

ПРО ВПЛИВ ПРУЖНОЇ ОСНОВИ НА ПОШИРЕННЯ ГАРМОНІЧНИХ ХВИЛЬ В ОРТОТРОПНІЙ ЦИЛІНДРИЧНІЙ ОБОЛОНЦІ

На основі теорії оболонок типу Тимошенка отримано рівняння для дослідження осесиметричних полів деформацій в ортотропній циліндричній оболонці на пружній основі Пастернака. Побудовано дисперсійне рівняння, яке дозволяє вивчати рух власних гармонічних хвиль в ортотропній циліндричній оболонці залежно від властивостей пружної основи. Знайдені значення швидкостей хвиль за допомогою запропонованого чисельного методу для побудови дисперсійних діаграм співпадають з аналітичними розв'язками, що підтверджує достовірність отриманих результатів.

Вступ. Технічний прогрес у сучасній техніці значною мірою залежить від фундаментальних досліджень процесів взаємодії різних конструкційних елементів з середовищем. Так, циліндричні оболонки як конструкційні елементи знаходять широке застосування у техніці, тому вивченню їх динамічної поведінки приділяється значна увага [1, 3, 6]. Багато ділянок магістральних трубопроводів, обсадні труби геотехнологічних свердловин, резервуари – це конструкції, що складаються з ортотропних циліндричних оболонок, які знаходяться у контакті з оточуючим породним масивом. Вимагають розв'язання задачі про дослідження динаміки циліндричних оболонок з природною чи конструкційною ортотропією на пружній основі під дією внутрішнього рухомого поля тиску, що виникає при роботі компресорів у системі трубопроводів або при проведенні в геотехнологічних свердловинах вибухово-прострільних робіт. У більшості праць, присвячених дослідженню дії рухомих навантажень на циліндричні оболонки [1, 6, 11], використовувалась технічна теорія оболонок, яка має достатньо обмежену область застосування. У роботі [3] застосовано теорію оболонок типу Тимошенка. Але проведені спрощення у системі рівнянь дозволили визначити тільки дві критичні швидкості рухомих навантажень. Коливання циліндричних оболонок з урахуванням лінійних і кутових поперечних деформацій досліджено в статті [7]. Досить важливо буває проаналізувати вплив властивостей простору, що містить оболонку, на поширення гармонічних хвиль в оболонці. Динамічну поведінку оболонки досліджуємо на основі теорії оболонок типу Тимошенка, яка має перевагу порівняно з класичною теорією оболонок, що зумовлено врахуванням деформації зсуву та інерції повороту перетину.

Використання моделі основи з двома параметрами дозволяє усунути головний недолік моделі Вінклера та врахувати розподільну властивість пружної основи, а з іншого боку, дає можливість отримати аналітичний розв'язок задачі.

Нижче, дотримуючись методики, яка розроблена в [9], дослідимо поширення осесиметричних гармонічних хвиль в ортотропній циліндричній оболонці на двопараметричній пружній основі.

1. Рівняння динаміки циліндричної оболонки. Оскільки в розглядуваному випадку конструкція ортотропної циліндричної оболонки, що знаходиться в ізотропному пружному масиві, і задане навантаження що діє на неї є осесиметричними, то осесиметричним виявляється і поле пружних хвиль, що поширюються. Для дослідження таких полів будемо застосовувати теорію циліндричних оболонок в осесиметричній постановці.

Нехай x – координата, напрямлена вздовж твірної оболонки; \mathbf{n} – внутрішня нормаль до її поверхні; u, w – компоненти вектора переміщень, спрямовані вздовж осі Ox і нормалі \mathbf{n} відповідно; p_n – інтенсивність зовнішнього навантаження, що діє на оболонку вздовж нормалі \mathbf{n} . Тоді рів-

няння руху елемента ортотропної циліндричної оболонки на пружній основі можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial N_1}{\partial x} &= 0, & \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{N_2}{R} &= p_n - C_1 w + C_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\ \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - Q + \frac{\partial M}{\partial x} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

де ρ – густина матеріалу оболонки; h – її товщина; N_1, N_2 – внутрішні зусилля в оболонці в поздовжньому та коловому напрямках; Q – перерізувача сила в перетині $x = \text{const}$; M – згинний момент у тому ж перетині; ψ – кут повороту перетину; t – час; C_1, C_2 – коефіцієнти основи Пастернака.

