УДК 532.59

И. Т. Селезов[1], О. В. Авраменко[1], Ю. В. Гуртовый[2]

РАСПРОСТРАНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛНОВЫХ ПАКЕТОВ ПРИ ОКОЛОКРИТИЧЕСКИХ ВОЛНОВЫХ ЧИСЛАХ В ДВУХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ

Исследуется нелинейная задача о распространении волновых пакетов на поверхности раздела двух жидких слоев с учетом сил поверхностного натяжения. Анализ проводится асимптотическим методом многомасштабных разложений до третьего приближения. На этой основе выведено нелинейное эволюционное уравнение типа Шредингера для случая малых частот, что соответствует околокритическим волновым числам. Получены выражения для отклонения поверхности раздела и для критического волнового числа в зависимости от характерных параметров задачи.

Введение. Исследование нелинейных волновых процессов в многослойных и стратифицированных средах представляет большой общефизический и прикладной интерес и является предметом многочисленных исследований. Большие трудности математического характера при решении задач теории волн приводят к необходимости развития различного рода приближенных подходов. В результате получили интенсивное приложение асимптотические методы, и они, по существу, доминируют в проведении количественного и качественного анализа явлений. Развиты различные варианты асимптотических подходов Буссинеска, Кортевега – де Фриза, Фридрихса, Захарова и др.

Основные тенденции проблемы нелинейного распространения волновых пакетов на поверхности жидкости и вдоль поверхности раздела жидких сред отражены в фундаментальных работах [5, 11]. В работе [35] дан обзор состояния исследований нелинейных безвихревых поверхностных гравитационных волн в жидкости бесконечной глубины. Общие положения и подходы к физико-математическому моделированию и решению нелинейных волновых задач изложены в [6]. Исследование установившихся волн при решении нелинейных задач предоставляет возможность получить важные результаты о существовании двумерных периодических прогрессивных волн [4]. В точной теории неустановившихся волновых движений получены результаты, относящиеся к реализации картин волновых движений для малых или больших значений времени, которые всесторонне освещены в монографии [5].

Метод многомасштабних разложений был успешно применен Г. Хасимото и Г. Оно [22] для получения нелинейного уравнения Шредингера, описывающего эволюцию гравитационных волновых пакетов конечной амплитуды на поверхности жидкого слоя. Отметим некоторые из работ, внесших существенный вклад в изучение указанной проблемы: Г. Сегур и Дж. Хаммак [26], Г. Йен и Б. Лейк [36], М. Абловиц и Г. Сегур [12], П. Бхатнагар [15], Г. Ламб [24], И. Т. Селезов и С. В. Корсунский [32], И. Т. Селезов и П. Хук [31].

Значительное количество публикаций посвящено распространению волновых пакетов в жидких средах с учетом поверхностного натяжения, например, [16, 20, 21]. При рассмотрении больших волн в океане в некоторых случаях поверхностным натяжением можно пренебречь, однако для экспериментальных исследований двухслойных систем в лабораторных условиях фактор поверхностного натяжения играет значительную роль. Различные аспекты проблемы нелинейных внутренних волн освещены в работах [14, 17–19, 23, 33, 34].

В работе [25] представлен обстоятельный анализ волновых движений на поверхности раздела двух полубесконечных жидкостей с учетом поверхностного натяжения. Аналогичная задача о распространении волновых пакетов на поверхности раздела жидкого полупространства и жидкого слоя над ним изучалась в [13], где обсуждалась проблема устойчивости волновых пакетов в системе «слой – полупространство» методом многомасштабных разложений до третьего порядка, а также в [7] для случая малых частот.

В статьях, опубликованных в последнее время, рассмотрены различные аспекты четвертого приближения проблемы эволюции нелинейных волновых пакетов. Среди них такие, как эволюционное уравнение при околокритических волновых числах [8, 27], эволюционное уравнение при волновых числах, далеких от критического [9, 29, 30], исследование устойчивости решений указанных уравнений [2, 28]. Области резонанса второй гармоники, направление распространения волн, форма волнового пакета в системе «слой – полупространство» описаны в статье [1]. Особенности волновых пакетов в двухслойной жидкости были рассмотрены в статье [10], где выведено эволюционное уравнение для больших значений частоты.

