УДК 539.3

А. Я. Ващишин

ЕФЕКТ МЕЖОВОГО ШАРУ ЗА ДЕФОРМУВАННЯ ГРАНИЦІ ПРУЖНОГО ПІВПРОСТОРУ ДОВІЛЬНИМ НОРМАЛЬНИМ НАВАНТАЖЕННЯМ

Припущення про рівність нулеві дотичних напружень на границі пружного півпростору при її гладкому нормальному навантаженні обумовлює парадокс взаємопроникнення точок матеріального континууму [2]. *При цьому з'ясовано, що для уникнення цієї фізичної некоректності досить наділити границю певними реологічними властивостями, які уможливлюють регулювання її вертикальних переміщень розподілом на ній за певним законом дотичних напружень. Доведено, що завжди існує такий закон розподілу дотичних напружень, за якого вертикальні переміщення границі є нульовими за довільного нормального навантаження.*

Вступ. Однією з найпоширеніших задач математичної фізики є задачі зі змішаними крайовими умовами, коли на різних частинах гладкої поверхні задаються граничні умови різного типу. За таких умов деякі характеристики напруженого поля можуть набувати сингулярного характеру в околі точки зміни типу граничних умов. Наявність сингулярностей, як правило, суперечить вихідним припущенням, які формулюються при постановці математичної моделі, що потребує досконалого вивчення і обґрунтування фізичного сенсу таких розв'язків [5].

З метою знаходження фізично коректного закону розподілу дотичних напружень на поверхні тіла при нормальному навантаженні його поверхні сформульовано некласичну задачу математичної фізики, в яку поряд з класичними змішаними умовами введено додаткову вимогу неперервності компонент вектора локального жорсткого повороту $\mathbf{\Omega} = 0.5\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u}$ на межі області навантаження. Ця задача зведена до інтегрального рівняння Фредгольма першого роду, серед множини розв'язків якого методом [1, 3] розривних інтегралів Вебера – Шафгайтліна (В–Ш) віднайдено фізично коректний розв'язок, який задовольняє умову неперервності компонент вектора $\mathbf{\Omega}$. З'ясовано також, що за виконання цієї умови дотичні напруження є неперервними на межі області навантаження і продовжуються поза нею для забезпечення умови балансу моментів.

Якщо прийняти, що зовні області навантаження дотичні напруження дорівнюють нулеві, то на межі області навантаження вони мають кореневу особливість. При цьому математична модель стає фізично некоректною, оскільки компонента вектора локального жорсткого повороту на межі області навантаження має розрив другого роду з кореневою особливістю. Одним із наслідків такого розподілу є виникнення області взаємопроникнення точок.

Розв'язок рівнянь статики пружного тіла у півпросторі $\gamma \ge 0$ за осесиметричної деформації. Однорідний ізотропний пружний півпростір віднесемо до циліндричної системи координат $(R\alpha, \beta, R\gamma)$. Приймаємо, що під дією зовнішнього навантаження у півпросторі реалізується осесиметричний напружено-деформований стан (рис. 1). Тоді для визначення ненульових компонент вектора пружного переміщення $\mathbf{u} = \mathbf{u}(Ru_\alpha, 0, Ru_\gamma)$ маємо систему рівнянь рівноваги

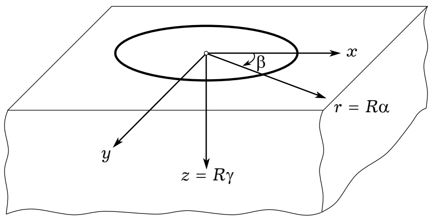

Рис. 1

$$k^2 \partial_\alpha \theta + 2\partial_\gamma \omega_\beta = 0, \quad k^2 \partial_\gamma \theta - 2\alpha^{-1} \partial_\alpha (\alpha \omega_\beta) = 0, \quad k^2 = \lambda + 2\mu/\mu\,, \qquad (1)$$

стосовно об'ємної деформації θ і єдиної у цьому випадку ненульової компоненти $\omega_\beta(\alpha,\gamma)$ вектора $\mathbf{\Omega} = 0.5\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u}$:

$$\theta \equiv \mathrm{div}\,\mathbf{u} = \alpha^{-1}\partial_\alpha(\alpha u_\alpha) + \partial_\gamma u_\gamma ,$$

$$2\omega_\beta \equiv (\mathrm{rot}\,\mathbf{u})_\beta = \partial_\gamma u_\alpha - \partial_\alpha u_\gamma = \varphi_\gamma(\alpha,\gamma) - \varphi_\alpha(\alpha,\gamma) , \tag{2}$$

де $\varphi_\alpha(\alpha,\gamma)$ і $\varphi_\gamma(\alpha,\gamma)$ – пружні кути повороту лінійних елементів, паралельних до координатних осей α і γ відповідно; λ і μ – сталі Ляме.

Безпосередньою підстановкою можна переконатися в тому, що функції

$$\theta(\alpha,\gamma) = -2\int_0^\infty \xi A(\xi) e^{-\xi\gamma} J_0(\alpha\xi)\,d\xi , \quad \omega_\beta(\alpha,\gamma) = k^2 \int_0^\infty \xi A(\xi) e^{-\xi\gamma} J_1(\alpha\xi)\,d\xi \tag{3}$$

є розв'язками системи рівнянь (1) у півпросторі $\gamma \ge 0$. Тут $J_\nu(x)$ – функції Бесселя першого роду порядку ν.