Сили N_1, N_2 , що входять у цей вираз, обчислюють за формулами

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{E_1 h}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} (\varepsilon_1 + \nu_{21} \varepsilon_2) = \frac{E_1 h}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \nu_{21} \frac{w}{R} \right), \\ N_2 &= \frac{E_2 h}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} (\varepsilon_2 + \nu_{12} \varepsilon_1) = \frac{E_2 h}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} \left(-\frac{w}{R} + \nu_{12} \frac{\partial u}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (2)$$

де E_1 – модуль пружності матеріалу оболонки в напрямку твірної; E_2 – модуль пружності в коловому напрямку; ν_{12}, ν_{21} – коефіцієнти Пуассона; $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – відносні деформації серединної поверхні оболонки у відповідних напрямках.

Для осесиметричної постановки задачі маємо

$$M = -\frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})} \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad Q = \mu^2 G_{13} h \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right), \quad (3)$$

де G_{13} – модуль зсуву; μ^2 – коефіцієнт зсуву (використовуваний у теорії Тимошенка).

Підставляючи (3) у другу з рівностей (1), отримуємо

$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \mu^2 G_{13} h \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \frac{N_2}{R} = p_n - C_1 w + C_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (4)$$

звідки

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{p_n}{\mu^2 G_{13} h} - \frac{\rho}{\mu^2 G_{13}} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \left(1 + \frac{C_2}{\mu^2 G_{13} h} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{N_2}{R \mu^2 G_{13} h} - \frac{C_1 w}{\mu^2 G_{13} h}. \quad (5)$$

За допомогою цього виразу виключаємо $\partial \psi / \partial x$ з правої частини першої з рівностей (3):

$$\begin{aligned} M &= -\frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})} \left[\frac{p_n}{\mu^2 G_{13} h} - \frac{\rho}{\mu^2 G_{13}} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \left(1 + \frac{C_2}{\mu^2 G_{13} h} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{N_2}{R \mu^2 G_{13} h} - \frac{C_1 w}{\mu^2 G_{13} h} \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

З третього рівняння (1) знаходимо

$$Q = \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \frac{\partial M}{\partial x}.$$

Підставляючи Q у другу з рівностей (1), отримуємо

$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^3 \psi}{\partial t^2 \partial x} - \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} - \frac{N_2}{R} = p_n - C_1 w + C_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (7)$$

Записавши рівняння (1) у розгорнутому вигляді та врахувавши в (7) рівності (5) і (6), отримаємо систему двох рівнянь із частинними похідними відносно двох шуканих функцій u і w :

$$\begin{aligned}
\rho \ddot{u} - \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \left(u'' - \frac{\nu_{21}}{R} w' \right) &= 0, \\
\frac{\rho^2 h^3}{12\mu^2 G_{13}} \ddot{w} + \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_{12}\nu_{21})} \left(1 + \frac{C_2}{\mu^2 G_{13} h} \right) w^{IV} - \frac{\rho h^3}{12} \left(1 + \frac{C_2}{\mu^2 G_{13} h} + \right. \\
&+ \left. \frac{E_1}{\mu^2 G_{13} (1 - \nu_{12}\nu_{21})} \right) \ddot{w}'' + \rho h \left(1 + \frac{C_1 h}{12\mu^2 G_{13}} + \frac{E_2 h^2}{12\mu^2 G_{13} R^2 (1 - \nu_{12}\nu_{21})} \right) \ddot{w} - \\
&- \left(C_2 + \frac{C_1 E_1 h^2}{12\mu^2 G_{13} (1 - \nu_{12}\nu_{21})} + \frac{E_1 E_2 h^3}{12\mu^2 G_{13} R^2 (1 - \nu_{12}\nu_{21})^2} \right) w'' + \\
&+ \left(C_1 + \frac{E_2 h}{R^2 (1 - \nu_{12}\nu_{21})} \right) w + \frac{E_1 E_2 h^3 \nu_{12} u'''}{12(1 - \nu_{12}\nu_{21})^2 \mu^2 G_{13} R} - \\
&- \frac{E_2 \rho h^3 \nu_{12} \dot{u}'}{12(1 - \nu_{12}\nu_{21}) \mu^2 G_{13} R} - \frac{E_2 h \nu_{12} u'}{R(1 - \nu_{12}\nu_{21})} = \\
&= p_n + \frac{\rho h^2 \ddot{p}_n}{12\mu^2 G_{12}} - \frac{E_1 h^2 p_n''}{12(1 - \nu_{12}\nu_{21}) \mu^2 G_{13}}. \tag{8}
\end{aligned}$$

Тут штрихом позначено диференціювання за x , крапкою – за t .

