

**ОСЕСИМЕТРИЧНА ЗАДАЧА ПРО ПРИПОВЕРХНЕВУ  
ТРИЩИНУ НОРМАЛЬНОГО ВІДРИВУ В КОМПОЗИТНОМУ  
МАТЕРІАЛІ З ЗАЛИШКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ**

*У рамках лінеаризованої механіки деформівного твердого тіла з використанням континуальної моделі композита досліджено задачу про дископодібну тріщину нормального відриву в напівскінченному композитному матеріалі з початковими (залишковими) напруженнями, які діють уздовж тріщини. Наведено розв'язувальну систему інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду та вирази для коефіцієнтів інтенсивності напружень в околі тріщини. Для двох типів композитів – шаруватого композитного матеріалу з ізотропними шарами та композита зі стохастичним армуванням у площині ізотропної короткими волокнами – отримано чисельні залежності коефіцієнтів інтенсивності напружень від початкових (залишкових) напружень, фізико-механічних характеристик матеріалу та геометричних параметрів задачі.*

**1. Вступ.** Технологічні процеси виготовлення композитних матеріалів часто призводять до виникнення внутрішніх (технологічних) полів напружень і деформацій, які необхідно враховувати при розрахунку виробів під дією подальших експлуатаційних навантажень. Зокрема, зазначені початкові (залишкові) напруження і деформації можуть суттєво впливати на умови росту тріщин і тріщиноподібних дефектів у композитах [10]. Разом з тим, у випадку, коли початкові напруження спрямовані вздовж площини зазначених дефектів, їх не можна адекватно врахувати методами класичної лінійної механіки руйнування. Це пов'язано з тим, що вказані напруження не входять у вирази для коефіцієнтів інтенсивності напружень і величини розкриття тріщин, а тому не враховуються у класичних критеріях руйнування типу Гріффітса – Ірвіна.

Для дослідження закономірностей впливу на напружено-деформований стан матеріалів з тріщинами початкових (або залишкових) напружень, які діють уздовж тріщин, у роботах [3, 11] було запропоновано підхід у рамках лінеаризованої механіки деформівних тіл з початковими напруженнями. Із використанням зазначеного підходу було отримано розв'язки окремих класів статичних і динамічних задач, переважно для ізольованих тріщин у нескінченних тілах з початковими напруженнями (стислий огляд зазначених робіт наведено в [2–4, 12]). В [1] досліджено задачу про тріщину нормального відриву в однорідному ізотропному високоеластичному матеріалі.

У пропонованій роботі будемо розглядати задачу про руйнування попередньо напруженого композитного матеріалу з приповерхневою круговою тріщиною нормального відриву, паралельною до вільної поверхні матеріалу. При цьому будемо досліджувати тріщини, мінімальні розміри яких значно більші від розмірів структурних елементів композита, тобто макротріщини. Крім того, не будемо розглядати процеси руйнування, у яких проявляються властивості композитів як кусково-однорідних середовищ (типу руйнування на границі поділу середовищ). При таких припущеннях можна використовувати континуальну модель композитного матеріалу [10].

Оскільки більшість композитних матеріалів є відносно жорсткими, будемо використовувати основні співвідношення другого варіанту теорії малих початкових деформацій (за термінологією [3]), для якого початковий стан, зумовлений дією початкових (залишкових) напружень і деформацій, визначається за геометрично лінійною теорією. У зв'язку з цим при використанні лінеаризованих співвідношень для збурень тензора напружень і вектора переміщень можна не робити різниці між координатами недеформованого та початково деформованого стану, а також між компонентами тензорів, які визначаються в координатах зазначених станів.

**2. Постановка задачі.** При розв'язуванні задачі будемо використовувати лагранжеві координати  $x_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , які в недеформованому стані збігаються з декартовими, а також отримані з них кругові циліндричні координати  $r, \theta, x_3$ .