За відомими функціями $\theta(\alpha,\gamma)$ і $\omega_\beta(\alpha,\gamma)$ із системи диференціальних рівнянь (2) визначимо:

– *компоненти вектора пружного переміщення*

$$u_\alpha(\alpha,\gamma) = -\int_0^\infty \left[(k^2+1)A(\xi) - \xi B(\xi)\right] e^{-\xi\gamma} J_1(\alpha\xi)\,d\xi +$$

$$+ (k^2-1)\gamma \int_0^\infty \xi A(\xi) e^{-\xi\gamma} J_1(\alpha\xi)\,d\xi ,$$

$$u_\gamma(\alpha,\gamma) = \int_0^\infty \xi B(\xi) e^{-\xi\gamma} J_0(\alpha\xi)\,d\xi + (k^2-1)\gamma \int_0^\infty \xi A(\xi) e^{-\xi\gamma} J_0(\alpha\xi)\,d\xi ; \tag{4}$$

– *вирази для пружних кутів повороту*

$$\varphi_\alpha(\alpha,\gamma) = -\int_0^\infty \xi^2 B(\xi) e^{-\xi\gamma} J_1(\alpha\xi)\,d\xi - (k^2-1)\gamma \int_0^\infty \xi^2 A(\xi) e^{-\xi\gamma} J_1(\alpha\xi)\,d\xi ,$$

$$\varphi_\gamma(\alpha,\gamma) = \int_0^\infty \left[2k^2 A(\xi) - \xi B(\xi)\right] \xi e^{-\xi\gamma} J_1(\alpha\xi)\,d\xi -$$

$$- (k^2-1)\gamma \int_0^\infty \xi^2 A(\xi) e^{-\xi\gamma} J_1(\alpha\xi)\,d\xi , \tag{5}$$

а за законом Гука та поданнями (4) – *компоненти тензора напружень*

$$\sigma_{\gamma\gamma}(\alpha,\gamma) = 2\mu \int_0^\infty \xi\left[A(\xi) - \xi B(\xi)\right] e^{-\xi\gamma} J_0(\alpha\xi)\,d\xi -$$

$$- 2\mu(k^2-1)\gamma \int_0^\infty \xi^2 A(\xi) e^{-\xi\gamma} J_0(\alpha\xi)\,d\xi , \tag{6}$$

$$\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha,\gamma) \equiv \mu\left[\varphi_\gamma(\alpha,\gamma) + \varphi_\alpha(\alpha,\gamma)\right] =$$

$$= 2\mu \int_0^\infty \xi\left[k^2 A(\xi) - \xi B(\xi)\right] e^{-\xi\gamma} J_1(\alpha\xi)\,d\xi -$$

$$- 2\mu(k^2-1)\gamma \int_0^\infty \xi^2 A(\xi) e^{-\xi\gamma} J_1(\alpha\xi)\,d\xi . \tag{7}$$

У співвідношеннях (3)–(7) $A(\xi)$ і $B(\xi)$ – довільні функції, які визначаються крайовими умовами задачі та забезпечують існування й обмеженість відповідних невласних інтегралів. Зауважимо, що у запропонованій моделі визначальними є компоненти вектора пружного переміщення, оскільки ними відповідно до закону Гука визначаються компоненти тензора напружень.

Постановка та розв'язок класичної задачі деформування півпростору за нормального навантаження в коловій області.

Задача 1. Нехай на границі $\gamma = 0$ пружного півпростору задано такі крайові умови:

$$\sigma_{\gamma\gamma}(\alpha,0) = \begin{cases} -\dfrac{P(1+q)(1-\alpha^2)^q}{\pi}, & 0 \le \alpha \le 1, \\ 0, & 1 < \alpha < \infty, \end{cases} \qquad q > 0, \tag{8}$$

$$\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha,0) \equiv 0, \qquad 0 \le \alpha < \infty. \tag{9}$$

Зауважимо, що інтеграл $2\pi\int\limits_0^1 \sigma_{\gamma\gamma}(\alpha,0)\alpha\, d\alpha = -P$, тобто зі збільшенням параметра $q > 0$ прикладене до поверхні півпростору нормальне навантаження $\sigma_{\gamma\gamma}(\alpha,0)/2\mu$ все більше локалізується в околі точки $\alpha = 0$ і при $q \to \infty$ вироджується в зосереджену силу в початку системи координат (рис. 2).

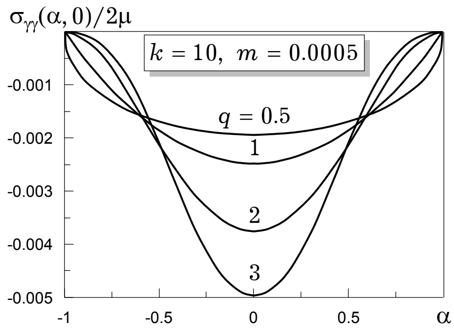

Рис. 2

Тоді відповідно до співвідношення (7) крайова умова (9) виконується, якщо $k^2 A(\xi) = \xi B(\xi)$, а співвідношення (6) разом з крайовою умовою (8) визначають інтегральне рівняння Фредгольма першого роду

$$\int\limits_0^\infty \xi A(\xi) J_0(\alpha\xi)\, d\xi = \frac{P(1+q)(1-\alpha^2)^q}{2\pi\mu(k^2-1)}, \qquad 0 \le \alpha \le 1, \qquad q > 0. \tag{10}$$

Для його розв'язання застосуємо метод розривних інтегралів В–Ш [1, 3], згідно з яким шукану функцію подамо у вигляді узагальненого ряду Неймана

$$A(\xi) = \sum_{n=0}^\infty a_n \frac{J_{2n+q+1}(\xi)}{\xi^{q+1}} \tag{11}$$

із наперед невизначеними коефіцієнтами a_n. Подальші дослідження базуватимуться на властивостях розривного інтегралу В–Ш [4].