Система (8) описує динаміку ортотропної циліндричної оболонки на пружній основі типу Вінклера під дією осесиметричного навантаження p_n . Вона є складнішою порівняно з рівнянням динаміки балки на пружній основі [10]. Ця система відрізняється також і від рівнянь теорії оболонок Кірхгофа наявністю похідної четвертого порядку за часом від змінної w , а також похідними за x і t від інтенсивності навантаження p_n . У зв'язку з цим вона може бути використана для опису більш загальних і складних механічних явищ, зокрема, для вивчення біжучих хвиль.

2. Гармонічні хвилі. Дисперсійні співвідношення. Сформулюємо задачу про поширення в ортотропній циліндричній оболонці на пружній основі гармонічних біжучих хвиль і хвиль, що збуджуються рухомих полем навантаження. Для цього введемо фазову координату $X = x - Vt$, що рухається зі швидкістю V . Тоді маємо

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{du}{dX}, & \frac{\partial u}{\partial t} &= -V \frac{du}{dX}, & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{d^2 u}{dX^2}, & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= V^2 \frac{d^2 u}{dX^2}, \\
\frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{dw}{dX}, & \frac{\partial w}{\partial t} &= -V \frac{dw}{dX}, & \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \frac{d^2 w}{dX^2}, & \frac{\partial w}{\partial t} &= -V \frac{dw}{dX}, \\
\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} &= \frac{d^3 w}{dX^3}, & \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} &= V^2 \frac{d^4 w}{dX^4}, & \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} &= \frac{d^4 u}{dX^4}, & \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} &= V^4 \frac{d^4 w}{dX^4}. \tag{9}
\end{aligned}$$

З урахуванням замін (9) система (8) набуде такого вигляду:

$$\begin{aligned}
\left(\rho V^2 - \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \right) u'' + \frac{E_1 \nu_{21} w'}{(1 - \nu_{12}\nu_{21}) R} &= 0, \\
\frac{h^3}{12} \left\{ \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \left(1 + \frac{C_2}{\mu^2 G_{13} h} \right) - \rho \left(1 + \frac{C_2}{\mu^2 G_{13} h} + \frac{E_1}{\mu^2 G_{13} (1 - \nu_{12}\nu_{21})} \right) V^2 + \right. \\
&+ \left. \frac{\rho^2 V^4}{\mu^2 G_{13}} \right\} w^{VI} + \rho h \left\{ \left(1 + \frac{C_1 h}{12\mu^2 G_{13}} + \frac{h^2 E_2}{12\mu^2 R^2 G_{13} (1 - \nu_{12}\nu_{21})} \right) V^2 - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -C_2 - \frac{E_1 h^2 C_1}{12\mu^2 G_{13} (1 - v_{12} v_{21})} - \frac{E_1 E_2 h^3}{12\mu^2 G_{13} R^2 (1 - v_{12} v_{21})^2} \left. \right\} w'' + \\
& + \left(C_1 + \frac{E_2 h}{R^2 (1 - v_{12} v_{21})} \right) w + \frac{E_2 h^3 v_{12}}{12\mu^2 G_{13} R (1 - v_{12} v_{21})} \left(\frac{E_1}{1 - v_{12} v_{21}} - \right. \\
& \left. - \rho V^2 \right) u''' - \frac{E_2 h v_{12}}{R (1 - v_{12} v_{21})} u' = p_n + \frac{h^2}{12\mu^2 G_{13}} \left(\rho V^2 - \frac{E_1}{1 - v_{12} v_{21}} \right) p_n''. \quad (10)
\end{aligned}$$

Тут штрихом позначено диференціювання за змінною X .

Рух власних хвиль в ортотропній циліндричній оболонці на пружній основі, на відміну від (10), описується системою однорідних диференціальних рівнянь, що отримується з неоднорідної системи (8) шляхом відкидання правих частин:

