

**ЕЛЕКТРО-ОСМОТИЧНІ ТЕЧІЇ В'ЯЗКОЇ РІДИНИ  
В ПРЯМОКУТНІЙ ПОРОЖНИНІ**

*Розглядається електро-осмотична течія у прямокутній комірці. Задача зводиться до двовимірної бігармонічної задачі. Метод суперпозиції виявляється ефективним для розв'язування задач прикладної механіки, що стосуються повільної течії в'язкої рідини у прямокутній порожнині під дією дотичних швидкостей, прикладених на її стінках. Метод ілюструється декількома прикладами.*

В істинній філософії причину всіх природних явищ осягають за допомогою міркувань механічного характеру. На мою думку, так і слід робити, в протилежному випадку приходиться відмовлятися від будь-яких сподівань коли-небудь і що-небудь зрозуміти в фізиці.

Х. Гюйгенс [1, с. 11]

**1. Вступ.** Початок ХХІ століття вніс суттєві зміни у підходах до розгляду різноманітних задач механіки суцільного середовища, зокрема, механіки рідини. Інтерес дослідників переключився від класичних задач про взаємодію макротечій із зовнішніми чи внутрішніми тілами до різноманітних задач механіки рідини, які тісно пов'язані з біоінженерією [6, 8], аналітичною хімією [9, 10] та охороною здоров'я [25]. (Усі ці статті увійшли до тематичного випуску «Nature Insight» у номері найвпливовішого міжнародного наукового щотижневника «Nature» за 27 липня 2006 р.) Виникли навіть спеціальні терміни *microfluidics* та *lab-on-a-chip* [19, 20, 22–24] для позначення тих розділів науки та технологій, які мають справу із малими (від  $10^{-9}$  до  $10^{-18}$  л) кількостями рідини, причому течії відбуваються в мікроканалах або комірках, розміри яких варіюються від десятків до сотень мікрометрів ( $10^{-6}$  м). Основним при цьому стає інтерес до отримання можливості вимірювання і контролю процесів переносу та змішування домішок у рідині [21, 23]. Важливим є те, що завдяки малим розмірам та швидкостям течії рідини є ламінарними з типовим числом Рейнольдса  $Re = O(1)$  і з великою точністю можуть описуватися лінійними рівняннями Стокса, коли рух є настільки повільним, що інерційними силами, які містять квадрати швидкостей, можна знехтувати порівняно з в'язкими силами. На сьогодні вже існує ряд впливових оглядових статей [5, 14, 18, 20] та книга [22], які містять широку панораму досліджень у галузі мікрорідин.

Серед різних можливостей маніпулювання течіями рідини на мікрорівні (перенос рідини, змішування або розділення) цікавим є застосування явища електро-осмосу для розчинів електролітичних рідин. Таке явище [15] полягає в акумуляції електричного заряду у тонкому подвійному (або Дебаєвському) шарі завтовшки  $\lambda_D$  порядку десятка нанометрів ( $10^{-9}$  м) біля твердої границі. За межею цього шару від границі електроліт є нейтральним. Таке накопичення заряду призводить до позитивної чи негативної різниці потенціалів  $\zeta$  уздовж шару Дебая, причому ця величина залежить від характеристик твердої границі та рідини. За наявності зовнішнього електричного поля іони в шарі Дебая притягуються до протилежно зарядженого електрода і тягнуть за собою рідину. Іншими словами, зовнішнє електричне поле через дію на іони створює об'ємну силу, яка, в свою чергу, генерує течію рідини. Коли величина  $\lambda_D$  значно менша від розмірів області течії,

електро-осмотична течія (ЕОТ) може бути описана в рамках моделі Стокса для в'язкої рідини. Існує вже численна література з досліджень у цьому напрямку, огляд якої наведено у статтях [5, 14, 20]. Переважна більшість теоретичних досліджень з ЕОТ відноситься до течій у довгих каналах прямокутного перерізу з постійним значенням потенціалу  $\zeta$  уздовж стінок і суцільними електродами для прикладання зовнішнього електричного поля. У роботі [7] наведено огляд аналітичних розв'язків таких відносно простих задач. У недавніх публікаціях [16, 17] розглянуто течію у шарі з періодичним розміщенням електродів та у прямокутній комірці. При цьому було використано аналітичний метод суперпозиції, розвинутий [11–13] для класу двовимірних течій Стокса у прямокутнику одним із авторів цієї статті. Ряд ключових питань при застосуванні цього методу залишився нез'ясованим. Детальне дослідження такої граничної задачі про електро-осмотичну течію у прямокутнику є предметом цієї роботи.

**2. Електро-осмотична течія.** Коли електролітичний розчин прилягає до поверхні, хімічний стан поверхні, взагалі кажучи, змінюється внаслідок або іонізації ковалентних поверхневих зв'язаних груп, або абсорбції іонів. В результаті поверхня набуває заряд, і в той же час іони виходять у рідину (наприклад, звичайне скло, SiOH, за наявності води іонізується, що приводить до зарядженої поверхневої групи SiO<sup>-</sup>, та визволяє іон). У стані рівноваги існує баланс між електростатичними взаємодіями та тепловим збуреннями, що виникають у розподіленому профілі заряду. Рідина є електрично нейтральною, але шар, який прилягає до границі, має заряд, локально еквівалентний за амплітудою і протилежний за знаком до зв'язаного заряду на границі. Характерна товщина  $\lambda_D$  такого шару Дебая зменшується, як величина, обернена до квадратного кореня від концентрації іонів в об'ємі рідини, та має типове значення  $\lambda_D \approx 10$  нм для води.