Підставивши ряд (11) в інтегральне рівняння (10) та обчисливши розривний інтеграл В–Ш, одержимо в області $0 \le \alpha \le 1$ алгебричне рівняння

$$\sum_{n=0}^\infty a_n \frac{(1-\alpha^2)^q \Gamma(n+1) F(-n; 1+n+q; 1; \alpha^2)}{2^q \Gamma(n+q+1)} = \frac{P(1+q)(1-\alpha^2)^q}{2\mu\pi(k^2-1)},$$

$$0 \le \alpha \le 1, \qquad q > 0. \tag{12}$$

Оскільки рівняння (12) щодо коефіцієнтів a_n є рядом за поліномами Якобі [4] з аргументом $(1-2\alpha^2)$, тобто за функціями $F(-n; 1+n+q; 1; \alpha^2) \equiv$ $\equiv P_n^{(0,q)}(1-2\alpha^2)$, які утворюють повну систему функцій на проміжку $[0, 1]$, то згідно з апроксимаційною теоремою Вейєрштрасса рівняння (12) має єдиний розв'язок – набір коефіцієнтів a_n за довільної неперервної правої частини. У розглядуваному випадку його розв'язок є таким:

$$a_0 = \frac{2^q P\Gamma(2+q)}{2\pi\mu(k^2-1)}, \qquad a_n \equiv 0, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Відповідно до рівності (11) тепер можна записати, що

$$A(\xi) = \frac{2^q P\,\Gamma(2+q)}{2\pi\mu(k^2-1)}\frac{J_{q+1}(\xi)}{\xi^{q+1}} = \frac{2^{q+1} m\Gamma(2+q)}{k^2-1}\frac{J_{q+1}(\xi)}{\xi^{q+1}}, \qquad q > 0\,,$$

де $m = P/4\pi\mu$; μ − модуль зсуву; P − параметр, який має розмірність напружень.

Далі за формулами (3)−(7) обчислимо характеристики напружено-деформованого стану у півпросторі за крайових умов (8), (9) на границі півпростору $\gamma = 0$. У загальному випадку інтеграли можна обчислити числовими методами. Проте на площині $\gamma = 0$ вони вироджуються в розривні інтеграли В−Ш, обчисливши які, отримаємо, що в області $0 \le \alpha \le 1$

$$\theta(\alpha,0) = -4m\frac{q+1}{k^2-1}(1-\alpha^2)^q\,,$$

$$\omega_\beta(\alpha,0) = m\frac{k^2}{k^2-1}\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(q+2)}{\Gamma(q+0.5)}\alpha F(1.5;0.5-q;2;\alpha^2)\,, \tag{13}$$

$$u_\alpha(\alpha,0) = -m\frac{q+1}{k^2-1}\alpha\,F(1;-q;2;\alpha^2)\,,$$

$$u_\gamma(\alpha,0) = m\frac{k^2}{k^2-1}\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(q+2)}{\Gamma(1.5+q)}F(0.5;-0.5-q;1;\alpha^2)\,, \tag{14}$$

$$\varphi_\alpha(\alpha,0) = -\frac{k^2}{k^2-1}\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(2+q)}{\Gamma(0.5+q)}m\alpha F(1.5;0.5-q;2;\alpha^2)\,,$$

$$\varphi_\gamma(\alpha,0) = \frac{k^2}{k^2-1}\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(2+q)}{\Gamma(0.5+q)}m\alpha F(1.5;0.5-q;2;\alpha^2)\,, \tag{15}$$

$$\sigma_{\gamma\gamma}(\alpha,0) = -\frac{1}{\pi}P(1+q)(1-\alpha^2)^q, \qquad \sigma_{\alpha\gamma}(\alpha,0) = 0\,, \tag{16}$$

а в області $1 < \alpha < \infty$ відповідно

$$\theta(\alpha,0) = -\frac{4m}{k^2-1}\alpha^{-2}\frac{F(1;1;2-q;\alpha^{-2})}{\Gamma(0)} = 0\,,$$

$$\omega_\beta(\alpha,0) = m\frac{k^2}{k^2-1}\alpha^{-2}F(1.5;0.5;q+2;\alpha^{-2})\,, \tag{17}$$

$$u_\alpha(\alpha,0) = -\,m\frac{1}{k^2-1}\alpha^{-1}\,,$$

$$u_\gamma(\alpha,0) = m\frac{k^2}{k^2-1}\alpha^{-1}F(0.5;0.5;q+2;\alpha^{-2})\,, \tag{18}$$

$$\varphi_\alpha(\alpha,0) = -\frac{k^2}{k^2-1}m\alpha^{-2}F(1.5;0.5;q+2;\alpha^{-2})\,,$$

$$\varphi_\gamma(\alpha,0) = \frac{k^2}{k^2-1}m\alpha^{-2}F(1.5;0.5;q+2;\alpha^{-2})\,, \tag{19}$$

$$\sigma_{\gamma\gamma}(\alpha,0) = 0, \qquad \sigma_{\alpha\gamma}(\alpha,0) = 0\,. \tag{20}$$

Аналіз формул (15) і (19) для пружних кутів повороту $\varphi_\alpha(\alpha,0)$ та $\varphi_\gamma(\alpha,0)$ вказує на те, що у площині $\gamma = 0$ вони мають різні аналітичні вирази в областях $0 \le \alpha \le 1$ та $1 < \alpha < \infty$. Тому відповідно до гіпотези суцільності на лінії поділу крайових умов $\alpha = 1$ повинні виконуватися граничні рівності

$$\lim_{\alpha\to 1-0} \varphi_\alpha(\alpha, \pm 0) = \lim_{\alpha\to 1+0} \varphi_\alpha(\alpha, \pm 0),$$

$$\lim_{\alpha\to 1-0} \varphi_\gamma(\alpha, \pm 0) = \lim_{\alpha\to 1+0} \varphi_\gamma(\alpha, \pm 0), \tag{21}$$

наслідком яких є [1, 3] рівність

$$\lim_{\alpha\to 1-0} \omega_\beta(\alpha, \pm 0) = \lim_{\alpha\to 1+0} \omega_\beta(\alpha, \pm 0). \tag{22}$$

Оскільки пружні кути повороту $\varphi_\alpha(\alpha,0)$ і $\varphi_\gamma(\alpha,0)$ відповідно до подань (15) і (19) задані гіпергеометричним рядом, збіжним у точці $\alpha = 1$ за умови $c - a - b > 0$, то граничні рівності (21) і, як наслідок, гранична рівність (22), а також друга з умов (8) виконуватимуться, якщо $q > 0$. За виконання цієї нерівності усі означені співвідношеннями (13)–(20) характеристики напружено-деформованого стану неперервні на межі області навантаження $\alpha = 1$ і залежать від параметра q, де $q > 0$.