$$\begin{aligned}
\rho \ddot{u} - \frac{E_1}{1 - v_{12} v_{21}} u'' + \frac{E_1 v_{21}}{R (1 - v_{12} v_{21})} w' &= 0, \\
\frac{\rho^2 h^2}{12\mu^2 G_{13}} \ddot{w} + \frac{E_1 h^2}{12(1 - v_{12} v_{21})} \left(1 + \frac{C_2}{\mu^2 G_{13} h} \right) w^{IV} - \frac{\rho h^2}{12} \left(1 + \frac{C_2}{\mu^2 G_{13} h} + \right. \\
& \left. + \frac{E_1}{\mu^2 G_{13} (1 - v_{12} v_{21})} \right) \ddot{w}'' + \rho \left(1 + \frac{C_1 h}{12\mu^2 G_{13}} + \frac{E_2 h^2}{12\mu^2 G_{13} R^2 (1 - v_{12} v_{21})} \right) \ddot{w} - \\
& - \left(\frac{C_2}{h} + \frac{C_1 E_1 h}{12\mu^2 G_{13} (1 - v_{12} v_{21})} + \frac{E_1 E_2 h^2}{12\mu^2 G_{13} R^2 (1 - v_{12} v_{21})^2} \right) w'' + \\
& + \left(\frac{C_1}{h} + \frac{E_2}{R^2 (1 - v_{12} v_{21})} \right) w + \frac{E_1 E_2 h^2 v_{12}}{12(1 - v_{12} v_{21})^2 \mu^2 G_{13} R} u''' - \\
& - \frac{E_2 \rho h^2 v_{12}}{12(1 - v_{12} v_{21}) \mu^2 G_{13} R} \ddot{u}' - \frac{E_2 v_{12}}{R (1 - v_{12} v_{21})} u' = 0. \quad (11)
\end{aligned}$$

Дослідимо поширення гармонічних хвиль в ортотропній циліндричній оболонці на пружній основі. Побудуємо їх у формі

$$u = U \sin(kx - \omega t), \quad w = W \cos(kx - \omega t). \quad (12)$$

Тоді мають місце рівності

$$\begin{aligned}
\ddot{u} &= -U\omega^2 \sin(kx - \omega t), & w' &= -Wk \sin(kx - \omega t), \\
u'' &= -Uk^2 \sin(kx - \omega t), & w'' &= -Wk^2 \cos(kx - \omega t), \\
u' &= Uk \cos(kx - \omega t), & \ddot{w} &= -W\omega^2 \cos(kx - \omega t), \\
u''' &= -Uk^3 \cos(kx - \omega t), & \ddot{u}' &= -Uk\omega^2 \cos(kx - \omega t), \\
\ddot{w} &= W\omega^4 \cos(kx - \omega t), & \ddot{w}'' &= Wk^2\omega^2 \cos(kx - \omega t), \\
w^{IV} &= Wk^4 \cos(kx - \omega t).
\end{aligned}$$

Підставивши ці співвідношення в (11) і скоротивши на $\sin(kx - \omega t)$, $\cos(kx - \omega t)$, отримаємо однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{E_1 k^2}{1 - v_{12} v_{21}} - \rho \omega^2 \right) U - \frac{E_1 v_{21} k}{(1 - v_{12} v_{21}) R} W = 0, \\
& \left\{ \frac{E_1 h^2}{12(1 - v_{12} v_{21})} \left(1 + \frac{C_2}{\mu^2 G_{13} h} \right) k^4 - \frac{\rho h^2}{12} \left(1 + \frac{C_2}{\mu^2 G_{13} h} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{E_1}{\mu^2 G_{13} (1 - v_{12} v_{21})} \right) \omega^2 k^2 + \frac{\rho^2 h^2 \omega^4}{12\mu^2 G_{13}} - \rho \left(1 + \frac{C_1 h}{12\mu^2 G_{13}} + \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{h^2 E_2}{12\mu^2 R^2 G_{13} (1 - v_{12} v_{21})} \Big) \omega^2 + \left(\frac{C_2}{h} + \frac{E_1 h C_1}{12\mu^2 G_{13} (1 - v_{12} v_{21})} + \right. \\
& + \left. \frac{E_1 E_2 h^2}{12\mu^2 G_{13} R^2 (1 - v_{12} v_{21})^2} \right) k^2 + \frac{C_1}{h} + \frac{E_2}{R^2 (1 - v_{12} v_{21})} \Big\} W + \\
& + \frac{E_2 v_{12} k}{R (1 - v_{12} v_{21})} \times \left(\frac{E_1 h^2 k^2}{12\mu^2 G_{12} (1 - v_{12} v_{21})} - \frac{\rho h^2 \omega^2}{12\mu^2 G_{12}} - 1 \right) U = 0. \quad (13)
\end{aligned}$$

Ця система має відмінний від нуля розв'язок U, W тільки у випадку, коли визначник матриці її коефіцієнтів дорівнює нулеві. З цієї умови отримуємо характеристичне (дисперсійне) рівняння

