD Report 827, Kiev, Ukraine, 1997.
18. Paryshev E. V. Mathematical modeling of unsteady cavity flows // 5<sup>th</sup> Int. Symp. on Cavitation (CAV'2003), Osaka, Japan, 2003. – P. 1–18.
19. Savchenko Yu. N., Semenenko V. N., Putilin S. I., Savchenko G. Yu., Naumova Ye. I. Designing the high-speed supercavitating vehicles // 8<sup>th</sup> Int. Conf. Fast Sea Transportation (FAST'2005), Saint Petersburg, Russia (27–30 June 2005).

#### **ПЛОСКАЯ СИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА ОБ УДАРЕ ТВЕРДОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ТЕЛА ПО ПОВЕРХНОСТИ КАВЕРНЫ ПРИ СУПЕРКАВИТАЦИОННОМ ОБТЕКАНИИ**

*Исследуется процесс ударного взаимодействия твердого цилиндрического тела с поверхностью цилиндрической полости в сжимаемой жидкости. Решение сформулированной смешанной нестационарной краевой задачи с подвижной границей сводится к совместному решению бесконечной системы линейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода и дифференциального уравнения движения тела. Получены гидродинамические и кинематические характеристики процесса.*

#### **PLANE SYMMETRIC PROBLEM ABOUT IMPACT OF SOLID CYLINDRICAL BODY ON SURFACE OF CAVITY UNDER SUPERCAVITATION FLOW**

*The paper deals with the early stage of a solid cylindrical body impact on the surface of cylindrical cavity in compressible fluid. The solution of the stated mixed non-stationary boundary-value problem with movable boundary is reduced to joint solving the infinite system of linear integral Volterra second-order equations and differential equation of the body movement. The hydrodynamic and kinematic characteristics are obtained.*

Ин-т механіки ім. С. П. Тимошенка  
НАН України, Київ

Одержано  
23.12.06