Зазначимо, також, що відповідно до першої частини формули (7) і крайової умови (9) маємо $\varphi_\gamma(\alpha,\gamma) + \varphi_\alpha(\alpha,\gamma) \equiv 0$, тобто пружні кути повороту у цьому випадку є взаємозв'язані. Отже, цей розв'язок є коректним лише для півпростору, реологічні властивості границі якого задовольняють умову $\varphi_\gamma(\alpha,\gamma) = -\varphi_\alpha(\alpha,\gamma)$.

Покажемо, що за виконання крайової умови (9) і гладкого (8) навантаження границі $\gamma = 0$ у певному об'ємі навколо осі γ при $\alpha = 0$ виникає парадокс взаємопроникнення точок матеріального континууму. Для цього за виразом для $u_\gamma(\alpha,\gamma)$ обчислимо

$$u_\gamma(0,\gamma) = m\left\{\frac{k^2}{k^2-1}\frac{F\big(0.5; 1+q; 2+q; (1+\gamma^2)^{-1}\big)}{\sqrt{1+\gamma^2}} + \right.$$
$$\left. + \frac{\gamma F\big(1; 0,5+q; 2+q; (1+\gamma^2)^{-1}\big)}{1+\gamma^2}\right\}.$$

При цьому парадокс взаємопроникнення точок матеріального континууму на осі γ матиме місце, якщо [2]

$$u_\gamma(0,0) - \big[u_\gamma(0,\gamma) + \gamma\big] > 0. \tag{23}$$

На рис. 3 побудовано графіки нерівності (23) для значень параметра $q = 0.5, 1, 2, 3$, аналіз яких свідчить про те, що зона взаємопроникнення завжди існує і збільшується зі зростанням параметра $q > 0$.

На рис. 4 наведено графіки розподілу дотичних напружень $\sigma_{\alpha\gamma}(1,\gamma)/2\mu$ з глибиною для різних значень параметра q. При цьому прослідковується фізично нереальний розподіл дотичних напружень, оскільки максимального значення вони досягають на певній глибині.

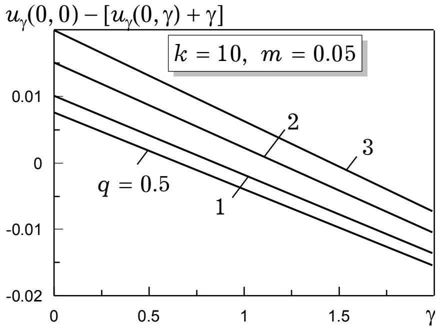

Рис. 3

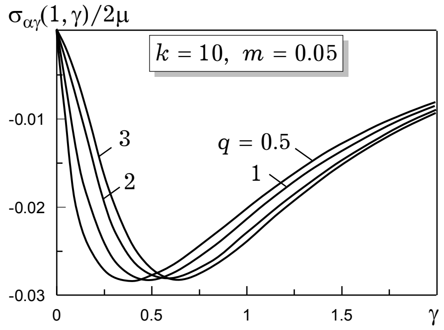

Рис. 4

Задача 2. Нехай на межі пружного півпростору $\gamma = 0$ у коловій області $0 \le \alpha \le 1$ діє нормальне навантаження $\sigma_{\gamma\gamma}(\alpha, 0) = -\frac{1}{\pi} P(1+q)(1-\alpha^2)^q$ таке, як і в *задачі 1*.

Визначимо розподіл дотичних напружень $\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha, 0)$, за якого вертикальні переміщення півпростору $u_\gamma(\alpha, 0)$ будуть відсутні. Для цього розв'яжемо таку некласичну крайову задачу математичної фізики:

$$\sigma_{\gamma\gamma}(\alpha, 0) = -\frac{1}{\pi} P(1+q)(1-\alpha^2)^q, \qquad 0 \le \alpha \le 1,$$

$$\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha, 0) = g(\alpha^2), \qquad 1 < \alpha < \infty, \tag{24}$$

$$u_\gamma(\alpha, 0) = 0, \qquad 0 \le \alpha < \infty,$$

$$\lim_{\alpha \to 1-0} \omega_\beta(\alpha, 0) = \lim_{\alpha \to 1+0} \omega_\beta(\alpha, 0), \tag{25}$$

де $g(\alpha^2)$ – коригувальна функція, яка забезпечує виконання другої з умов (25) і яка може бути визначена за допомогою методу розривних інтегралів В–Ш.

На підставі співвідношення (4) для $u_\gamma(\alpha, \gamma)$ перша з крайових умов (25) буде виконана, якщо $B(\xi) \equiv 0$, а співвідношення (6) разом із першою з крайових умов (24) визначать інтегральне рівняння Фредгольма першого роду

$$\int_0^\infty \xi A(\xi) J_0(\alpha\xi) d\xi = -\frac{1}{2\pi\mu} P(1+q)(1-\alpha^2)^q, \qquad 0 \le \alpha \le 1. \tag{26}$$

Для його розв'язування застосуємо метод розривних інтегралів В–Ш [1, 3], згідно з яким шукану функцію необхідно подати у вигляді узагальненого ряду Неймана

$$\xi A(\xi) = \sum_{n=0}^\infty b_n \frac{J_{2n+q+1}(\xi)}{\xi^q} \tag{27}$$

з невизначеними коефіцієнтами b_n.