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{E_1 k^2}{1 - v_{12} v_{21}} - \rho \omega^2 \right) \left\{ \frac{E_1 h^2}{12(1 - v_{12} v_{21})} \left(1 + \frac{C_2}{\mu^2 G_{13} h} \right) k^4 - \frac{\rho h^2}{12} \left(1 + \frac{C_2}{\mu^2 G_{13} h} + \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{E_1}{\mu^2 G_{13} (1 - v_{12} v_{21})} \right) \omega^2 k^2 + \frac{\rho^2 h^2 \omega^4}{12\mu^2 G_{13}} - \rho \left(1 + \frac{C_1 h}{12\mu^2 G_{13}} + \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{h^2 E_2}{12\mu^2 R^2 G_{13} (1 - v_{12} v_{21})} \right) \omega^2 + \left(\frac{C_2}{h} + \frac{E_1 h C_1}{12\mu^2 G_{13} (1 - v_{12} v_{21})} + \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{E_1 E_2 h^2}{12\mu^2 G_{13} R^2 (1 - v_{12} v_{21})^2} \right) k^2 + \frac{C_1}{h} + \frac{E_2}{R^2 (1 - v_{12} v_{21})} \right\} + \\
& + \frac{E_1 E_2 v_{12} v_{21} k^2}{\mu^2 R^2 (1 - v_{12} v_{21})^2} \left(\frac{E_1 h^2 k^2}{12G_{12} (1 - v_{12} v_{21})} - \frac{\rho h^2 \omega^2}{12G_{12}} - \mu^2 \right) = 0. \quad (14)
\end{aligned}$$

Побудоване дисперсійне рівняння є рівнянням шостого степеня відносно ω . Однак, враховуючи, що ω входить у нього тільки в квадраті, це рівняння можна звести до кубічного рівняння відносно ω^2 , потім знайти три залежності $\omega_i = \omega_i(k)$, $i = 1, 2, 3$, та обчислити три фазові швидкості руху гармонічних хвиль вигляду (12) за формулою

$$V_i = \frac{1}{k} \omega_i(k), \quad i = 1, 2, 3. \quad (15)$$

Для кожного значення фазової швидкості V_i , $i = 1, 2, 3$, за допомогою системи (13) визначаємо відношення U_i/W_i , що характеризують поляризацію хвиль.

У зв'язку з тим, що ці відношення у правій частині рівності (15) залежать від k , гармонічні хвилі (12) поширюються з різними швидкостями. Такі хвилі називають диспергуючими. Якщо для вибраного номера i , $i = 1, 2, 3$, відношення $\omega_i(k)/k$ залишається сталим при довільному k , то всі гармонічні хвилі i -ї поляризації поширюються з однією і тією ж швидкістю V , і явища дисперсії (розпливання профілю негармонічної хвилі) тоді відсутні.

Для побудови залежностей $\omega_i = \omega_i(k)$, що визначаються рівнянням (14), спростимо це рівняння, враховуючи, що ω і k входять у нього тільки в парних степенях. Тоді, позначивши $\omega^2 = \Omega$, $k^2 = K$, зведемо рівняння (14) до кубічного рівняння відносно Ω і K :

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{E_1 K}{1 - v_{12} v_{21}} - \rho \Omega \right) \left\{ \frac{E_1 h^2}{12(1 - v_{12} v_{21})} \left(1 + \frac{C_2}{\mu^2 G_{13} h} \right) K^2 - \frac{\rho h^2}{12} \left(1 + \frac{C_2}{\mu^2 G_{13} h} + \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{E_1}{\mu^2 G_{13} (1 - v_{12} v_{21})} \right) K \Omega + \frac{\rho^2 h^2}{12\mu^2 G_{13}} \Omega^2 - \rho \left(1 + \frac{C_1 h}{12\mu^2 G_{13}} + \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{h^2 E_2}{12\mu^2 R^2 G_{13} (1 - v_{12} v_{21})} \Big) \Omega + \left(\frac{C_2}{h} + \frac{E_1 h C_1}{12\mu^2 G_{13} (1 - v_{12} v_{21})} + \right. \\
& + \left. \frac{E_1 E_2 h^2}{12\mu^2 G_{13} R^2 (1 - v_{12} v_{21})^2} \right) K + \frac{C_1}{h} + \frac{E_2}{R^2 (1 - v_{12} v_{21})} \Big\} + \\
& + \frac{E_1 E_2 v_{12} v_{21} K}{\mu^2 R^2 (1 - v_{12} v_{21})^2} \left(\frac{E_1 h^2 K}{12G_{12} (1 - v_{12} v_{21})} - \frac{\rho h^2 \Omega}{12G_{12}} - \mu^2 \right) = 0. \quad (16)
\end{aligned}$$