Розглянемо кругову тріщину радіуса  $a$ , яка розташована у верхньому півпросторі  $x_3 \geq -h$  у площині  $x_3 = 0$  з центром на осі  $Ox_3$ . У тілі під дією початкових (залишкових) напружень розтягу (або стиску)  $\sigma_{ij}^0$ , які діють у площині  $x_3 = \text{const}$ , реалізується однорідний початковий стан з напруженнями та переміщеннями, що визначаються співвідношеннями

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^0 &= 0, & \sigma_{11}^0 &= \sigma_{22}^0 \neq 0, & \sigma_{11}^0 &= \text{const}, \\ u_j^0 &= \delta_{jm}(\lambda_j - 1)x_m, & \lambda_1 &= \lambda_2 \neq \lambda_3, & \lambda_j &= \text{const}, \end{aligned} \quad (1)$$

де  $\lambda_j$  – коефіцієнти подовження (стиску) вздовж осей.

Припустимо, що до берегів тріщини прикладені достатньо малі порівняно з  $\sigma_{11}^0$  нормальні напруження  $\sigma(r)$ , а границя півпростору вільна від зусиль. Тоді, обмежуючись розглядом осесиметричної задачі, отримуємо такі граничні умови:

$$\begin{aligned} t_{33} &= -\sigma(r), & t_{3r} &= 0, & x_3 &= \pm 0, & 0 \leq r < a, \\ t_{33} &= 0, & t_{3r} &= 0, & x_3 &= -h, & 0 \leq r < \infty, \end{aligned} \quad (2)$$

де  $t_{ij}$  – компоненти несиметричного тензора напружень Кірхгофа.

У роботах [3, 11] побудовано представлення загальних розв'язків лінеаризованих рівнянь рівноваги через гармонічні потенціальні функції, вигляд яких залежить від коренів  $n_1$  і  $n_2$  відповідного характеристичного рівняння. Для випадку неоднакових коренів ( $n_1 \neq n_2$ ), який, як правило, реалізується для композитів, зазначені розв'язки будуть такими:

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{\partial}{\partial r}(\varphi_1 + \varphi_2), & u_3 &= m_1 n_1^{-1/2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1} + m_2 n_2^{-1/2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial z_2}, \\ t_{33} &= C_{44} \left( d_1 \ell_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z_1^2} + d_2 \ell_2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z_2^2} \right), \\ t_{3r} &= C_{44} \frac{\partial}{\partial r} \left( n_1^{-1/2} d_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1} + n_2^{-1/2} d_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z_2} \right), \end{aligned} \quad (3)$$

де  $z_i \equiv n_i^{-1/2} x_3$ ,  $i = 1, 2$ , а функції  $\varphi_i(r, z_i)$  є гармонічними. Величини  $C_{44}$ ,  $m_i$ ,  $\ell_i$ ,  $n_i$ ,  $d_i$ ,  $i = 1, 2$ , залежать від початкових напружень і характеристик матеріалу. Для випадку лінійної моделі матеріалу, який розглядається, маємо

$$\begin{aligned} n_{1,2} &= \frac{1}{2} (\mu_{13} + \sigma_{11}^0)^{-1} (a_{11} + \sigma_{11}^0)^{-1} \{ (a_{11} a_{33} + \sigma_{11}^0 a_{33} + \sigma_{11}^0 \mu_{13} - \\ &\quad - 2a_{13} \mu_{13} - a_{13}^2) \pm [(a_{11} a_{33} + \sigma_{11}^0 a_{33} + \sigma_{11}^0 \mu_{13} - \\ &\quad - 2a_{13} \mu_{13} - a_{13}^2)^2 - 4(a_{11} + \sigma_{11}^0)(\mu_{13} + \sigma_{11}^0) \mu_{13} a_{33}]^{1/2} \}, \\ C_{44} &= \mu_{13}, & m_j &= [(a_{11} + \sigma_{11}^0) n_j - \mu_{13}] (a_{13} + \mu_{13})^{-1}, & d_j &= 1 + m_j, \\ \ell_j &= [n_j (a_{11} a_{33} + \sigma_{11}^0 a_{33} - a_{13}^2 - a_{13} \mu_{13}) - a_{33} \mu_{13}] [n_j (a_{11} + \sigma_{11}^0) + \\ &\quad + a_{13}]^{-1} n_j^{-1} \mu_{13}^{-1}. \end{aligned} \quad (4)$$