Коли до електроліту прикладене зовнішнє електричне поле  $\mathbf{E}_{\text{ext}}$ , в рідині встановлюється відповідне внутрішнє поле  $\mathbf{E}$  та струм провідності. Типово, що основний об'єм електроліту залишається електрично нейтральним і тому на нього не діють об'ємні сили. Навпаки, у шарі Дебая має місце нерівномірний розподіл зарядів, тому внутрішнє електричне поле  $\mathbf{E}$ , напрям якого є дотичним до границі, створює об'ємну силу  $i$ , таким чином, призводить до зсуву в рідині. Як наслідок, швидкість рідини біля границі змінюється від нуля (для нековзних граничних умов) до скінченного значення  $-m_{EO}E$  – так званої швидкості Гельмгольца – Смолуховського на границі шару Дебая. Тут  $m_{EO}$  – характеристика локальної провідності, яка пов'язана з густиною поверхневого розподілу зарядів  $\sigma_{el}$  у випадку малого значення поверхневого потенціалу співвідношенням

$$m_{EO} = \frac{\sigma_{el}\lambda_D}{\mu} = \frac{\zeta\epsilon\epsilon_0}{\mu}, \quad (1)$$

де  $\epsilon$  – діелектрична стала;  $\epsilon_0$  – діелектрична проникність вакууму; так званий «zeta-потенціал»  $\zeta$  – потенціал поверхні у місці визначення швидкості;  $\mu$  – коефіцієнт в'язкості рідини. Теоретичне обґрунтування такого наближення на прикладі задачі про двовимірну течію у нескінченному шарі можна знайти, наприклад, у статті [16].

У типовій ситуації товщина подвійного шару Дебая є значно меншою від будь-якого мікророзміру течії у комірці чи в каналі, тому можна вважати, що рідина перебуває під дією тангенційної швидкості  $-m_{EO}E$ , прикладеної уздовж *границі*. Таке розмежування масштабів довжини дозволяє спростити теоретичну модель, у якій електрогідродинамічний зв'язок повністю описується заданням тангенційної швидкості на границі, а основну

електро-осмотичну течію можна описати лінійними рівняннями Стокса

$$0 = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (2)$$

де  $p$  – тиск;  $\mathbf{u}$  – швидкість;  $\nabla$  і  $\nabla^2$  – відповідно оператори градієнта та Лапласа. Величини швидкості для ЕОТ визначаються швидкостями на границі та практично не залежать від розміру області течії (за умови, що ці розміри залишаються значно більшими від  $\lambda_D$ ). Типові значення поверхневого потенціалу сягають величини десятків мілівольт і тому для водних розчинів маємо  $m_{EO} \approx 10^{-4} \text{ см}^2/(\text{с} \cdot \text{В})$ . Як наслідок, для того щоб досягнути швидкостей порядку декількох міліметрів за секунду, треба прикласти електричне поле порядку одиниць кВ/см.

Детальне обговорення переваг і недоліків ЕОТ для мікросистемних застосувань містить огляд [20].

**3. Постановка задачі.** Розглянемо замкнену комірку  $|x| \leq a$ ,  $|y| \leq b$  (рис. 1а) з нерухомими стінками, яка містить електrolітичний розчин. Два електроди приєднано до стінок  $x = -a$  та  $x = a$ , що призводить до виникнення компоненти електричного поля  $E_x$ , паралельної до осі  $Ox$ . Додаткові електроди  $A_1, A_2, A_3, A_4$  знаходяться поблизу верхньої ( $y = b$ ) та нижньої ( $y = -b$ ) стінок комірки. Ці електроди не контактують з рідиною та використовуються для контролю розподілу потенціалу  $\zeta$  на границі тверде тіло – рідина.

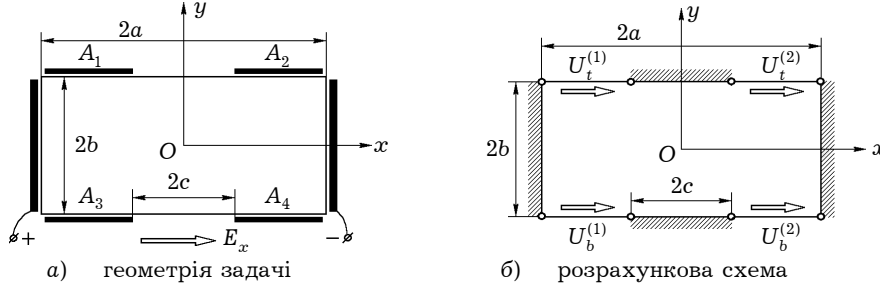


Рис. 1. Електро-осмотична течія рідини в прямокутній комірці.

У двовимірному випадку векторне рівняння Стокса (2) за допомогою функції течії  $\psi(x, y)$  можна звести до скалярного бігармонічного рівняння

$$\nabla^2 \nabla^2 \psi = 0, \quad (3)$$

де компоненти вектора швидкості  $u(x, y)$  та  $v(x, y)$  для нестисливої рідини визначаються як

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (4)$$

Згідно з описаною вище моделлю течію всередині комірки можна подати як розв'язок такої задачі (рис. 1б) для рівняння (3) із граничними умовами:

$$\begin{aligned} \psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} &= \begin{cases} U_t^{(1)}, & -a \leq x < -c, \\ 0, & -c \leq x \leq c, \\ U_t^{(2)}, & c \leq x \leq a, \end{cases} & y = b, \\ \psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} &= \begin{cases} U_b^{(1)}, & -a \leq x < -c, \\ 0, & -c \leq x \leq c, \\ U_b^{(2)}, & c \leq x \leq a, \end{cases} & y = -b, \\ \psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} &= 0, & x = \pm a, \quad |y| \leq b, \end{aligned} \quad (5)$$

де  $U_t^{(1)}, U_t^{(2)}, U_b^{(1)}, U_b^{(2)}$  – задані сталі значення дотичної швидкості на верхній та нижній стінках комірки. Відмітимо, що у точках  $(\pm c, \pm b)$  гра-

ничні швидкості мають розрив, який не повинен позначатися на неперервності поля швидкості всередині комірки.