Підставивши ряд (27) в інтегральне рівняння (26) та обчисливши розривний інтеграл В–Ш, в області $0 \le \alpha \le 1$ одержимо алгебричне рівняння

$$\sum_{n=0}^\infty b_n \frac{(1-\alpha^2)^q \Gamma(n+1) F(-n; 1+n+q; 1; \alpha^2)}{2^q \Gamma(n+q+1)} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi\mu} P(1+q)(1-\alpha^2)^q, \qquad 0 \le \alpha \le 1. \tag{28}$$

Оскільки рівняння (28) щодо коефіцієнтів b_n є рядом за поліномами Якобі [4] з аргументом $(1-2\alpha^2)$, тобто за функціями $F(-n; 1+n+q; 1; \alpha^2) \equiv$ $\equiv P_n^{(0,q)}(1-2\alpha^2)$, які утворюють повну систему функцій на проміжку $[0, 1]$, то згідно з апроксимаційною теоремою Вейєрштрасса про наближення неперервної функції поліномом існує єдиний набір коефіцієнтів b_n, який є розв'язком рівняння (28) за довільної неперервної правої частини. У розглядуваному випадку розв'язок є таким:

$$b_0 = -\frac{P}{2\pi\mu} 2^q \Gamma(2+q) = -2^{q+1} m \Gamma(2+q), \qquad b_n \equiv 0, \qquad n \in \mathbb{N},$$

і відрізняється знаком від a_0 із задачі 1.

Відповідно до подання (27) тепер можна записати, що

$$A(\xi) = b_0 \frac{J_{q+1}(\xi)}{\xi^{q+1}}.$$

Далі за формулами (3)–(7) можна обчислити характеристики напружено-деформованого стану у півпросторі за умов (24), (25). У загальному випадку інтеграли можна обчислити числовими методами. Проте на площині $\gamma = 0$ вони вироджуються в розривні інтеграли В–Ш, обчисливши які, отримаємо, що в області $0 \le \alpha \le 1$

$$\theta(\alpha,0) = 4m(q+1)(1-\alpha^2)^q,$$

$$\omega_\beta(\alpha,0) = -k^2 m \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(2+q)}{\Gamma(0.5+q)} \alpha F(1.5; 0.5-q; 2; \alpha^2), \quad (29)$$

$$u_\alpha(\alpha,0) = m(q+1)\alpha F(1;-q;2;\alpha^2), \qquad u_\gamma(\alpha,0) = 0, \quad (30)$$

$$\varphi_\alpha(\alpha,0) = 0, \qquad \varphi_\gamma(\alpha,0) = -2k^2 m \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(2+q)}{\Gamma(0.5+q)} \alpha F(1.5; 0.5-q; 2; \alpha^2), \quad (31)$$

$$\sigma_{\gamma\gamma}(\alpha,0) = -\frac{1}{\pi} P(1+q)(1-\alpha^2)^q,$$

$$\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha,0) = -2\mu k^2 m \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(2+q)}{\Gamma(0.5+q)} \alpha F(1.5; 0.5-q; 2; \alpha^2), \quad (32)$$

а в області $1 < \alpha < \infty$ відповідно

$$\theta(\alpha,0) = 4m\alpha^{-2} \frac{F(1;1;2-q;\alpha^{-2})}{\Gamma(0)} = 0,$$

$$\omega_\beta(\alpha,0) = -k^2 m\alpha^{-2} F(1.5; 0.5; q+2; \alpha^{-2}), \quad (33)$$

$$u_\alpha(\alpha,0) = m\alpha^{-1}, \qquad u_\gamma(\alpha,0) = 0, \quad (34)$$

$$\varphi_\alpha(\alpha,0) = 0, \qquad \varphi_\gamma(\alpha,0) = -2k^2 m\alpha^{-2} F(1.5; 0.5; q+2; \alpha^{-2}), \quad (35)$$

$$\sigma_{\gamma\gamma}(\alpha,0) = 0, \qquad \sigma_{\alpha\gamma}(\alpha,0) = -2\mu k^2 m\alpha^{-2} F(1.5; 0.5; q+2; \alpha^{-2}) = g(\alpha^2). \quad (36)$$

Аналіз формул (31) і (35) для пружних кутів повороту $\varphi_\alpha(\alpha,0)$ і $\varphi_\gamma(\alpha,0)$ вказує на те, що у площині $\gamma = 0$ вони мають різні аналітичні вирази в областях $0 \le \alpha \le 1$ та $1 < \alpha < \infty$, і за умови $q > 0$ вони є неперервними.

Таким чином, за виконання умов (24) і (25) існує єдиний фізично коректний розв'язок сформульованої задачі, у якому не існує парадоксу взаємопроникнення точок матеріального континууму, при цьому коригувальна функція $g(\alpha^2)$ має єдиний закон розподілу (36).

На рис. 5 наведено графіки розподілу дотичних напружень $\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha,0)$ на границі півпростору $\gamma = 0$ для різних значень параметра q, який визначає локалізованість навантаження. Аналіз числових розрахунків вказує на те, що дотичні напруження $\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha,0)$ у цьому випадку є неперервними на межі $\alpha = 1$ і заникають на безмежності відповідно до принципу Сен – Венана. При цьому зі збільшенням локалізованого навантаження максимум дотичних напружень зростає і зміщується до центру області навантаження, тобто при перевищенні межі допустимих значень в області навантаження може появитися пластична деформація або крихке руйнування. Зауважимо, що, коли $q = 0.5$, дотичні напруження в області навантаження змінюються за лінійним законом.

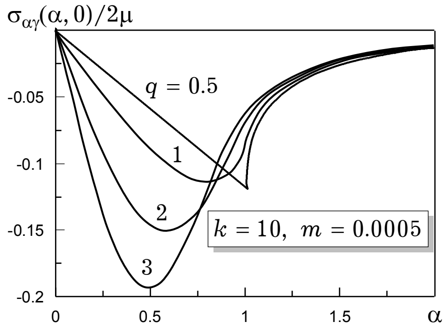

Рис. 5

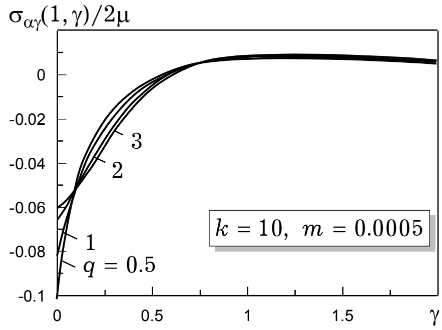

Рис. 6

На рис. 6 наведено залежності дотичних напружень $\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha,\gamma)$ на межі області навантаження $\alpha = 1$ від глибини γ для значень параметра $q = 0.5, 1$, 2, 3. Аналіз числових розрахунків вказує на те, що, як і повинно бути, дотичні напруження досягають максимального значення на границі $\gamma = 0$ в точці $\alpha = 1$, на певній глибині змінюють знак і заникають на безмежності.