У випадку композита з наведеними вище характеристиками трансверсально-ізотропного тіла параметри  $a_{ij}$ ,  $\mu_{ij}$  не залежать від значень початкових напружень  $\sigma_{11}^0$  і виражаються через технічні константи:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{a} E(1 - \nu' \nu''), & a_{33} &= \frac{1}{a} E'(1 - \nu^2), & a_{13} &= \frac{1}{a} E \nu'(1 + \nu), \\ a &= 1 - \nu^2 - 2\nu' \nu'' - 2\nu \nu' \nu'', & \mu_{12} &= G \equiv G_{12} = \frac{1}{2} E(1 + \nu)^{-1}, \\ \mu_{13} &= G' \equiv G_{13}, & \nu &\equiv \nu_{12}, & \nu' &\equiv \nu_{31}, & \nu'' &\equiv \nu_{13}. \end{aligned} \quad (5)$$

Розділимо тіло, що розглядається, на дві підобласті: «1» – півпростір  $x_3 \geq 0$  та «2» – шар  $-h \leq x_3 \leq 0$ . Враховуючи, що на границі цих областей поза тріщиною переміщення і напруження мають бути неперервними, та беручи до уваги граничні умови (2), можемо переформулювати задачу у вигляді:

$$u_3^{(1)} = u_3^{(2)}, \quad u_r^{(1)} = u_r^{(2)}, \quad x_3 = 0, \quad r \geq a, \quad (6)$$

$$t_{33}^{(1)} = t_{33}^{(2)}, \quad t_{3r}^{(1)} = t_{3r}^{(2)}, \quad x_3 = 0, \quad 0 \leq r < \infty, \quad (7)$$

$$t_{33}^{(2)} = -\sigma(r), \quad t_{3r}^{(2)} = 0, \quad x_3 = 0, \quad 0 \leq r < a, \quad (8)$$

$$t_{33}^{(2)} = 0, \quad t_{3r}^{(2)} = 0, \quad x_3 = -h, \quad 0 \leq r < \infty. \quad (9)$$

**3. Розв'язок задачі.** Далі зведемо задачу до системи парних інтегральних рівнянь, а потім – до системи інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду.

Виразимо гармонічні функції  $\phi_1$  та  $\phi_2$ , що використовуються у зображеннях загальних розв'язків (3), у кожній з областей «1» та «2» у вигляді інтегральних розкладів Ганкеля нульового порядку за координатою  $r$ :

$$\begin{aligned} \phi_1^{(1)}(r, z_1) &= \int_0^\infty A(\lambda) e^{-\lambda z_1} J_0(\lambda r) \frac{d\lambda}{\lambda}, \\ \phi_2^{(1)}(r, z_2) &= \int_0^\infty B(\lambda) e^{-\lambda z_2} J_0(\lambda r) \frac{d\lambda}{\lambda}, \\ \phi_1^{(2)}(r, z_1) &= \int_0^\infty [C_1(\lambda) \operatorname{ch} \lambda(z_1 + h_1) + C_2(\lambda) \operatorname{sh} \lambda(z_1 + h_1)] \frac{J_0(\lambda r)}{\lambda \operatorname{sh} \lambda h_1} d\lambda, \\ \phi_2^{(2)}(r, z_2) &= \int_0^\infty [D_1(\lambda) \operatorname{ch} \lambda(z_2 + h_2) + D_2(\lambda) \operatorname{sh} \lambda(z_2 + h_2)] \frac{J_0(\lambda r)}{\lambda \operatorname{sh} \lambda h_2} d\lambda, \end{aligned} \quad (10)$$

де  $h_i = h n_i^{-1/2}$ ,  $i = 1, 2$ .