З огляду на лінійність крайової задачі (3), (5) її розв'язок можна подати у вигляді

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4, \quad (6)$$

де бігармонічні функції  $\psi_1(x, y)$ ,  $\psi_2(x, y)$ ,  $\psi_3(x, y)$ ,  $\psi_4(x, y)$  задовольняють такі граничні умови:

– для парної за  $x$  та  $y$  функції  $\psi_1(x, y)$

$$\begin{aligned} \psi_1 = 0, \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial y} = \pm \begin{cases} U_1, & -a \leq x < -c, \\ 0, & -c \leq x \leq c, \\ U_1, & c \leq x \leq a, \end{cases} \quad y = b, \\ \psi_1 = 0, \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial x} = 0, \quad x = \pm a, \quad |y| \leq b; \end{aligned} \quad (7)$$

– для парної за  $x$  та непарної за  $y$  функції  $\psi_2(x, y)$

$$\begin{aligned} \psi_2 = 0, \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial y} = \begin{cases} U_2, & -a \leq x < -c, \\ 0, & -c \leq x < c, \\ U_2, & c \leq x \leq a, \end{cases} \quad y = \pm b, \\ \psi_2 = 0, \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial x} = 0, \quad x = \pm a, \quad |y| \leq b; \end{aligned} \quad (8)$$

– для непарної за  $x$  та парної за  $y$  функції  $\psi_3(x, y)$

$$\begin{aligned} \psi_3 = 0, \quad \frac{\partial \psi_3}{\partial y} = \pm \begin{cases} -U_3, & -a \leq x < -c, \\ 0, & -c \leq x < c, \\ U_3, & c \leq x \leq a, \end{cases} \quad y = \pm b, \\ \psi_3 = 0, \quad \frac{\partial \psi_3}{\partial x} = 0, \quad x = \pm a, \quad |y| \leq b; \end{aligned} \quad (9)$$

– для непарної за  $x$  та  $y$  функції  $\psi_4(x, y)$

$$\begin{aligned} \psi_4 = 0, \quad \frac{\partial \psi_4}{\partial y} = \begin{cases} -U_4, & -a \leq x < -c, \\ 0, & -c \leq x < c, \\ U_4, & c \leq x \leq a, \end{cases} \quad y = \pm b, \\ \psi_4 = 0, \quad \frac{\partial \psi_4}{\partial x} = 0, \quad x = \pm a, \quad |y| \leq b, \end{aligned} \quad (10)$$

де

$$\begin{aligned} U_1 = \frac{U_t^{(1)} + U_t^{(2)} - U_b^{(1)} - U_b^{(2)}}{4}, \quad U_2 = \frac{U_t^{(1)} + U_t^{(2)} + U_b^{(1)} + U_b^{(2)}}{4}, \\ U_3 = \frac{U_t^{(2)} - U_t^{(1)} + U_b^{(1)} - U_b^{(2)}}{4}, \quad U_4 = \frac{U_t^{(2)} - U_t^{(1)} + U_b^{(2)} - U_b^{(1)}}{4}. \end{aligned} \quad (11)$$

**4. Побудова аналітичного розв'язку задачі.** Усі крайові задачі (7)–(10) розв'язуємо аналітичним методом суперпозиції, який є ефективним для багатьох двовимірних бігармонічних задач у теорії пружності, згину пластин і течій Стокса [2–4, 11–13]. У цих роботах можна знайти подробиці методу; нижче подаємо лише зведені результати.

Бігармонічна функція течії  $\psi_1(x, y)$  має вигляд

$$\begin{aligned} \psi_1 = b \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{X_m^{(1)}}{\alpha_m} \left( b \tanh \alpha_m b \frac{\cosh \alpha_m y}{\cosh \alpha_m b} - y \frac{\sinh \alpha_m y}{\cosh \alpha_m b} \right) \cos \alpha_m x - \\ - a \sum_{\ell=1}^{\infty} (-1)^\ell \frac{Y_\ell^{(1)}}{\beta_\ell} \left( a \tanh \beta_\ell a \frac{\cosh \beta_\ell x}{\cosh \beta_\ell a} - x \frac{\sinh \beta_\ell x}{\cosh \beta_\ell a} \right) \cos \beta_\ell y, \end{aligned} \quad (12)$$

де позначено  $\alpha_m = \frac{(2m-1)\pi}{2a}$ ,  $\beta_\ell = \frac{(2\ell-1)\pi}{2b}$ .

Коефіцієнти  $X_m^{(1)}$  та  $Y_\ell^{(1)}$  рядів Фур'є визначаються із нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} X_m^{(1)} b \Delta_1(\alpha_m b) - \sum_{\ell=1}^{\infty} Y_\ell^{(1)} \frac{4\alpha_m^2 \beta_\ell}{(\beta_\ell^2 + \alpha_m^2)^2} &= \frac{2U_1}{a} \left[ 1 + (-1)^m \sin \alpha_m c \right], \quad 1 \leq m \leq \infty, \\ Y_\ell^{(1)} a \Delta_1(\beta_\ell a) - \sum_{m=1}^{\infty} X_m^{(1)} \frac{4\beta_\ell^2 \alpha_m}{(\alpha_m^2 + \beta_\ell^2)^2} &= 0, \quad 1 \leq \ell \leq \infty, \end{aligned} \quad (13)$$

у якій позначено  $\Delta_1(\xi) = \tanh \xi + \frac{\xi}{\cosh^2 \xi}$ .