Оскільки коефіцієнти при невідомих Ω у рівнянні (16) є складними виразами, знаходження співвідношень для його коренів пов'язане з громіздкими перетвореннями. Тому зручніше використовувати стандартні програми чисельних методів. За загальноприйнятою методикою виконано дослідження поширення гармонічних хвиль в осьовому напрямку циліндричної ортотропної оболонки – обсадної труби, яка набула технологічну ортотропію [2]. Розглянуто оболонку з параметрами: $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$, $E_1 = 2.1 \cdot 10^{11} \text{ Па}$, $E_2 = 1.79 \cdot 10^{11} \text{ Па}$, $v_{12} = 0.3$, $v_{21} = 0.26$, $G_{13} = 0.81 \cdot 10^{11} \text{ Па}$, $R = 0.136 \text{ м}$, $\mu = 1$; $h = 0.01 \text{ м}$.

Після визначення залежності $\omega \cdot 10^6, \text{ с}^{-1}$ $\Omega - K$ і добування кореня (оскільки $\Omega = \omega^2$) тільки середня залежність $\omega - k$ зберегла прямолінійний обрис, дві інші виявились криволінійними (рис. 1). Це означає, що для параметрів ω, k , що лежать на середній прямій лінії, відношення $V^* = \omega / k = 5387 \text{ м/с}$ залишається сталим, усі гармоніки мають однакову швидкість хвилі V^* , тому хвилі такого типу не диспергують. Хвилі, що відповідають двом іншим кривим $\omega - k$, є диспергуючими.

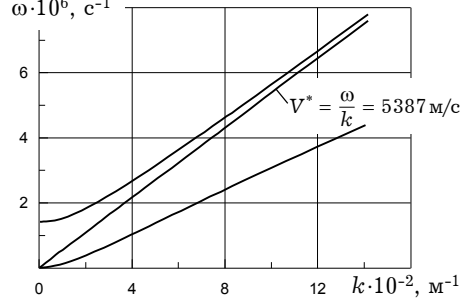


Рис. 1

Підставляючи значення ω, k , що лежать на середній прямій лінії, у рівняння (13), отримуємо систему двох лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь (визначник якої дорівнює нулеві), звідки можна визначити поляризацію біжучої хвилі.

Як показали обчислення, при прийнятих значеннях параметрів і U і W є відмінними від нуля, однак за величиною W виявилось значно меншим, ніж U . Це свідчить про те, що ця хвиля є майже поздовжньою. Знаючи, що отримане значення швидкості $V^* = 5387 \text{ м/с}$ співпадає з швидкостями поздовжніх хвиль у пружному шарі.

Для підтвердження достовірності проведених аналітичних і чисельних перетворень покажемо, що відома в теорії стержнів формула $V_1 = \sqrt{E_1 / \rho}$ [4], якою визначається швидкість поздовжніх гармонічних хвиль, може бути отримана і з дисперсійного рівняння (14) теорії оболонок С. П. Тимошенка. Дійсно, оскільки швидкість хвилі визначається через хвильове число k і циклічну частоту ω рівністю $V = \omega / k$, то $\omega = Vk$. Тоді рівняння (14) можна подати як

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{E_1}{1 - v_{12} v_{21}} - \rho V^2 \right) \left\{ \frac{E_1 h^2}{12(1 - v_{12} v_{21})} \left(1 + \frac{C_2}{\mu^2 G_{13} h} \right) k^4 - \frac{\rho h^2}{12} \left(1 + \frac{C_2}{\mu^2 G_{13} h} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{E_1}{\mu^2 G_{13} (1 - v_{12} v_{21})} \right) k^4 V^2 + \frac{\rho^2 h^2}{12\mu^2 G_{13}} k^4 V^4 - \rho \left(1 + \frac{C_1 h}{12\mu^2 G_{13}} + \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{h^2 E_2}{12\mu^2 R^2 G_{13}(1 - v_{12}v_{21})} \Big) V^2 k^2 + \left(\frac{C_2}{h} + \frac{E_1 h C_1}{12\mu^2 G_{13}(1 - v_{12}v_{21})} + \right. \\
& + \left. \frac{E_1 E_2 h^2}{12\mu^2 G_{13} R^2 (1 - v_{12}v_{21})^2} \right) k^2 + \frac{C_1}{h} + \frac{E_2}{R^2(1 - v_{12}v_{21})} \Big\} + \\
& + \frac{E_1 E_2 v_{12} v_{21}}{\mu^2 R^2 (1 - v_{12}v_{21})^2} \left(\frac{E_1 h^2 k^2}{12G_{13}(1 - v_{12}v_{21})} - \frac{\rho h^2 k^2 V^2}{12G_{13}} - \mu^2 \right) = 0.
\end{aligned}$$

Припустимо, що циліндричну оболонку можна розглядати як пружний стержень для поздовжніх гармонічних хвиль лише у випадку, коли геометричні розміри перерізу оболонки є малими порівняно з довжиною хвилі, тому параметри перерізу можна усереднювати. Таке припущення виконується при $k \rightarrow 0$. Тоді у наведеному рівнянні можна покласти $k = 0$.