В настоящей работе выведено эволюционное уравнение в третьем приближении для задачи распространения волновых пакетов вдоль поверхности раздела двух жидких слоев с учетом поверхностного натяжения. В отличие от предыдущих исследований, относящихся к волновым числам, далеким от критического, здесь рассматривается случай околокритических волновых чисел.

1. Постановка задачи. Рассмотрим гидродинамическую систему, состоящую из нижнего жидкого слоя $\Omega_1 = \{(x, y, z),\ -\infty < x < \infty,\ -\infty < y < \infty,\ -h_1 \le z \le 0)\}$ с плотностью ρ_1 и расположенного над ней другого жидкого слоя $\Omega_2 = \{(x, y, z),\ -\infty < x < \infty,\ -\infty < y < \infty,\ 0 < z < h_2)\}$ с плотностью ρ_2, которые разделены поверхностью контакта $z = \eta(x, t)$. Математическая постановка задачи о распространении волновых пакетов вдоль поверхности $z = 0$ двух жидких слоев с толщинами h_1 и h_2 имеет вид

$$\nabla^2\varphi_j = 0 \qquad \text{в} \qquad \Omega_j, \qquad j = 1, 2, \tag{1}$$

$$\eta_{,t} - \varphi_{j,z} = -\varphi_{j,x}\eta_{,x} \qquad \text{на} \qquad z = \eta(x, t), \tag{2}$$

$$\varphi_{1,t} - \rho\,\varphi_{2,t} + (1-\rho)\eta + 0.5(\nabla\varphi_1)^2 - 0.5\rho(\nabla\varphi_2)^2 - (1+\eta_{,x}^2)^{-3/2}\eta_{,xx} = 0$$
$$\text{на} \qquad z = \eta(x, t), \tag{3}$$

$$\varphi_{1,z} = 0 \qquad \text{при} \qquad z = -h_1, \tag{4}$$

$$\varphi_{2,z} = 0 \qquad \text{при} \qquad z = h_2, \tag{5}$$

где φ_j, $j = 1, 2$, – потенциалы скоростей в жидких средах; $\rho = \rho_2/\rho_1$ – отношение плотностей. В задаче (1)–(5) безразмерные переменные введены на основе плотности нижней жидкой среды ρ_1, характерной длины $T/(\rho_1 g)$ и характерного времени $(L/g)^{1/2}$, где g – ускорение свободного падения, T – поверхностное натяжение.

Для построения приближенных решений задачи (1)–(5) применяется метод многомасштабных разложений [3] по малому безразмерному параметру ε, определяющему различные масштабы $x_n = \varepsilon^n x$, $t_n = \varepsilon^n t$:

$$\eta(x, t) = \sum_{n=1}^{3} \varepsilon^n \eta_n(x_0, x_1, x_2, x_3, t_0, t_1, t_2, t_3) + O(\varepsilon^4), \tag{6}$$

$$\varphi_j(x, z, t) = \sum_{n=1}^{3} \varepsilon^n \varphi_{jn}(x_0, x_1, x_2, x_3, z, t_0, t_1, t_2, t_3) + O(\varepsilon^4), \quad j = 1, 2. \tag{7}$$

Первые три линейные задачи исследованы в статье [10], где получено эволюционное уравнение в третьем приближении при волновых числах, далеких от критического. Здесь приведем некоторые результаты, полученные ранее:

– *дисперсионное соотношение*

$$\omega^2 = (\coth kh_1 + \rho \coth kh_2)^{-1}(1 - \rho + Tk^2)\, k\,; \tag{8}$$

– *решения в первом приближении*

$$\eta_1 = A \exp i\theta + \bar{A} \exp(-i\theta),$$

$$\varphi_{11} = -i\omega k^{-1}\left[A \exp i\theta - \bar{A} \exp(-i\theta)\right] \frac{\cosh k(h_1 + z)}{\sinh kh_1},$$

$$\varphi_{21} = -i\omega k^{-1}\left[A \exp i\theta - \bar{A} \exp(-i\theta)\right] \frac{\cosh k(h_2 - z)}{\sinh kh_2}; \tag{9}$$