Асимптотика коефіцієнтів  $X_m^{(1)}$ ,  $Y_\ell^{(1)}$  на нескінченності має вигляд

$$\begin{aligned} X_m^{(1)} &= \frac{2\pi^2 U_1}{ab(\pi^2 - 4)} + \frac{2U_1}{ab} (-1)^m \sin \alpha_m c + \operatorname{Re}(E_\lambda^{(1)} \alpha_m^{-\lambda}) + o(m^{-3}), \quad m \rightarrow \infty, \\ Y_\ell^{(1)} &= \frac{4\pi U_1}{ab(\pi^2 - 4)} - \operatorname{Re}(E_\lambda^{(1)} \beta_\ell^{-\lambda}) + o(\ell^{-3}), \quad \ell \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (14)$$

з деякою комплексною сталою  $E_\lambda^{(1)}$  та  $\lambda = 2.73959 + i1.11902$ .

Співвідношення (14) є основою для коректної редукції нескінченної системи (13) і переходу до скінченної системи з першими  $M$  та  $L$  невідомими  $X_m^{(1)}$  та  $Y_\ell^{(1)}$ . Формули для обчислення функції течії  $\psi_1(x, y)$  і компонент швидкості у всій комірці, включаючи і границю з кутовими точками, наведено у попередній роботі [10] та використано у статтях [16, 17]. При цьому використано значення деяких нескінченних сум, які дозволяють у скінченному вигляді врахувати важливий внесок перших членів в асимптотиках (14) для коефіцієнтів Фур'є.

Локальна поведінка функції течії  $\psi_1$  в околі кутової точки  $(a, b)$  у полярних координатах  $(\rho, \theta)$  із  $0 < \rho < \infty$ ,  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  має вигляд

$$\begin{aligned} \psi_1(\rho, \theta) &= \frac{4U_1}{\pi^2 - 4} \rho \left[ \theta \cos \theta - \frac{\pi}{2} \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) \sin \theta \right] + \\ &+ \operatorname{Re} \left\{ A_M \rho^{\lambda+1} \left[ \sin \theta \sin \lambda \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) + \cos \theta \sin \lambda \theta \right] \right\} + O(\rho^4), \end{aligned} \quad (15)$$

де використано перетворення  $x = a - \rho \cos \theta$ ,  $y = b - \rho \sin \theta$ .

Локальна поведінка функції  $\psi_1$  в околі точки  $(c, b)$  у полярних координатах  $(\rho_c, \theta_c)$  із  $\rho_c > 0$ ,  $0 \leq \theta_c \leq \pi$  та  $x = c + \rho_c \cos \theta_c$ ,  $y = b - \rho_c \sin \theta_c$ , є такою:

$$\psi_1(\rho_c, \theta_c) = U_1 \rho_c \left( 1 - \frac{\theta_c}{\pi} \right) \sin \theta_c + O(\rho_c^2). \quad (16)$$

Бігармонічна функція течії  $\psi_2(x, y)$  має вигляд

$$\begin{aligned} \psi_2 &= b \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{X_m^{(2)}}{\alpha_m} \left( b \coth \alpha_m b \frac{\sinh \alpha_m y}{\sinh \alpha_m b} - y \frac{\cosh \alpha_m y}{\sinh \alpha_m b} \right) \cos \alpha_m x - \\ &- a \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{Y_k^{(2)}}{\delta_k} \left( a \tanh \delta_k a \frac{\cosh \delta_k x}{\cosh \delta_k a} - x \frac{\sinh \delta_k x}{\cosh \delta_k a} \right) \sin \delta_k y, \end{aligned} \quad (17)$$

де позначено  $\alpha_m = \frac{(2m-1)\pi}{2a}$ ,  $\delta_k = \frac{k\pi}{b}$ .

Коефіцієнти  $X_m^{(2)}$ ,  $Y_k^{(2)}$  рядів Фур'є визначаються із нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} X_m^{(2)} b \Delta_2(\alpha_m b) - \sum_{k=1}^{\infty} Y_k^{(2)} \frac{4\alpha_m^2 \delta_k}{(\delta_k^2 + \alpha_m^2)^2} &= \frac{2U_2}{a} [1 + (-1)^m \sin \alpha_m c], \quad 1 \leq m \leq \infty, \\ Y_k^{(2)} a \Delta_1(\delta_k a) - \sum_{m=1}^{\infty} X_m^{(2)} \frac{4\delta_k^2 \alpha_m}{(\alpha_m^2 + \delta_k^2)^2} &= 0, \quad 1 \leq k \leq \infty, \end{aligned} \quad (18)$$

у якій позначено  $\Delta_1(\xi) = \tanh \xi + \frac{\xi}{\cosh^2 \xi}$ ,  $\Delta_2(\xi) = \coth \xi - \frac{\xi}{\sinh^2 \xi}$ .

Асимптотика коефіцієнтів  $X_m^{(2)}$ ,  $Y_k^{(2)}$  на нескінченності має вигляд

$$\begin{aligned} X_m^{(2)} &= \frac{2\pi^2 U_2}{ab(\pi^2 - 4)} + \frac{2U_2}{ab} (-1)^m \sin \alpha_m c + \operatorname{Re}(E_\lambda^{(2)} \alpha_m^{-\lambda}) + o(m^{-3}), \quad m \rightarrow \infty, \\ Y_k^{(2)} &= \frac{4\pi U_2}{ab(\pi^2 - 4)} - \operatorname{Re}(E_\lambda^{(2)} \delta_k^{-\lambda}) + o(k^{-3}), \quad k \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (19)$$

з деякою комплексною сталою  $E_\lambda^{(2)}$  та  $\lambda = 2.73959 + i1.11902$ .