Умови (7) та (9), задані на всій області  $x_3 = \text{const}$ , дозволяють виразити невідомі функції  $A(\lambda)$ ,  $B(\lambda)$ ,  $D_j(\lambda)$  через функції  $C_j(\lambda)$ ,  $j = 1, 2$ . Із умов (6) і (8) отримуємо систему парних інтегральних рівнянь:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left[ C_1(\lambda) (\operatorname{cth} \mu_1 - \gamma \operatorname{cth} \mu_2) + C_2(\lambda) \left( 1 - \frac{k_2}{k_1} \gamma \right) \right] J_0(\lambda r) \lambda d\lambda = \\ = -\frac{\sigma(r)}{C_{44} d_1 \ell_1}, \quad r < a, \end{aligned}$$

$$\int_0^{\infty} \left[ C_1(\lambda) \left( 1 - \frac{k_1}{k_2} \gamma \right) + C_2(\lambda) (\text{cth } \mu_1 - \gamma \text{cth } \mu_2) \right] J_1(\lambda r) \lambda d\lambda = 0, \quad r < a,$$

$$\int_0^{\infty} X_1 J_0(\lambda r) d\lambda = 0, \quad r > a, \quad \int_0^{\infty} X_2 J_1(\lambda r) d\lambda = 0, \quad r > a, \quad (11)$$

де введено такі позначення:

$$X_1 = C_1(\lambda) \frac{k_1}{k} \left[ (1 + \text{cth } \mu_1) - \gamma(1 + \text{cth } \mu_2) \right] + C_2(\lambda) \frac{k_2}{k} \left[ \frac{k_1}{k_2} (1 + \text{cth } \mu_1) - \gamma(1 + \text{cth } \mu_2) \right],$$

$$X_2 = C_1(\lambda) \frac{k_2}{k} \left[ (1 + \text{cth } \mu_1) - \frac{k_1}{k_2} \gamma(1 + \text{cth } \mu_2) \right] + C_2(\lambda) \frac{k_2}{k} \left[ (1 + \text{cth } \mu_1) - \gamma(1 + \text{cth } \mu_2) \right], \quad (12)$$

$$\gamma = \text{sh } \mu_2 / \text{sh } \mu_1, \quad \mu_i = \lambda h_i, \quad i = 1, 2,$$

$$k_1 = \ell_1 n_2^{-1/2}, \quad k_2 = \ell_2 n_1^{-1/2}, \quad k = k_1 - k_2.$$

Розв'язок системи парних інтегральних рівнянь (11) будемо здійснювати з використанням відомої процедури [8]. Виберемо розв'язок парних рівнянь у вигляді, який забезпечує тотожне задоволення третього та четвертого з рівнянь (11):

$$X_1 = \int_0^a \varphi(t) \sin \lambda t dt, \quad X_2 = \sqrt{\frac{\pi \lambda}{2}} \int_0^a \sqrt{t} \psi(t) J_{3/2}(\lambda t) dt, \quad (13)$$

де  $\varphi(t)$ ,  $\psi(t)$  – невідомі функції, які є неперервними разом з їх похідними на відрізку  $[0, a]$ . При цьому з першого та другого рівнянь (11) після деяких перетворень отримуємо два інтегральні рівняння Фредгольма другого роду, які після введення безрозмірних змінних і функцій мають такий вигляд:

$$f(\xi) + \frac{4k_1}{\pi k} \int_0^1 f(\eta) \mathcal{K}_{11}(\xi, \eta) d\eta - \frac{4k_1}{\pi k} \int_0^1 g(\eta) \mathcal{K}_{12}(\xi, \eta) d\eta = -\frac{4k_1}{\pi k} \int_0^{\pi/2} s(\xi \sin \theta) d\theta,$$

$$g(\xi) + \frac{4k_2}{\pi k} \int_0^1 f(\eta) \mathcal{K}_{21}(\xi, \eta) d\eta - \frac{4k_2}{\pi k} \int_0^1 g(\eta) \mathcal{K}_{22}(\xi, \eta) d\eta = 0, \quad (14)$$

де

$$f(\xi) \equiv \frac{1}{a} \varphi(a\xi), \quad g(\xi) \equiv \frac{1}{a} \frac{d}{d\xi} [\xi \psi(a\xi)], \quad s(\xi) \equiv \frac{\xi t(\xi)}{C_{44} d_1 \ell_1}, \quad t(\xi) \equiv \sigma(a\xi). \quad (15)$$