– *условие разрешимости линейной задачи второго приближения*

$$2(\coth kh_1 + \rho \coth kh_2)\, \omega k^{-1} A_{,t_1} + \{2Tk + \omega^2 k^{-2}[\coth kh_1 - kh_1(1 - \\ - \coth^2 kh_1) + \rho[\coth kh_2 - kh_2(1 - \coth^2 kh_2)]]\} A_{,x_1} = 0\,; \tag{10}$$

– *решения во втором приближении*

$$\eta_2 = \frac{\omega^2\left[1 - \coth^2 kh_1 - \rho(1 - \coth^2 kh_2)\right]}{1 - \rho} A\bar{A} + \Lambda A^2 \exp 2i\theta + \mathrm{cc}\,, \tag{11}$$

$$\varphi_{12} = k^{-1}\Bigg[\left[A_{,t_1} + \omega k^{-1}(1 + kh_1 \coth kh_1) A_{,x_1}\right] \frac{\cosh k(h_1 + z)}{\sinh kh_1} - \\ - \omega(z + h_1) A_{,x_1} \frac{\sinh k(h_1 + z)}{\sinh kh_1}\Bigg] \exp i\theta + i\omega k^{-1}(k \coth kh_1 - \\ - \Lambda) A^2 \frac{\cosh 2k(h_1 - z)}{\sinh 2kh_1} \exp 2i\theta + \mathrm{cc}\,,$$

$$\varphi_{22} = -k^{-1}\Bigg[\left[A_{,t_1} + \omega k^{-1}(1 + kh_2 \coth kh_1) A_{,x_1}\right] \frac{\cosh k(h_2 - z)}{\sinh kh_2} - \\ - \omega(z - h_2) A_{,x_1} \frac{\sinh k(h_2 - z)}{\sinh kh_2}\Bigg] \exp i\theta + i\omega k^{-1}(\Lambda + \\ + k \coth kh_2) A^2 \frac{\cosh 2k(h_2 - z)}{\sinh 2kh_2} \exp 2i\theta + \mathrm{cc}\,,$$

где

$$\Lambda = \frac{\omega^2\left[1.5\coth^2 kh_1 - 0.5 - \rho\left(1.5\coth^2 kh_2 - 0.5\right)\right]}{2\omega^2(\coth 2kh_1 + \rho\, \coth 2kh_2) - k(1 - \rho + 4Tk^2)}\,;$$

– *условие разрешимости линейной задачи третьего приближения*

$$A_{,t_2} + \omega' A_{,x_2} - 0.5\omega'' A_{,x_1x_1} = -ik\omega^{-1}(\coth kh_1 + \rho \coth kh_2)^{-1} I A^2 \bar{A}\,, \tag{12}$$

где

$$I = \Lambda\omega^2\left[3\coth^2 kh_1 - 1 - \rho(3\coth^2 kh_2 - 1)\right] + 2k\omega^2\left[2\coth kh_1 - \\ - \coth^3 kh_1 + \rho\left(2\coth kh_2 - \coth^3 kh_2\right)\right] - 1.5Tk^4 - \\ - \omega^4(1 - \rho)^{-1}\left[1 - \coth^2 kh_1 - \rho\left(1 - \coth^2 kh_2\right)\right]^2.$$

Здесь $\theta = kx_0 - \omega t_0$; k и ω – волновое число и круговая частота центра волнового пакета; A и $\bar{A}$ – огибающая волнового пакета и ее комплексно-сопряженная величина; символом «cc» обозначена величина, комплексно-сопряженная всему выражению, стоящему перед ней. Условия разрешимости (10) и (12) представлены для случая волновых чисел, далеких от критического $k_c = \left(\frac{\rho - 1}{T}\right)^{1/2}$, что соответствует большим частотам $\omega \to \infty$.