Бігармонічна функція течії  $\psi_3(x, y)$  має вигляд

$$\begin{aligned} \psi_3 &= b \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{X_n^{(3)}}{\gamma_n} \left( b \tanh \gamma_n b \frac{\cosh \gamma_n y}{\cosh \gamma_n b} - y \frac{\sinh \gamma_n y}{\cosh \gamma_n b} \right) \sin \gamma_n x + \\ &+ a \sum_{\ell=1}^{\infty} (-1)^\ell \frac{Y_\ell^{(3)}}{\beta_\ell} \left( a \coth \beta_\ell a \frac{\sinh \beta_\ell x}{\sinh \beta_\ell a} - x \frac{\cosh \beta_\ell x}{\sinh \beta_\ell a} \right) \cos \beta_\ell y, \end{aligned} \quad (20)$$

де позначено  $\gamma_n = \frac{n\pi}{a}$ ,  $\beta_\ell = \frac{(2\ell - 1)\pi}{2b}$ .

Коефіцієнти  $X_n^{(3)}$  та  $Y_\ell^{(3)}$  рядів Фур'є визначаються із нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} X_n^{(3)} b \Delta_1(\gamma_n b) - \sum_{l=1}^{\infty} Y_l^{(3)} \frac{4\gamma_n^2 \beta_l}{(\beta_l^2 + \gamma_n^2)^2} &= \frac{2U_3}{a} [1 + (-1)^n \cos \gamma_n c], \quad 1 \leq n \leq \infty, \\ Y_\ell^{(3)} a \Delta_2(\beta_\ell a) - \sum_{n=1}^{\infty} X_n^{(3)} \frac{4\beta_\ell^2 \gamma_n}{(\gamma_n^2 + \beta_\ell^2)^2} &= 0, \quad 1 \leq \ell \leq \infty, \end{aligned} \quad (21)$$

в якій позначено  $\Delta_1(\xi) = \tanh \xi + \frac{\xi}{\cosh^2 \xi}$ ,  $\Delta_2(\xi) = \coth \xi - \frac{\xi}{\sinh^2 \xi}$ .

Асимптотика коефіцієнтів  $X_n^{(3)}$ ,  $Y_\ell^{(3)}$  на нескінченності має вигляд

$$\begin{aligned} X_n^{(3)} &= \frac{2\pi^2 U_3}{ab(\pi^2 - 4)} + \frac{2U_3}{ab} (-1)^n \cos \gamma_n c + \operatorname{Re}(E_\lambda^{(3)} \gamma_n^{-\lambda}) + o(n^{-3}), \quad n \rightarrow \infty, \\ Y_\ell^{(3)} &= \frac{4\pi U_3}{ab(\pi^2 - 4)} - \operatorname{Re}(E_\lambda^{(3)} \beta_\ell^{-\lambda}) + o(\ell^{-3}), \quad \ell \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (22)$$

з деякою комплексною сталою  $E_\lambda^{(3)}$  та  $\lambda = 2.73959 + i1.11902$ .

Нарешті, бігармонічна функція течії  $\psi_4(x, y)$  має вигляд

$$\begin{aligned} \psi_4 &= b \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{X_n^{(4)}}{\gamma_n} \left( b \coth \gamma_n b \frac{\sinh \gamma_n y}{\sinh \gamma_n b} - y \frac{\cosh \gamma_n y}{\sinh \gamma_n b} \right) \sin \gamma_n x - \\ &- a \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{Y_k^{(4)}}{\delta_k} \left( a \coth \delta_k a \frac{\sinh \delta_k x}{\sinh \delta_k a} - x \frac{\cosh \delta_k x}{\sinh \delta_k a} \right) \sin \delta_k y, \end{aligned} \quad (23)$$

де позначено  $\gamma_n = \frac{n\pi}{a}$ ,  $\delta_k = \frac{k\pi}{b}$ .

Коефіцієнти  $X_n^{(4)}$  та  $Y_k^{(4)}$  рядів Фур'є визначаються із нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} X_n^{(4)} b \Delta_2(\gamma_n b) - \sum_{k=1}^{\infty} Y_k^{(4)} \frac{4\gamma_n^2 \delta_k}{(\delta_k^2 + \gamma_n^2)^2} &= \frac{2U_4}{a} [1 - (-1)^n \cos \gamma_n c], \quad 1 \leq n \leq \infty, \\ Y_k^{(4)} a \Delta_2(\delta_k a) - \sum_{n=1}^{\infty} X_n^{(4)} \frac{4\delta_k^2 \gamma_n}{(\gamma_n^2 + \delta_k^2)^2} &= 0, \quad 1 \leq k \leq \infty, \end{aligned} \quad (24)$$

в якій позначено  $\Delta_2(\xi) = \coth \xi - \frac{\xi}{\sinh^2 \xi}$ .

Асимптотика коефіцієнтів  $X_n^{(4)}$ ,  $Y_k^{(4)}$  на нескінченності має вигляд

$$\begin{aligned} X_n^{(4)} &= \frac{2\pi^2 U_4}{ab(\pi^2 - 4)} - \frac{2U_4}{ab} (-1)^n \cos \gamma_n c + \operatorname{Re}(E_\lambda^{(4)} \gamma_n^{-\lambda}) + o(n^{-3}), \quad n \rightarrow \infty, \\ Y_k^{(4)} &= \frac{4\pi U_4}{ab(\pi^2 - 4)} - \operatorname{Re}(E_\lambda^{(4)} \delta_k^{-\lambda}) + o(k^{-3}), \quad k \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (25)$$

з деякою комплексною сталою  $E_\lambda^{(4)}$  та  $\lambda = 2.73959 + i1.11902$ .