У цьому випадку маємо

$$\left(\frac{E_1}{1 - v_{12}v_{21}} - \rho V^2 \right) \left(\frac{C_1}{h} + \frac{E_2}{R^2(1 - v_{12}v_{21})} \right) + \frac{E_1 E_2 v_{12} v_{21}}{R^2(1 - v_{12}v_{21})^2} = 0,$$

звідки знаходимо значення швидкості таких хвиль:

$$V = \sqrt{\frac{1}{\rho} \frac{E_1 E_2 h + C_1 E_1 R^2}{E_2 h + C_1 R^2 (1 - v_{12}v_{21})}}.$$

З аналізу цього виразу випливає, що при відсутності впливу пружної основи ($C_1 = 0$) або при $R = 0$ (стержень) значення швидкості V співпадає зі значенням швидкості поздовжньої хвилі в стержні $V_1 = \sqrt{E_1/\rho}$. При $R = \infty$ (пластина), а також при абсолютно жорсткій пружній основі $C_1 = \infty$ значення швидкості співпадає з швидкістю хвилі в пластині

$$V_2 = \sqrt{\frac{1}{\rho} \frac{E_1}{1 - v_{12}v_{21}}}.$$

Зауважимо, що знаходження виразу для швидкості поширення згинних гармонічних хвиль безпосередньо з дисперсійного рівняння (14) є дуже громіздким завданням. Очевидно, простіше це робити чисельно за допомогою діаграм, подібних до наведених на рис. 1.

Розглянемо випадок поширення хвиль в оболонці з урахуванням її тонкостінності. Тоді довжина хвилі має бути малою, а хвильове число k – великим. Враховуючи, що $k \gg 1$, рівняння (14) зводимо до вигляду

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{E_1}{1 - v_{12}v_{21}} - \rho V^2 \right) \left\{ \frac{E_1}{1 - v_{12}v_{21}} \left(1 + \frac{C_2}{\mu^2 G_{13} h} \right) - \rho \left(1 + \frac{C_2}{\mu^2 G_{13} h} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{E_1}{\mu^2 G_{13} (1 - v_{12}v_{21})} \right) V^2 + \frac{\rho^2 V^4}{\mu^2 G_{13}} \right\} = 0,
\end{aligned}$$

звідки випливає відомий в теорії пластин вираз

$$V_2 = \sqrt{\frac{1}{\rho} \frac{E_1}{1 - v_{12}v_{21}}}.$$

З умови рівності нулеві виразу у фігурних дужках маємо

$$\begin{aligned}
V^2 = \frac{\mu^2 G_{13}}{2\rho} \left\{ \left[1 + \frac{C_2}{\mu^2 G_{13} h} + \frac{E_1}{\mu^2 G_{13} (1 - v_{12}v_{21})} \right] \pm \right. \\
\left. \pm \left[1 + \frac{C_2}{\mu^2 G_{13} h} - \frac{E_1}{\mu^2 G_{13} (1 - v_{12}v_{21})} \right] \right\},
\end{aligned}$$

звідки отримуємо формули

$$V_2 = \sqrt{\frac{1}{\rho} \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}}, \quad V_3 = \mu \sqrt{\frac{G_{13}}{\rho} \left[1 + \frac{C_2}{\mu^2 G_{13} h} \right]}$$

для поздовжньої і поперечної хвиль, що узгоджується з висновками для пружного шару з роботі [8]. Відмітимо, що обчислені за цими формулами швидкості співпадають зі значеннями швидкостей хвиль, знайдених за дисперсійними діаграмами на рис. 1, що свідчить про достовірність отриманих результатів.

Аналіз проведених досліджень дозволяє зробити висновок, що при зміні параметрів жорсткості пружної основи C_1 в діапазоні від 0 до ∞ і геометрії оболонки $R \in [0, \infty]$ критичні швидкості V_k майже поздовжніх хвиль в ортотропній циліндричній оболонці на пружній основі змінюються незначно, оскільки вони містяться в діапазоні $V_k \in (V_1, V_2)$.