Некласична математична модель деформування за нормального рівномірно розподіленого навантаження в коловій області. Нехай на межі пружного півпростору $\gamma = 0$ у коловій області $0 \le \alpha \le 1$ діє рівномірно розподілене навантаження інтенсивності p. Визначимо розподіл дотичних напружень $\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha,0)$, за якого вертикальні переміщення півпростору $u_\gamma(\alpha,0)$ будуть відсутні. Для цього розв'яжемо таку некласичну крайову задачу математичної фізики:

$$\sigma_{\gamma\gamma}(\alpha,0) = -p, \qquad 0 \le \alpha \le 1, \qquad \sigma_{\alpha\gamma}(\alpha,0) = g(\alpha^2), \qquad 1 < \alpha < \infty\,, \tag{37}$$

$$u_\gamma(\alpha,0) = 0, \qquad 0 \le \alpha < \infty, \qquad \lim_{\alpha\to 1-0} \omega_\beta(\alpha,0) = \lim_{\alpha\to 1+0} \omega_\beta(\alpha,0)\,, \tag{38}$$

де $g(\alpha^2)$ – коригувальна функція, яка забезпечує виконання другої з умов (37) і може бути побудована за допомогою розривних інтегралів В–Ш.

Відповідно до другого зі співвідношень (4) перша з крайових умов (38) буде виконана, якщо $B(\xi) \equiv 0$, а співвідношення (6) разом із першою з крайових умов (37) визначать інтегральне рівняння Фредгольма першого роду

$$\int_0^\infty \xi A(\xi) J_0(\alpha\xi)\, d\xi = -\frac{p}{2\mu}, \qquad 0 \le \alpha \le 1\,. \tag{39}$$

Для його розв'язування застосуємо метод розривних інтегралів В–Ш [1, 3], згідно з яким шукану функцію необхідно подати у вигляді узагальненого ряду Неймана з невизначеними коефіцієнтами c_n:

$$\xi A(\xi) = \sum_{n=0}^\infty c_n \frac{J_{2n-q+1}(\xi)}{\xi^q}\,. \tag{40}$$

Підставивши ряд (40) в інтегральне рівняння (39) та обчисливши розривний інтеграл В–Ш, в області $0 \le \alpha \le 1$ одержимо алгебричне рівняння стосовно невідомих коефіцієнтів c_n:

$$\sum_{n=0}^\infty c_n \frac{\Gamma(n-q+1) F(n-q+1;-n;1;\alpha^2)}{2^q\,\Gamma(n+1)} = -\frac{p}{2\mu}, \qquad 0 \le \alpha \le 1\,. \tag{41}$$

Оскільки рівняння (41) щодо коефіцієнтів c_n є рядом за поліномами Якобі [4] з аргументом $(1-2\alpha^2)$, тобто за функціями $F(n-q+1;-n;1;\alpha^2) \equiv$

$\equiv P_n^{(0,-q)}(1-2\alpha^2)$, які утворюють повну систему функцій на проміжку $[0,1]$, то згідно з апроксимаційною теоремою Вейєрштрасса про наближення неперервної функції поліномом рівняння (41) має єдиний розв'язок – набір коефіцієнтів c_n за довільної неперервної правої частини. У розглядуваному випадку сталої правої частини його розв'язок є таким:

$$c_0 = -\frac{P}{2\mu}\frac{2^q}{\Gamma(1-q)} = -\pi m\,\frac{2^{q+1}}{\Gamma(1-q)}, \qquad c_n \equiv 0, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Відповідно до подання (40) тепер можна записати, що

$$\xi A(\xi) = c_0\,\frac{J_{1-q}(\xi)}{\xi^q}.$$

За формулами (3)–(7) можна обчислити характеристики напружено-деформованого стану у півпросторі за умов (37), (38). У загальному випадку інтеграли можна обчислити чисельними методами. Проте на площині $\gamma = 0$ вони вироджуються у розривні інтеграли В–Ш, обчисливши які, отримаємо, що в області $0 \le \alpha \le 1$

$$\theta(\alpha,0) = 4\pi m, \quad \omega_\beta(\alpha,0) = -2k^2 m\,\frac{\Gamma(1.5-q)\sqrt{\pi}}{\Gamma(1-q)}\,\alpha F(1.5-q;0,5;2;\alpha^2), \tag{42}$$

$$u_\alpha(\alpha,0) = \pi(k^2+1)m\alpha, \qquad u_\gamma(\alpha,0) = 0, \tag{43}$$

$$\varphi_\alpha(\alpha,0) = 0, \quad \varphi_\gamma(\alpha,0) = -4\sqrt{\pi}k^2 m\,\frac{\Gamma(1.5-q)}{\Gamma(1-q)}\,\alpha F(1.5-q;0.5;2;\alpha^2), \tag{44}$$

$$\sigma_{\gamma\gamma}(\alpha,0) = -p, \quad \sigma_{\alpha\gamma}(\alpha,0) = -4\mu\sqrt{\pi}k^2 m\,\frac{\Gamma(1.5-q)}{\Gamma(1-q)}\,\alpha F(1.5-q;0.5;2;\alpha^2), \tag{45}$$