**5. Результати обчислень.** Методику організації розрахунків, яка базується на переході до розв'язування скінченних систем із урахуванням асимптотичної поведінки типу (14), детально викладено в [11]. Ця стаття була базовою для робіт [16, 17], у яких наведено (із дещо зайвими ускладненнями у позначеннях) розрахункові формули для трьох інших типів симетрії задачі. При цьому використано значення деяких нескінченних сум, які дозволяють у скінченному вигляді врахувати важливий внесок перших членів в асимптотиках типу (14) для коефіцієнтів Фур'є  $X_m^{(1)}$  та  $Y_\ell^{(1)}$ .

Розглянемо декілька прикладів течії у прямокутній комірці з  $a = 2$ ,  $b = 1$  з різним розподілом  $\zeta$  потенціалів уздовж її верхньої та нижньої стінок. При цьому у всіх скінченних системах залишали відповідно по 6 і 3 невідомих. Похибка виконання граничних умов для швидкостей на стінках не перевищувала 0.1% навіть поблизу кутових точок і точок розриву швидкості.

Випадок однакових значень потенціалів на електродах  $A_1, A_2, A_3, A_4$  без зазору між ними ( $c = 0$ ) призводить до задання постійних значень  $U_t$  та  $U_b$  дотичних швидкостей, які рівномірно розподілені вздовж верхньої і нижньої стінок комірки. Структура таких течій добре відома із попередніх робіт [4, 11, 12]. Для функції течії біля кутових точок та точок розриву швидкості чітко проявляється поведінка, що описується поданнями (15), (16) для розв'язків Гудьєра – Тейлора та вихорів Моффата.

Рис. 2–4 ілюструють стаціонарне поле течії при неоднорідному розподілі  $\zeta$  потенціалів. На всіх цих рисунках наведено лінії течії, що відповідають постійним значенням функції течії  $\psi(x, y)$  з інтервалом 0.1. Лінії  $\psi(x, y) = 0$  – це сепаратриси, які поділяють комірку на так звані конвективні зони, в яких існує лише один великий вихор. На рис. 2 показано топологію поля течії за відсутності зазору ( $c = 0$ ) при різних значеннях  $\zeta$  потенціалів на лівих і правих електродах на верхній і нижній стінках. Видно, що зміною значень  $\zeta$  на нижніх електродах можна контролювати форму та розташування конвективних зон.

На рис. 3 показано вплив зазору  $c$  на топологію ліній течії. Для відносно малих значень зазору,  $c = 0.1a$ , він майже не впливає на структуру течії, і картини, зображені на рис. 2а і рис. 3а та рис. 2б і рис. 3в, майже співпадають. Для відносно великих значень зазору,  $c = 0.5a$ , (рис. 3б, рис. 3г) картина ліній течії змінюється і конвективні зони стають асиметричними.

Рис. 4 ілюструє значно складнішу картину ліній течії з відсутньою симетрією при різних значеннях потенціалів на всіх електродах без зазору ( $c = 0$ ). Особливо цікавою є наявність додаткових сепаратрис  $\psi(x, y) = 0$  на рис. 4г.

Ці типові приклади стаціонарних ліній течії для ЕОТ наводять на думку про можливість ефективно організації процесу змішування домішки шляхом так званої *хаотичної адвекції* при раптовому переключенні  $\zeta$  потенціалів у моменти часу  $t = kT/2$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , де  $T$  – деякий період. Оскільки ЕОТ у комірці фактично не має рухомих границь, то такий мікрозмішувач може мати принципові переваги у біомедичних застосуваннях мікрорідинних течій. Один приклад змішування в течії Стокса наведено у статті [4] для рівномірного розподілу швидкостей на стінках. Багато інших прикладів для квадратної комірки наведено в роботі [16], а в роботі [17] наведено дані для шару з періодичним за  $x$  (з періодом  $a = 2b$ ) розміщенням електродів. При цьому відзначено перевагу аналітичного представлення поля швидкості над його скінченно-елементним або скінченно-різницевим представленнями при всіх розрахунках. Однак всі ці дані, на наш погляд, не систематизовані належним чином. Зокрема, важлива проблема визначення «якості суміші» та оптимізація за  $\zeta$  і  $T$  процесу змішування залишається відкритою.