Ядра інтегральних рівнянь (14) мають вигляд

$$\mathcal{K}_{11}(\xi, \eta) = \frac{k_2}{k} \left[ 2I_1(\beta_1 + \beta_2, \eta) - \frac{k_1 + k_2}{2k_2} I_1(2\beta_1, \eta) - \frac{k_1 + k_2}{2k_1} I_1(2\beta_2, \eta) \right],$$

$$\mathcal{K}_{12}(\xi, \eta) = \frac{k_1 + k_2}{k} \left\{ [\eta^{-1} I_0(\beta_1 + \beta_2, \eta) - I_0(\beta_1 + \beta_2, 1)] - \frac{1}{2} [\eta^{-1} I_0(2\beta_1, \eta) - I_0(2\beta_1, 1)] - \frac{1}{2} [\eta^{-1} I_0(2\beta_2, \eta) - I_0(2\beta_2, 1)] \right\},$$

$$\mathcal{K}_{21}(\xi, \eta) = -\frac{k_1 + k_2}{k} \xi \left[ I_2(\beta_1 + \beta_2, \eta) - \frac{1}{2} I_2(2\beta_1, \eta) - \frac{1}{2} I_2(2\beta_2, \eta) \right],$$

$$\mathcal{K}_{22}(\xi, \eta) = -\frac{k_1}{k} \xi \left\{ 2[\eta^{-1} I_1(\beta_1 + \beta_2, \eta) - I_1(\beta_1 + \beta_2, 1)] - \frac{k_1 + k_2}{2k_1} [\eta^{-1} I_1(2\beta_1, \eta) - I_1(2\beta_1, 1)] - \frac{k_1 + k_2}{2k_2} [\eta^{-1} I_1(2\beta_2, \eta) - I_1(2\beta_2, 1)] \right\}, \quad (16)$$

де позначено

$$I_0(\beta, \eta) = \frac{1}{4} \ln \frac{\beta^2 + (\xi + \eta)^2}{\beta^2 + (\xi - \eta)^2} = \frac{1}{4} \ln \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1}, \quad I_1(\beta, \eta) = \frac{\beta}{2\xi\eta(\zeta^2 - 1)},$$

$$I_2(\beta, \eta) = I_1(\beta, \eta) \left[ 4\zeta I_1(\beta, \eta) - \frac{1}{\beta} \right],$$

$$I_3(\beta, \eta) = 4I_1^2(\beta, \eta) \left[ 2(3\zeta^2 + 1)I_1(\beta, \eta) - \frac{3\zeta}{\beta} \right],$$

$$I_4(\beta, \eta) = 12I_1^2(\beta, \eta) \left[ 16\zeta(\zeta^2 + 1)I_1^2(\beta, \eta) - \frac{4}{\beta}(3\zeta^2 + 1)I_1(\beta, \eta) + \frac{\zeta}{\beta^2} \right],$$

$$\zeta = \frac{\beta^2 + \xi^2 + \eta^2}{2\xi\eta}, \quad \beta = ha^{-1}, \quad \beta_i = \beta n_i^{-1/2}, \quad i = 1, 2.$$

**4. Коефіцієнти інтенсивності напружень.** Аналогічно до того, як прийнято в лінійній механіці руйнування [6, 13], коефіцієнти інтенсивності напружень у лінеаризованій задачі про руйнування тіла з початковими напруженнями будемо визначати як коефіцієнти при особливостях у компонентах напружень біля краю тріщини, тобто

$$K_I = \lim_{r \rightarrow +a} [2\pi(r-a)]^{-1/2} t_{33}(r, 0),$$

$$K_{II} = \lim_{r \rightarrow +a} [2\pi(r-a)]^{-1/2} t_{3r}(r, 0). \quad (17)$$

Визначивши з розв'язку інтегральних рівнянь (14) функції  $f(\xi)$  та  $g(\xi)$  (і з урахуванням (15) – функції  $\varphi(x)$  та  $\psi(x)$ ), з (13), (12), (10) і (3) отримаємо розподіли напружень і переміщень в околі тріщини, що дозволяє записати вирази для коефіцієнтів інтенсивності напружень. Так, з (3) маємо