а в області $1 < \alpha < \infty$ відповідно

$$\theta(\alpha,0) = -4\pi m\,\frac{F(1-q;1-q;2-q;\alpha^{-2})}{\alpha^{2-2q}\,\Gamma(2-q)\,\Gamma(q)},$$

$$\omega_\beta(\alpha,0) = -2\pi k^2 m\,\frac{\Gamma(1.5-q)\,F(1.5-q;0.5-q;2-q;\alpha^{-2})}{\alpha^{2-2q}\Gamma(0.5+q)\,\Gamma(1-q)\,\Gamma(2-q)}, \tag{46}$$

$$u_\alpha(\alpha,0) = \pi m\,\frac{F(1-q;-q;2-q;\alpha^{-2})}{\alpha^{1-2q}\,\Gamma(2-q)\,\Gamma(1+q)}, \qquad u_\gamma(\alpha,0) = 0, \tag{47}$$

$$\varphi_\alpha(\alpha,0) = 0, \ \varphi_\gamma(\alpha,0) = -4\pi k^2 m\,\frac{\Gamma(1.5-q)F(1.5-q;0.5-q;2-q;\alpha^{-2})}{\alpha^{2-2q}\Gamma(0.5+q)\Gamma(1-q)\Gamma(2-q)}, \tag{48}$$

$$\sigma_{\gamma\gamma}(\alpha,0) = -4\pi\mu m\,\frac{F(1-q;1-q;2-q;\alpha^{-2})}{\alpha^{2-2q}\,\Gamma(2-q)\,\Gamma(q)},$$

$$\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha,0) = -4\pi\mu k^2 m\,\frac{\Gamma(1.5-q)\,F(1,5-q;0,5-q;2-q;\alpha^{-2})}{\alpha^{2-2q}\,\Gamma(0,5+q)\,\Gamma(1-q)\,\Gamma(2-q)}. \tag{49}$$

Аналіз формул (44) і (48) для пружних кутів повороту $\varphi_\alpha(\alpha,0)$ і $\varphi_\gamma(\alpha,0)$ вказує на те, що у площині $\gamma = 0$ вони мають різні аналітичні вирази в областях $0 \le \alpha \le 1$ та $1 < \alpha < \infty$. Тому згідно з гіпотезою суцільності на лінії поділу крайових умов $\alpha = 1$ повинні виконуватися граничні рівності (21), наслідком яких є рівність (22).

Оскільки пружні кути повороту $\varphi_\alpha(\alpha,0)$ і $\varphi_\gamma(\alpha,0)$ відповідно до подань (44) і (48) задані гіпергеометричним рядом, збіжним у точці $\alpha = 1$ за умови $c - a - b > 0$, то граничні рівності (21) і, як наслідок, гранична рівність (22) або друга з умов (38) виконуватимуться, якщо $0 < q < 0.5$. За виконання цієї нерівності усі означені співвідношеннями (42)−(49) характеристики напружено-деформованого стану неперервні на межі області навантаження $\alpha = 1$ і залежать від параметра q, $0 < q < 0.5$, причому за умови $q < 0.5$ напружено деформований стан заникає на безмежності.

Таким чином, за умови $0 < q < 0.5$ відповідно до співвідношення (49) нормальне напруження $\sigma_{\gamma\gamma}(\alpha, 0)$ неперервно продовжується в область $1 < \alpha < \infty$ і викликає нормальне довантаження границі $\gamma = 0$. Очевидно, що це довантаження можна зреалізувати за умови, що фізична границя тіла забезпечує неперервність пружних поворотів. Якщо $q = 0$, то це довантаження відсутнє, проте усі інші характеристики напружено-деформованого стану, означені співвідношеннями (42)−(49), мають на межі $\alpha = 1$ області навантаження логарифмічну особливість. Натомість дотичне напруження $\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha, 0)$ в області $1 < \alpha < \infty$ співвідношенням (49) визначає коригувальну функцію $g(\alpha^2)$, яка у класичній постановці завжди дорівнює нулеві.

Коригувальна функція $g(\alpha^2)$, яка залежить від параметра $0 < q < 0.5$, досягає максимального значення на лінії $\alpha = 1$:

$$\sigma_{\alpha\gamma}^{\max} = \sigma_{\alpha\gamma}(1, 0) = g(1) = -\,8\mu k^2 m\,\frac{\Gamma(q)\,\Gamma(1.5 - q)}{\Gamma(q + 0.5)\,\Gamma(1 - q)}\,.$$

Тому при досягненні допустимого рівня дотичних напружень у точці $\alpha = 1$ може відбутися пластичне деформування або розтріскування матеріалу. На рис. 7 і 8 зображено розподіли нормальних і дотичних напружень, обчислені за формулами (45) і (49), для різних значень параметра $0 < q < 0.5$ (суцільні лінії) та у класичному випадку, коли $q = -0.5$ (штрихова лінія) [2].

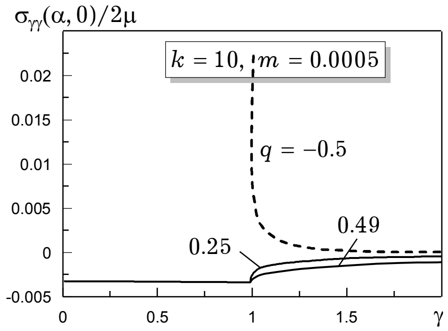

Рис. 7

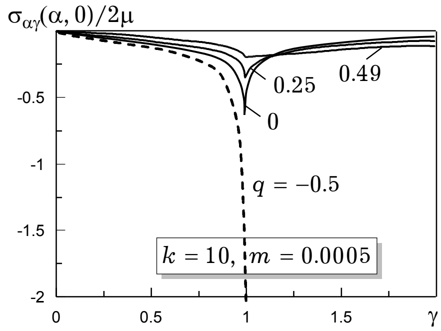

Рис. 8

Класична математична модель деформування за нормального рівномірно розподіленого навантаження у коловій області. Якщо реологічні властивості фізичної межі пружного півпростору допускають можливість розриву пружних кутів повороту, зокрема, на межі області навантаження, то слід прийняти $q = -0.5$. Тоді, використовуючи формули підсумовування [4] гіпергеометричної функції Ґаусса, відповідно до співвідношень (42)−(49) одержимо, що в області $0 \le \alpha \le 1$

$$\theta(\alpha, 0) = 4\pi m, \qquad \omega_\beta(\alpha, 0) = -\,4k^2 m\,\frac{\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}}\,, \tag{50}$$

$$u_\alpha(\alpha, 0) = \pi(k^2 + 1)m\alpha, \qquad u_\gamma(\alpha, 0) = 0\,, \tag{51}$$

$$\varphi_\alpha(\alpha, 0) = 0, \qquad \varphi_\gamma(\alpha, 0) = -\,8k^2 m\,\frac{\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}}\,, \tag{52}$$

$$\sigma_{\gamma\gamma}(\alpha, 0) = -p, \qquad \sigma_{\alpha\gamma}(\alpha, 0) = -\,8k^2 m\,\frac{\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}}\,, \tag{53}$$