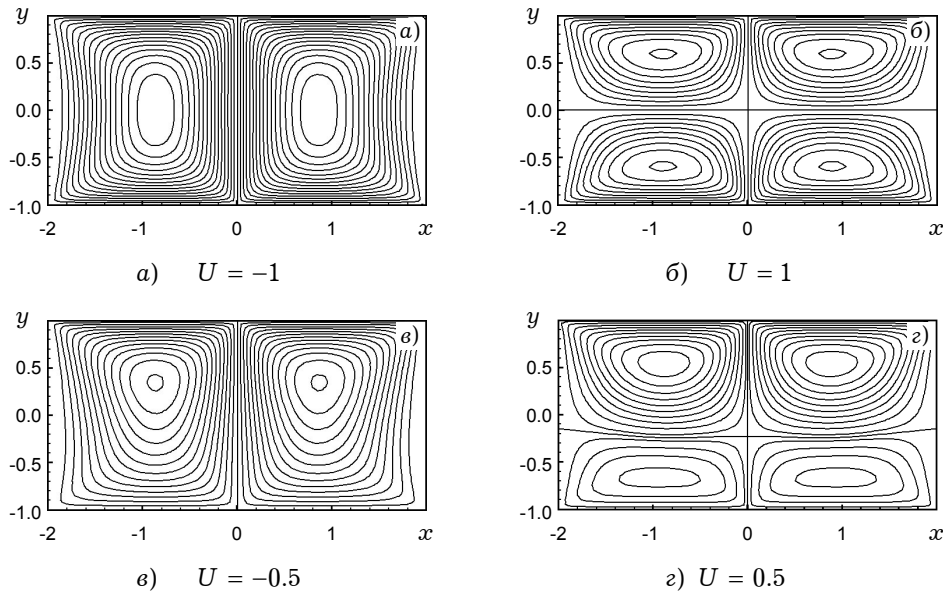


Рис. 2. Картина ліній течії для ЕОТ з неоднорідним  $\zeta$  потенціалом на верхніх і нижніх електродах у комірці з  $a = 2$ ,  $b = 1$  без зазору ( $c = 0$ ) та швидкостями  $U_t^{(1)} = -1$ ,  $U_t^{(2)} = 1$ ,  $U_b^{(1)} = -U$ ,  $U_b^{(2)} = U$  при: а)  $U = -1$ ; б)  $U = 1$ ; в)  $U = -0.5$ ; г)  $U = 0.5$ .



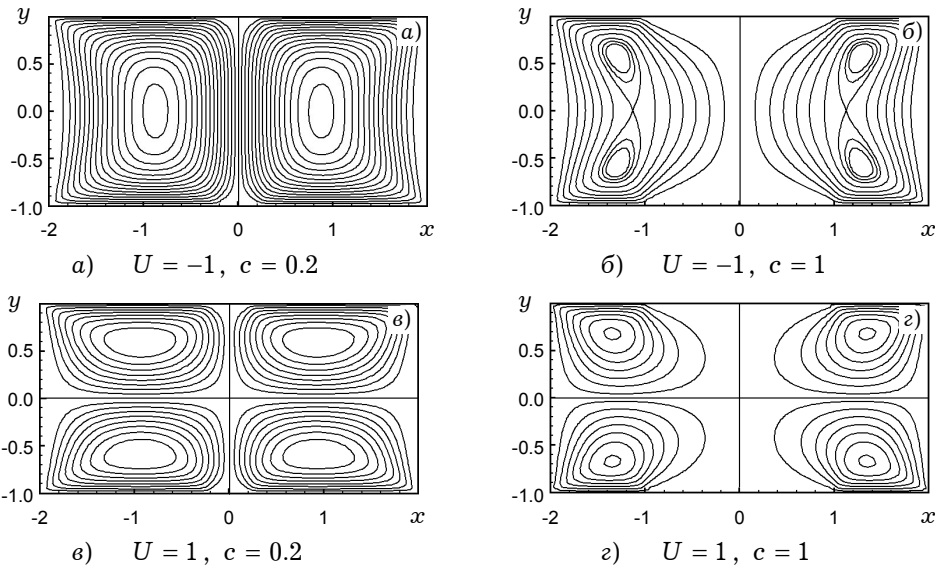


Рис. 3. Вплив ширини зазору  $c$  на картину ліній течії для ЕОТ з неоднорідним  $\zeta$  потенціалом на верхніх і нижніх електродах у комірці з  $a = 2, b = 1$  та швидкостями  $U_t^{(1)} = -1, U_t^{(2)} = 1, U_b^{(1)} = -U, U_b^{(2)} = U$  при: а)  $U = -1, c = 0.2$ ; б)  $U = -1, c = 1$ ; в)  $U = 1, c = 0.2$ ; з)  $U = 1, c = 1$ .

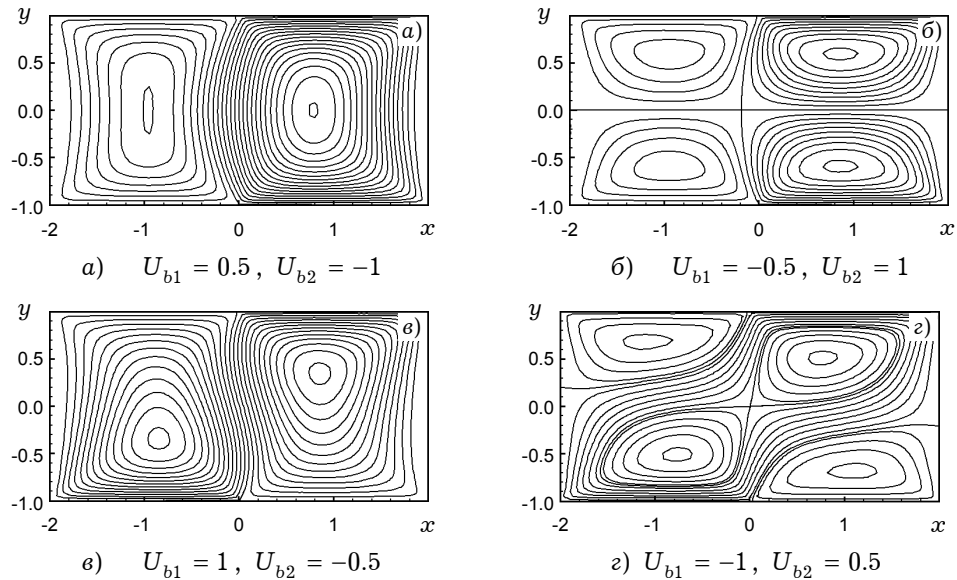


Рис. 4. Картина ліній течії для ЕОТ з неоднорідним  $\zeta$  потенціалом на верхніх і нижніх електродах у комірці з  $a = 2, b = 1$  без зазору ( $c = 0$ ) та швидкостями  $U_t^{(1)} = -0.5, U_t^{(2)} = 1, U_b^{(1)} = U_{b1}, U_b^{(2)} = U_{b2}$  при: а)  $U_{b1} = 0.5, U_{b2} = -1$ ; б)  $U_{b1} = -0.5, U_{b2} = 1$ ; в)  $U_{b1} = 1, U_{b2} = -0.5$ ; з)  $U_{b1} = -1, U_{b2} = 0.5$ .