$$\begin{aligned} t_{33}^{(2)}(r, 0) = & C_{44} d_1 \ell_1 \left\{ \frac{k}{2k_1} \int_0^a \varphi(t) dt \int_0^\infty \sin \lambda t J_0(\lambda r) \lambda d\lambda + \right. \\ & + \int_0^a \varphi(t) dt \int_0^\infty \left[ 2 \frac{k_2}{k} e^{-\mu_1 - \mu_2} - \frac{1}{2} \frac{k_1 + k_2}{k} \left( \frac{k_2}{k_1} e^{-2\mu_2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + e^{-2\mu_1} \right) \right] \sin \lambda t J_0(\lambda r) \lambda d\lambda - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^a \sqrt{t} \varphi(t) dt \int_0^\infty \left[ \frac{k_1 + k_2}{k} e^{-\mu_1 - \mu_2} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \frac{k_1 + k_2}{k} (e^{-2\mu_1} + e^{-2\mu_2}) \right] J_{3/2}(\lambda t) J_0(\lambda r) \lambda^{3/2} d\lambda \left. \right\}, \\ t_{3r}^{(2)}(r, 0) = & -C_{44} n_1^{-1/2} d_1 \left\{ \frac{k}{2k_2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^a \sqrt{t} \psi(t) dt \int_0^\infty J_{3/2}(\lambda t) J_1(\lambda r) \lambda^{3/2} d\lambda + \right. \\ & + \sqrt{\pi} \int_0^a \sqrt{t} \psi(t) dt \int_0^\infty \left[ 2 \frac{k_1}{k} e^{-\mu_1 - \mu_2} - \frac{1}{2} \frac{k_1 + k_2}{k} \left( \frac{k_1}{k_2} e^{-2\mu_2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + e^{-2\mu_1} \right) \right] J_{3/2}(\lambda t) J_1(\lambda r) \lambda^{3/2} d\lambda - \int_0^a \varphi(t) dt \int_0^\infty \left[ \frac{k_1 + k_2}{k} e^{-\mu_1 - \mu_2} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \frac{k_1 + k_2}{k} (e^{-2\mu_1} + e^{-2\mu_2}) \right] \sin \lambda t J_1(\lambda r) \lambda d\lambda \left. \right\}. \quad (18) \end{aligned}$$

З аналізу співвідношень (18) випливає, що при  $r \rightarrow +a$

$$\begin{aligned} t_{33}^{(2)}(r, 0) &\approx -C_{44}d_1\ell_1 \frac{k}{2k_1} \frac{\varphi(a)}{\sqrt{r^2 - a^2}}, \\ t_{3r}^{(2)}(r, 0) &\approx C_{44}n_1^{-1/2}d_1 \frac{k}{2k_2} \frac{a\psi(a)}{r\sqrt{r^2 - a^2}}. \end{aligned} \quad (19)$$

Тоді з (17) маємо

$$K_I = -C_{44}d_1\ell_1 \frac{k}{2k_1} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} \varphi(a), \quad K_{II} = C_{44}n_1^{-1/2}d_1 \frac{k}{2k_2} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} \psi(a). \quad (20)$$

Переходячи в цих виразах до безрозмірних величин та функцій, отримуємо, що

$$K_I = -C_{44}d_1\ell_1 \frac{k}{2k_1} \sqrt{\pi a} f(1), \quad K_{II} = C_{44}n_1^{-1/2}d_1 \frac{k}{2k_2} \sqrt{\pi a} \int_0^1 g(\xi) d\xi, \quad (21)$$

де функції  $f$  і  $g$  визначаються як розв'язки системи інтегральних рівнянь (14).

Як бачимо, наявність вільної поверхні призводить до ненульового значення  $K_{II}$  в задачі про тріщину нормального відриву (для нескінченного тіла  $K_{II} = 0$  [3]). Крім того, обидва коефіцієнти інтенсивності напружень  $K_I$  та  $K_{II}$  залежать від початкових напружень  $\sigma_{11}^0 = \sigma_{22}^0$  (або подовжень  $\lambda_1 = \lambda_2$ ) і відстані між тріщиною та границею півпростору  $h$  (або  $\beta$ ), оскільки розв'язки  $f(\xi)$  та  $g(\xi)$  рівнянь (14) залежать від зазначених параметрів.

Покажемо, що в граничному випадку розміщення тріщини в тілі, коли відстань від тріщини до вільної поверхні прямує до нескінченності, отримані вирази для коефіцієнтів інтенсивності напружень (20), (21) точно переходять у відповідні вирази для  $K_I$  і  $K_{II}$ , які були отримані в задачі про тріщину нормального відриву в нескінченному матеріалі [3].