а в області $1 < \alpha < \infty$ відповідно

$$\theta(\alpha, 0) = -24m\left[\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}} - \arcsin\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right], \qquad \omega_\beta(\alpha, 0) = 0\,, \tag{54}$$

$$u_\alpha(\alpha, 0) = 2m\left[\alpha \arcsin\left(\frac{1}{\alpha}\right) - \frac{\sqrt{\alpha^2 - 1}}{\alpha}\right], \qquad u_\gamma(\alpha, 0) = 0\,, \tag{55}$$

$$\varphi_\alpha(\alpha, 0) = 0, \qquad \varphi_\gamma(\alpha, 0) = 0\,, \tag{56}$$

$$\sigma_{\gamma\gamma}(\alpha, 0) = 24\mu m\left[\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}} - \arcsin\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right], \qquad \sigma_{\alpha\gamma}(\alpha, 0) = 0\,. \tag{57}$$

Аналіз виразів (50)–(57) свідчить про те, що за умови рівності нулеві дотичних напружень поза областю навантаження математична модель напружено-деформованого стану є фізично некоректною, оскільки суперечить гіпотезі суцільності. Справді, відповідно до співвідношень (50) і (54) компонента $\omega_\beta(\alpha, 0)$ вектора локального жорсткого повороту $\mathbf{\Omega}$ на лінії $\alpha = 1$ має розрив другого роду. З фізичної точки зору це означає, що на лінії $\alpha = 1$ повинно виникнути взаємопроникнення безмежно малих пружних елементів внаслідок розриву пружних поворотів. Відповідно до співвідношень (21), (54) це призводить до невизначеності характеру деформування на лінії $\alpha = 1$, оскільки об'ємна деформація $\theta(\alpha, 0)$ там має розрив другого роду зі зміною знаку, що порушує її інваріантність. Разом з тим дотичні напруження $\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha, 0)$ в області навантаження на лінії $\alpha = 1$ мають кореневу особливість і локально порушують симетрію тензора напружень.

Висновки. Показано, що математична модель деформування півпростору за нормального навантаження в коловій області за умови відсутності дотичних напружень на границі є фізично некоректною, оскільки існує парадокс взаємопроникнення точок матеріального континууму.

Доведено, що за нормального навантаження границі пружного півпростору в коловій області з нульовим значенням на її межі завжди існує єдиний закон розподілу дотичних напружень, за якого вертикальні переміщення границі дорівнюють нулеві.

Показано, що за довільного нормального навантаження границі пружного півпростору в коловій області існує множина розподілів дотичних напружень, які є неперервними на межі області навантаження і залежать від параметра $0 < q < 0.5$, який характеризує реологічні властивості межового шару.

Доведено, що за умови $q = -0.5$ дотичні напруження зовні області навантаження дорівнюють нулеві, а в області навантаження на її межі мають кореневу особливість. При цьому виникає розрив пружного кута повороту $\varphi_\gamma(1, 0)$ на межі $\alpha = 1$, що зумовлює порушення гіпотези суцільності.

1. *Галазюк В. А., Ващишин А. Я.* Ефект дотичних напружень за чистого кручення границі пружного півпорстору в коловій області // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Мех.-мат. – 2005. – Вип. 64. – С. 67–76.
2. *Галазюк В. А., Сулим Г. Т.* Математична модель деформування пружного півпростору за дії нормального навантаження на його границі // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2006. – Вип. 3. – С. 29–41.
3. *Галазюк В. А., Сулим Г. Т.* Рівновага дискової щілини з поверхневим шаром з реологічними властивостями // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2004. – **40,** № 4. – С. 17–33.
4. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений. – Москва: Физматгиз, 1963. – 1100 с.
5. *Гринченко В. Т., Улитко А. Ф.* О локальных особенностях в математических моделях физических полей // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1998. – **41,** № 1. – С. 12–34.

ЭФФЕКТ ГРАНИЧНОГО СЛОЯ ПРИ ДЕФОРМИРОВАНИИ ГРАНИЦЫ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА ПРОИЗВОЛЬНОЙ НОРМАЛЬНОЙ НАГРУЗКОЙ

Предположение о равенстве нулю касательных напряжений на границе упругого полупространства при ее гладкой нормальной нагрузке предопределяет парадокс взаимопроникновения точек материального континуума. При этом показано, что для избежания этой физической некорректности достаточно предположить, что граница тела обладает реологическими свойствами, которые позволяют регулировать ее вертикальные перемещения распределением на ней по определенному закону касательных напряжений. Доказано, что всегда существует такой закон распределения касательных напряжений, при котором вертикальные перемещения границы являются нулевыми при произвольной нормальной нагрузке.

EFFECT OF BOUNDARY LAYER AT STRAIN OF ELASTIC HALF-SPACE BOUNDARY BY ARBITRARY NORMAL LOADING

The assumption on vanishing of the tangential stresses on the boundary of elastic half-space subject to smooth normal load causes a paradox of infiltration of points of material continuum. We demonstrate that in order to avoid this physical ill-posedness it is sufficient to assume that the boundary of the solid satisfies some flow properties that allow us to regulate its vertical displacements by means of distribution of tangential stresses on it according to a certain law. It is proved that there always exists such a distribution law that the vertical displacements of the boundary are equal to zero under arbitrary normal load.

Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів

Одержано
05.05.06