2. Эволюционное уравнение для нелинейных волновых пакетов при околокритических волновых числах. Рассмотрим случай, когда $\omega \to 0$. Продифференцировав соотношение (8) по k, получим

$$\omega' = \frac{1}{2\omega(\coth kh_1 + \rho\coth kh_2)}\left\{ 2Tk^2 + \frac{\omega^2}{k}\left[\coth kh_1 - kh_1(1 - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \coth^2 kh_1) + \rho[\coth kh_2 - kh_2(1 - \coth^2 kh_2)]\right]\right\}. \quad (13)$$

Из соотношения (13) следует, что при волновых числах, близких к критическому, $\omega' \to \infty$. Таким образом, уравнения (10) и (12) не имеют смысла в этом предельном случае.

Преобразуем эти уравнения так, чтобы они имели смысл при критическом значении волнового числа. Для этого найдем производную $k' = \dfrac{dk}{d\omega}$:

$$k' = \frac{1}{\omega'} = \left[2\omega(\coth kh_1 + \rho\coth kh_2)\right]\left(2Tk^2 + \frac{\omega^2}{k}\left[\coth kh_1 - \right.\right.$$

$$\left.\left. - kh_1(1 - \coth^2 kh_1) + \rho[\coth kh_2 - kh_2(1 - \coth^2 kh_2)]\right]\right)^{-1}. \quad (14)$$

В дальнейшем на основе условия разрешимости второго линейного приближения (10) и соотношения (14) представим производную $\dfrac{\partial A}{\partial x_1}$ через $\dfrac{\partial A}{\partial t_1}$ в виде

$$A_{,x_1} = -k' A_{,t_1}. \quad (15)$$

Продифференцировав (15), получим $A_{,x_1x_1} = -k' A_{,t_1x_1}$ и $A_{,x_1t_1} = -k' A_{,t_1t_1}$. После исключения $A_{,x_1t_1}$ приходим к следующему соотношению:

$$A_{,x_1x_1} = k'^2 A_{,t_1t_1}. \quad (16)$$

Учитывая (16) и то, что $\omega'' = -k''/k'^3$, эволюционное уравнение (12) перепишем в виде

$$A_{,x_2} + k' A_{,t_2} + 0.5k'' A_{,t_1t_1} = -ik\omega^{-1}(\coth kh_1 + \rho\coth kh_2)^{-1}\hat{I}A^2\bar{A}, \quad (17)$$

где

$$\hat{I} = k'I = \left[2\omega(\coth kh_1 + \rho\coth kh_2)I\right]\left(2Tk^2 + \frac{\omega^2}{k}\left[\coth kh_1 - \right.\right.$$

$$\left.\left. - kh_1(1 - \coth^2 kh_1) + \rho[\coth kh_2 - kh_2(1 - \coth^2 kh_2)]\right]\right)^{-1}.$$

Перейдем к обычным координатам на основе соотношений $x_n = \varepsilon^n x$, $t_n = \varepsilon^n t$, в результате получим искомое эволюционное уравнение

$$A_{,x} + k' A_{t} + 0.5k'' A_{,tt} = -ik\omega^{-1}\varepsilon^2(\coth kh_1 + \rho\coth kh_2)^{-1}\hat{I}A^2\bar{A}. \quad (18)$$

Переобозначим коэффициент в уравнении (18):

$$\hat{I}_0 = -\frac{k\hat{I}}{8\omega(\coth kh_1 + \rho\coth kh_2)},$$

тогда уравнение (18) преобразуется к виду

$$A_{,x} + k' A_{t} + 0.5k'' A_{,tt} = -8i\varepsilon^2\hat{I}_0 A^2\bar{A}. \quad (19)$$

Таким образом, получено нелинейное эволюционное уравнение (19). Для этого уравнения существует решение по временной переменной

$$A = 0.5a\exp(i\sigma t + \text{const}), \quad (20)$$

где a − постоянная, а σ − решение уравнения, которое получается подстановкой (20) в (19):

$$0.5ak''\sigma^2 - k'\sigma + 2\varepsilon^2 \hat{I}_0 a^2 = 0\,. \qquad (21)$$

Отсюда следует, что

$$\sigma = \frac{k' \pm (k' - 4k''\varepsilon^2 \hat{I}_0 a^2)^{1/2}}{k''}\,. \qquad (22)$$