З виразів для ядер (16) випливає, що при  $h \rightarrow \infty$  ( $\beta \rightarrow \infty$ ) усі ядра прямують до нуля:

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathcal{K}_{ij}(\xi, \eta) = 0, \quad i, j = 1, 2. \quad (22)$$

Тоді з (14) маємо граничні значення для функцій  $f$  і  $g$ :

$$f^\infty(\xi) = -\frac{4k_1}{\pi k} \int_0^{\pi/2} s(\xi \sin \theta) d\theta, \quad g^\infty(\xi) = 0. \quad (23)$$

Враховуючи, що

$$\int_0^{\pi/2} s(\xi \sin \theta) d\theta = \int_0^\xi \frac{\eta t(\eta)}{\sqrt{\xi^2 - \eta^2}} d\eta, \quad (24)$$

з (20), (21) отримуємо

$$K_I^\infty = 2\sqrt{\frac{a}{\pi}} \int_0^1 \frac{\eta t(\eta)}{\sqrt{1 - \eta^2}} d\eta = \frac{2}{\sqrt{\pi a}} \int_0^a \frac{t\sigma(t)}{\sqrt{a^2 - t^2}} dt, \quad K_{II}^\infty = 0, \quad (25)$$

що повністю збігається (при прийнятих позначеннях) зі значеннями коефіцієнтів інтенсивності напружень, отриманими в задачі про тріщину нормального відриву в нескінченному матеріалі [3].

Зокрема, для випадку рівномірного нормального навантаження на берегах тріщини  $\sigma(r) = \sigma = \text{const}$  з (25) отримуємо, що  $K_I^\infty = 2\sigma\sqrt{\frac{a}{\pi}}$ .

**5. Числові результати.** Для числового дослідження систем інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду (14) будемо застосовувати метод Бубнова – Гальоркіна, числове інтегрування будемо здійснювати за квадратурними формулами Гауса. Числові результати будемо отримувати для випадку рівномірного нормального навантаження на берегах тріщини  $\sigma(r) = \text{const}$ .

Нижче наводимо результати числового дослідження задачі для випадків, коли композити можна змоделювати трансверсально-ізотропними матеріалами з наведеними характеристиками, що визначаються за формулами (4), (5).

**Шаруватий композит з ізотропними шарами.** У макрооб'ємах такий композит моделюється трансверсально-ізотропним середовищем [9]. Тріщина розміщена в площині  $x_3 = 0$ , яка паралельна до границі поділу шарів, а також до вільної поверхні півпростору.

Залежності співвідношень коефіцієнтів інтенсивності напружень  $K_I/K_I^\infty$  (де  $K_I^\infty$  – коефіцієнт інтенсивності напружень для випадку тріщини в нескінченному матеріалі) від відношення модулів пружності ізотропних шарів  $E^{(1)}/E^{(2)}$  з однаковими коефіцієнтами Пуассона  $\nu^{(1)} = \nu^{(2)} = 0.3$  та при коефіцієнті концентрації шарів з модулем пружності  $E^{(1)}$   $c_1 = 0.3$  зображено на рис. 1. Лінії 1–3 (а також 1'–3') відповідають значенням  $\lambda_1 = 0.99$  (стискаючі початкові напруження),  $\lambda_1 = 1.0$  (відсутність початкових напружень) та  $\lambda_1 = 1.05$  (розтягуючі початкові напруження). При цьому суцільні лінії відповідають значенню безрозмірної відстані між тріщиною і границею півпростору  $\beta = h/a = 0.25$ , а пунктирні – значенню  $\beta = 0.5$ . Значення  $K_I/K_I^\infty$  монотонно зменшуються зі збільшенням відношення  $E^{(1)}/E^{(2)}$ . Крім того, на рисунках бачимо, що для значень  $\beta = 0.25$  відповідні значення  $K_I/K_I^\infty$  вищі, ніж для  $\beta = 0.5$ .