Розглянемо конкретний приклад, коли вказана вище ортотропна сталевая циліндрична оболонка знаходиться на пружній основі з пісковика. Для цього випадку згідно з [5] $C_1 = 9.83 \cdot 10^{10}$ Па/м, $C_2 = 1.46 \cdot 10^8$ Па/м. При цьому швидкість згинних хвиль $V = 5287$ м/с, а швидкість зсувних хвиль $V_3 = 3742$ м/с. Використання двопараметричної моделі дало можливість показати, що вплив пружної основи на швидкість згинних хвиль є незначним, а швидкість зсувних хвиль може істотно збільшитися (у розглядуваному конкретному випадку – на 10%).

1. *Вольмир А. С.* Нелинейная динамика пластин и оболочек. – Москва: Наука, 1972. – 432 с.
2. *Иогансен К. В.* Спутник буровика. – Москва: Недра, 1990. – 303 с.
3. *Луговой П. З., Мукоид В. П., Мейш В. Ф.* Динамика оболочечных конструкций при взрывных нагрузках. – Киев: Наук, думка, 1991. – 278 с.
4. *Новицкий Д. Л.* Распространение продольных волн в стержне, обладающем цилиндрической ортотропией // Конструирование и технология машиностроения. – 1967. – № 3. – С. 33–38.
5. *Пастернак П. Л.* Основы нового метода расчета фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели. – Москва–Ленинград: Госстройиздат, 1954. – 56 с.
6. *Перцев А. К., Платонов Э. Г.* Динамика оболочек и пластин. – Ленинград: Судостроение, 1987. – 316 с.
7. *Шульга М. О., Мейш В. Ф.* Про коливання ізотропних циліндричних оболонок з врахуванням лінійних та кутових поперечних деформацій // Доп. АН України. – 1994. – № 12. – С. 70–73.
8. *Шульга Н. А.* Распространение осесимметричных упругих волн в ортотропном полом цилиндра // Прикл. механика. – 1974. – **10**, № 9. – С. 14–18.
9. *Gulyaev V. I., Lugovoi P. Z., Lysyuk N. A.* Propagation of harmonic waves in a cylindrical shell (Timoshenko model) // Int. Appl. Mech. – 2003. – **39**, No. 4. – P. 472–478.
Те саме: *Гуляев В. И., Луговой П. З., Лысюк Н. А.* Распространение гармонических волн в цилиндрической оболочке (модель С. П. Тимошенко) // Прикл. механика. – 2003. – **39**, № 4. – С. 108–116.
10. *Gulyaev V. I., Mel'nik V. M., Yakovenko E. V.* The dynamics of a beam on an elastic base under a moving force and moment (Timoshenko model) // Int. Appl. Mech. – 2000. – **36**, No. 12. – P. 1650–1656.
Те саме: *Гуляев В. И., Мельник В. М., Яковенко Е. В.* Динамика напряженного состояния ортотропных некруговых цилиндрических оболочек переменной толщины в уточненной постановке // Прикл. механика. – 2000. – **36**, № 12. – С. 35–44.
11. *Jones I. P., Bhuta P. G.* Response of cylindrical shells to moving loads // Trans. ASME. J. Appl. Mech. E. – 1964. – **31**, No. 1. – P. 105–111.

О ВЛИЯНИИ УПРУГОГО ОСНОВАНИЯ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЛН В ОРТОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ

На основе теории оболочек типа Тимошенко получено уравнение для исследования осесимметричных полей деформаций в ортотропной цилиндрической оболочке на упругой основе Пастернака. Построено дисперсионное уравнение, позволяющее изучить движение собственных гармонических волн в ортотропной цилиндрической оболочке в зависимости от свойств упругого основания. Найденные значения скоростей волн с помощью предложенного численного метода для построения дисперсионных диаграмм совпадают с аналитическими решениями, что подтверждает достоверность полученных результатов.

EFFECT OF ELASTIC FOUNDATION ON PROPAGATION OF HARMONIC WAVES IN ORTHOTROPIC CYLINDRICAL SHELL

On the basis of the Timoshenko shell theory, the equation is obtained, which is later used for analyzing the axially-symmetric fields of deformations in an orthotropic cylindrical shell on the elastic Pasternak foundation. The dispersion equation is constructed, which enables studying the propagation of natural harmonic waves in the shell depending on the properties of the elastic foundation. The values of wave velocities obtained by use of numerical method coincide with analytical solutions. This confirms the reliability of the obtained results.

Ін-т механіки ім. С. П. Тимошенка
НАН України, Київ

Одержано
17.07.06