Если $\omega \to 0$, тогда получим, что

$$k' \to \frac{\omega(\coth kh_1 + \rho \coth kh_2)}{Tk^2}\,, \qquad k'' \to \frac{\coth kh_1 + \rho \coth kh_2}{Tk^2}\,,$$

$$\hat{I}_0 \to \frac{3}{32}k^3\,. \qquad (23)$$

Подстановка (23) в (22) приводит к выражению

$$\sigma = \omega \pm \left(\omega^2 - \frac{3\varepsilon^2 a^2 k^5 T}{8(\coth kh_1 + \rho \coth kh_2)}\right)^{1/2}. \qquad (24)$$

Подставим одно из решений (24) в (20), а после этого в выражение (6) для двух слагаемых отклонения поверхности раздела двух жидких слоев η_1 и η_2, представленных формулами (9) и (11). В результате получаем

$$\eta(x,t) = \varepsilon a \cos(kx - \hat{\omega}t) + \varepsilon^2 a^2 \left[\frac{\omega^2[1 - \coth^2 kh_1 - \rho(1 - \coth^2 kh_2)]}{1-\rho} + \right.$$

$$\left. + 0.5\Lambda \cos(kx - \hat{\omega}t)\right] + O(\varepsilon^3)\,,$$

где

$$\hat{\omega} = -\left(\omega^2 - \frac{3\varepsilon^2 a^2 k^5 T}{8(\coth kh_1 + \rho \coth kh_2)}\right)^{1/2}. \qquad (25)$$

Частота $\hat{\omega}$ является действительной величиной, если

$$\omega^2 \geq \frac{3\varepsilon^2 a^2 k^5 T}{8(\coth kh_1 + \rho \coth kh_2)}\,,$$

то есть критическое волновое число отвечает равенству $\hat{\omega} = 0$, или же

$$\omega^2 = \frac{3\varepsilon^2 a^2 k^5 T}{8(\coth kh_1 + \rho \coth kh_2)}\,. \qquad (26)$$

Подстановка выражения (26) в дисперсионное соотношение (8) дает соотношение между волновым числом k и малым параметром ε:

$$\frac{3}{8}a^2\varepsilon^2 k^4 - k^2 + \frac{1}{T}(\rho - 1) = 0\,,$$

откуда следует формула для волнового числа

$$k = \left(4\,\frac{1 \pm \sqrt{1 - \dfrac{3}{2T}\varepsilon^2 a^2(\rho - 1)}}{3a^2\varepsilon^2}\right)^{1/2}. \qquad (27)$$

Из (27) можно получить разложение волнового числа k по малому параметру ε:

$$k = \left(\frac{\rho - 1}{T}\right)^{1/2}\left(1 + \frac{3}{16T}(\rho-1)a^2\varepsilon^2 + \frac{63}{512\,T^2}(\rho-1)^2 a^4\varepsilon^4 - \right.$$

$$\left. - \frac{189}{8189\,T^3}(\rho-1)^3 a^6\varepsilon^6 - \frac{1701}{524288\,T^4}(\rho-1)^4 a^8\varepsilon^8\right) + O(\varepsilon^{10})\,. \qquad (28)$$

Формула (28) позволяет вычислить с заданной точностью величину волнового числа в зависимости от характерных параметров задачи.

Заключение. В статье рассмотрена нелинейная задача о распространении волновых пакетов на поверхности раздела двух жидких слоев на основе асимптотического метода многомасштабных разложений до третьего порядка. Рассмотрен случай околокритических волновых чисел. Из дисперсионного соотношения и условий разрешимости второго и третьего порядков получено эволюционное уравнение типа уравнения Шредингера, содержащее одну производную по пространственной координате и две по времени. Это уравнение описывает эволюцию волнового пакета для всех волновых чисел: как равных критическому волновому числу, так и больших, чем критическое. Получены выражение для волнового числа, а также формула для его приближенного вычисления.