1. Гюйгенс Х. Трактат о свете. – Москва–Ленинград: ОНТИ НКТП СССР, 1935. – 171 с.
2. Мелешко В. В. Бигармоническая задача для прямоугольника: история и современность // Мат. методы та фіз.-мех. поля. – 2004. – 47, № 3. – С. 45–68.
3. Мелешко В. В. Теплові напруження у прямокутних пластинах // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – 48, № 4. – С. 140–164.

4. Мелешко В. В., ван Хейст Г. Я. Ф. Змішування в'язкої рідини у прямокутній порожнині // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2006. – **49**, № 1. – С. 43–52.
5. Beebe D. J., Mensing G. A., Walker G. M. Physics and applications of microfluidics in biology // *Annu. Rev. Biomed. Eng.* – 2002. – **4**. – P. 261–286.
6. Craighead H. Future lab-on-a-chip technologies for interrogating individual molecules // *Nature.* – 2006. – **442**. – P. 387–393.
7. Dutta P., Beskok A. Analytical solution of combined electro-osmotic/pressure driven flows in two-dimensional straight channels: Finite Debye layer effects // *Anal. Chem.* – 2001. – **73**. – P. 1979–1986.
8. El-Ali J., Sorger P. K., Jensen K. F. Cells on chips // *Nature.* – 2006. – **442**. – P. 403–411.
9. Janasek D., Franzke J., Manz A. Scaling and the design of miniaturized chemical-analysis systems // *Nature.* – 2006. – **442**. – P. 374–380.
10. deMello A. J. Control and detection of chemical reactions in microfluidic systems // *Nature.* – 2006. – **442**. – P. 394–402.
11. Meleshko V. V. Steady Stokes flow in a rectangular cavity // *Proc. R. Soc. London.* – 1996. – **A452**. – P. 1999–2022.
12. Meleshko V. V. Biharmonic problem in a rectangle // *Appl. Sci. Res.* – 1998. – **58**. – P. 217–249.
13. Meleshko V. V., Gomilko A. M. Infinite systems for a biharmonic problem in a rectangle // *Proc. R. Soc. London.* – 1997. – **A453**. – P. 2139–2160.
14. Nguyen N.-T., Wu Z. Engineering flows in small devices: Microfluidics toward a lab-on-a-chip // *J. Micromech. Microeng.* – 2005. – **15**. – P. R1–R16.
15. Probstein R. F. Physicochemical hydrodynamics. – New York: Wiley, 1994. – 416 p.
16. Qian S., Bau H. H. A chaotic electroosmotic stirrer // *Anal. Chem.* – 2002. – **74**. – P. 3616–3625.
17. Qian S., Bau H. H. Theoretical investigation of electro-osmotic flows and chaotic stirring in rectangular cavities // *Appl. Math. Model.* – 2005. – **29**. – P. 726–753.
18. Squires T. M., Quake S. R. Microfluidics: Fluid physics at the nanoliter scale // *Rev. Mod. Phys.* – 2005. – **77**. – P. 977–1026.
19. Stone H. A., Kim S. Microfluidics: Basic issues, applications, and challenges // *AIChE J.* – 2001. – **47**. – P. 1250–1254.
20. Stone H. A., Stroock A. D., Ajdari A. Engineering flows in small devices: Microfluidics toward a lab-on-a-chip // *Annu. Rev. Fluid Mech.* – 2004. – **36**. – P. 381–411.
21. Stroock A. D., Dertinger S. K. W., Ajdari A., Mezic I., Stone H. A., Whitesides G. M. Chaotic mixer for microchannels // *Science.* – 2002. – **295**. – P. 647–651.
22. Tabeling P. Introduction to Microfluidics. – Oxford: Oxford University Press, 2005. – 312 p.
23. Whitesides G. M. The origins and the future of microfluidics // *Nature.* – 2006. – **442**. – P. 368–373.
24. Whitesides G. M., Stroock A. D. Flexible methods for microfluidics // *Phys. Today.* – 2001. – **54**. – P. 42–48.
25. Yager P., Edwards T., Fu E., Helton K., Nelson K., etc. Microfluidic diagnostic technologies for global public health // *Nature.* – 2006. – **442**. – P. 412–418.

#### **ЕЛЕКТРО-ОСМОТИЧЕСКИЕ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПОЛОСТИ**

*Рассматривается классическая двумерная бигармоническая задача для прямоугольной области. Метод суперпозиции оказывается эффективным для решения задач прикладной механики, относящимся к медленному течению вязкой жидкости в прямоугольной полости под действием касательных скоростей, приложенным на ее стенках. Метод проиллюстрирован несколькими примерами.*

#### **ELECTRO-OSMOTIC FLOWS OF VISCOUS FLUID IN A RECTANGULAR CAVITY**

*Two-dimensional, time-independent electro-osmotic flows driven by a uniform electric field in a closed rectangular cavity with uniform and nonuniform zeta potential distributions along the cavity's walls are studied by the method of superposition. This method appears is effective for solving mechanical problems concerning creeping flow of viscous fluid set up in a rectangular cavity by tangential velocities applied along its walls. The method is illustrated by several examples.*

<sup>1</sup> Київ. нац. ун-т ім. Тараса Шевченка, Київ,

<sup>2</sup> Ін-т гідромеханіки НАН України, Київ