1. *Авраменко О. В.* Резонанс и форма волнового пакета на поверхности контакта жидких сред // Вісн. Харків. нац. ун-ту. Сер. Математика, прикл. математика і механіка. – 2001. – Вип. 50. – С. 122–128.
2. *Авраменко О. В., Селезов И. Т.* Устойчивость волновых пакетов в слоистых гидродинамических системах с учетом поверхностного натяжения // Прикл. гидромеханика. – 2001. – № 4. – С. 38–46.
3. *Найфэ А. Х.* Методы возмущений. – Москва: Мир, 1976. – 455 с.
4. *Некрасов А. И.* Точная теория установившихся волн на поверхности тяжелой жидкости. – Москва: Изд-во АН СССР, 1951. – 96 с.
5. *Овсянников В. Л., Макаренко Н. И., Налимов В. И.* Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн. – Новосибирск: Наука, 1985. – 318 с.
6. *Селезов И. Т.* Моделирование волновых и дифракционных процессов в сплошных средах. – Киев: Наук. думка, 1989. – 204 с.
7. *Селезов И. Т., Авраменко О. В.* Нелинейное распространение волновых пакетов при малых частотах // Теорет. и прикл. механика. – 2000. – Вып. 31. – С. 151–157.
8. *Селезов И. Т., Авраменко О. В.* Эволюционное уравнение третьего порядка для нелинейных волновых пакетов при околокритических волновых числах // Динам. системы. – 2001. – Вып. 17. – С. 58–67.
9. *Селезов И. Т., Авраменко О. В.* Эволюция нелинейных волновых пакетов с учетом поверхностного натяжения на поверхности контакта // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – **44**, № 2. – С. 113–122.
10. *Селезов И. Т., Авраменко О. В., Гуртовый Ю. В.* Особенности распространения волновых пакетов в двухслойной гидродинамической системе // Прикл. гідромеханіка. – 2005. **– 7(79),** № 1. – С. 80–89.
11. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. – Москва: Мир, 1977. – 622 с.
12. *Ablowitz M. J., Segur H.* Solitons and the inverse scattering transform. – Philadelphia: SIAM, 1981. – 210 p.
13. *Avramenko O. V., Selezov I. T.* Nonlinear wave propagation in a fluid layer based on semi-infinite fluid // Доп. НАН України. – 1997. – № 10. – С. 61–66.
14. *Baker G. R., Meiron D. I., Orszag S. A.* Generalized vortex methods for free-surface flow problems // J. Fluid Mech. – 1982. – **123**. – P. 477–501.
15. *Bhatnagar P. L.* Nonlinear waves in one-dimensional dispersive systems. – Oxford: Clarendon Press, 1979. – 199 p.
16. *Bontozoglou V.* Weakly nonlinear Kelvin–Helmholz waters between fluids of finite depth // Int. J. Multiphase Flow. – 1991. – **17**, No 4. – P. 509–518.
17. *Bourtos Y. Z., AЫ-el-Malex M. B., Tewfick A. H.* A formal expansion procedure for the internal solitary wave problem in a two-fluid system of constant topography // Acta Mechanica. – 1991. – **88**. – P. 172–197.
18. *Chen Y., Liu P. L.-F.* The unified Kadomtsev – Petviashvily equation for interfacial waves // J. Fluid Mech. – 1995. – **228**. – P. 383–408.
19. *Choi W., Camassa R.* Weakly nonlinear internal waves in a two-fluid system // J. Fluid Mech. – 1996. – **313.** – P. 83–103.
20. *Dias F., Kharif Ch.* Nonlinear gravity and capillary-gravity waves. Part 7. Importance of surface tensioneffects // Annu. Rev. Fluid Mech. – 1999. – **31**. – P. 301–346.
21. *Duncan J. H.* Spilling breakers // Annu. Rev. Fluid Mech. – 2001. – **33**. – P. 519–547.
22. *Hasimoto H., Ono H.* Nonlinear modulation of gravity waves // J. Phys. Soc. Japan. – 1972. – **33**. – P. 805–811.

23. *Ioualalen M., Kharif C., Roberts A. J.* Stability regimes of finite depth short-crested water waves // J. Phys. Oceanography. – 1999. – **29,** No. 9. – P. 2318–2331.
24. *Lamb G. L.* Elements of soliton theory. – New York: J. Wiley & Sons, 1980. – 289 p.
25. *Nayfeh A.* Nonlinear propagation of wave-packets on fluid interface // Trans. ASME J. Appl. Mech. Ser. E. – 1976. – **43**, No 4. – P. 584–588.
26. *Segur H., Hammack J. L.* Soliton models of long internal waves // J. Fluid Mech. – 1982. – **118**. – P. 285–304.
27. *Selezov I., Avramenko O.* Some features of nonlinear wave trains propagating in two-layer fluid // The 26 General Assembly of the European Geophys. Soc. (Nice, France, March 25–30, 2001): Geophys. Research Abstracts. – 2001. – **3**. – P. 8102.
28. *Selezov I., Avramenko O.* Stability analysis of nonlinear wave trains propagating in two-fluid system // Int. Conf. «Dynamical Systems Modeling and Stability Investigation» (Kiev, May 22–25, 2001): Abstracts. – Kiev, 2001. – P. 356.
29. *Selezov I., Avramenko O., Kharif C., Trulsen K.* Higher asymptotic approximations for nonlinear internal waves in fluids // Нелинейные граничные задачи – 2003. – **13**. – С. 141–148.
30. *Selezov I., Avramenko O., Mironchuk M., Morozova L.* On application of the potential theory in the problems of surface gravity waves // Ukr. Math. Congress: Abstracts Int. Conf. Complex Analysis and Potential Theory (Kiev, 7–12 Aug. 2001). – Kiev, 2001. – P. 50–51.
31. *Selezov I. T., Huq P.* Interfacial solitary waves in a three-fluid medium with sourth // 2nd Europ. Fluid Mech. Conf. (Warsaw, 20–24 Sept., 1994): Abstr. Papers. – Warsaw, 1994. – P. 250.
32. *Selezov I. T., Korsunsky S. V.* Wave propagation along the interface between the liquid metal and electrolyte // Proc. Int. Conf. «MHD Processes to Protection of Environment». – Kiev–Odessa, 1992. – Part 1. – P. 111–117.
33. *Stamp A. P., Jacka M.* Deep-water internal solitary waves // J. Fluid Mech. – 1995. – **305**. – P. 347–371.
34. *Trulsen K.* Wave kinematics computed with the nonlinear Schroedinger method for deep water // Trans. ASME. J. Offshore Mech. and Arctic Eng. – 1999. – **121,** No. 2. – P. 126–130.
35. *Yuen H. C.* Recent advances in nonlinear water waves. An overview // Nonlinear Topics in Ocean Phys.: Proc. Int. School of Physics «Enrico Fermi», Course CIX (Varenna, 26 July–5 Aug., 1988). – Amsterdam etc.: North-Holland, 1991. – P. 461–498.
36. *Yuen H. C., Lake B. M.* Nonlinear dynamics of deep-water gravity waves // Advances in Appl. Mech. – 1982. – **22**. – P. 67–229.

ПОШИРЕННЯ НЕЛІНІЙНИХ ХВИЛЬОВИХ ПАКЕТІВ ПРИ БІЛЯКРИТИЧНИХ ХВИЛЬОВИХ ЧИСЛАХ У ДВОШАРОВІЙ РІДИНІ СКІНЧЕННОЇ ГЛИБИНИ

Розглянуто нелінійну задачу про поширення хвильових пакетів на поверхні поділу двох рідких шарів з урахуванням сил поверхневого натягу. Дослідження проведено асимптотичним методом багатомасштабних розкладів до третього наближення. На основі цього виведено нелінійне еволюційне рівняння типу Шредингера для випадку малих частот, що відповідає білякритичним хвильовим числам. Одержано залежності для відхилення поверхні поділу та для критичного хвильового числа від характерних параметрів задачі.

PROPAGATION OF NON-LINEAR WAVE-PACKETS AT NEAR-CRITICAL WAVE NUMBERS IN TWO-LAYER FLUID OF FINITE DEPTH

The non-linear problem of wave-packet propagation at the interface of two fluid layers with taking into account the surface tension forces is investigated. The analysis is conducted by the asymptotic method of multiple scale expansions up to the third approximation. On this basis the nonlinear evolution equation of Schrёdinger type is derived for the case of small frequencies that corresponds to near-critical wave numbers. The expressions for the interface elevation and for the critical wave number depending on characteristic parameters of the problem are obtained.

[1] Ин-т гидромеханики НАН Украины, Киев,
[2] Гос. пед. ун-т, Кировоград

Получено
20.09.06