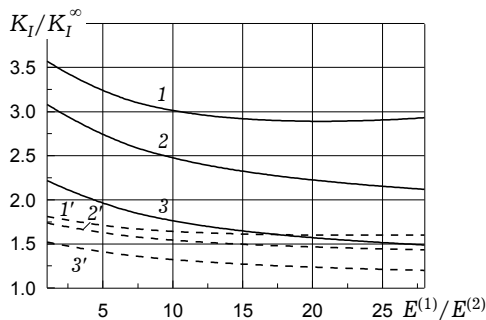


Рис. 1

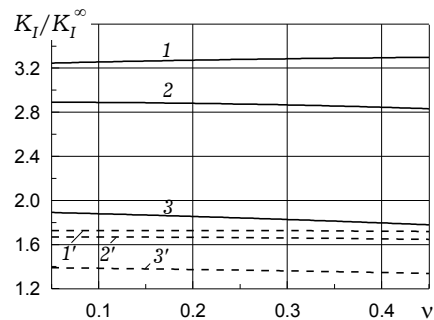


Рис. 2

Для композита з однаковими коефіцієнтами Пуассона матеріалів шарів  $\nu^{(1)} = \nu^{(2)} = \nu$  залежності  $K_I/K_I^\infty$  від  $\nu$  наведено на рис. 2 (при  $E^{(1)}/E^{(2)} = 3$  та  $c_1 = 0.3$ ). Суцільні лінії 1–3 відповідають значенню безрозмірної відстані між тріщиною та границею півпростору  $\beta = h/a = 0.25$ , а лінії 1'–3' – значенню  $\beta = 0.5$ . При цьому криві 1 та 1' відповідають значенням  $\lambda_1 = 0.99$ , криві 2 та 2' –  $\lambda_1 = 1.0$ , криві 3 та 3' –  $\lambda_1 = 1.1$ .

Розглянемо приклад розрахунку для конкретного шаруватого композита – алюмоборосилікатного скла в композиції з епоксидномалеїновою смолою [9]. Залежності  $K_I/K_I^\infty$  від концентрації скла  $c_1$  наведено на рис. 3 при  $\beta = 0.25$  (суцільні лінії) та  $\beta = 0.5$  (пунктирні лінії) для різних значень параметра початкового стиску (або розтягу)  $\lambda_1$  (лінії 1 та 1' відповідають

значенням  $\lambda_1 = 0.99$ , лінії 2 та 2' -  $\lambda_1 = 1.0$ , лінії 3 та 3' -  $\lambda_1 = 1.1$ ). Як бачимо, значення співвідношень коефіцієнтів інтенсивності напружень суттєво залежать як від концентрації скла, так і від величин початкових подовжень (або скорочень)  $\lambda_1$ .

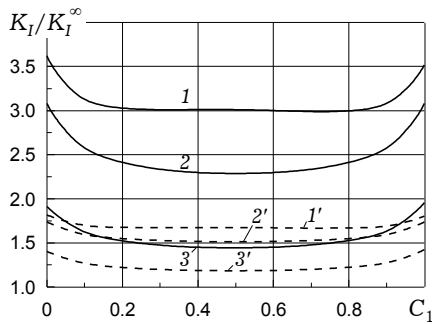


Рис. 3

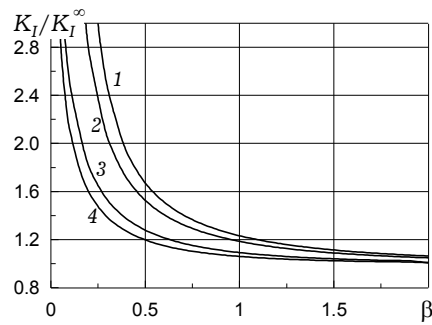


Рис. 4

Рис. 4 для цього ж матеріалу ілюструє залежність співвідношень між КІН  $K_I / K_I^\infty$  від безрозмірної відстані  $\beta = h/a$  між тріщиною і границею півпростору (криві 1-4 відповідають значенням  $\lambda_1 = 0.99, 1.0, 1.05, 1.1$ ). З рисунка видно, що значення  $K_I$  при малих відносних відстанях між тріщиною і границею півпростору значно більші від значень коефіцієнта інтенсивності напружень  $K_I^\infty$  для ізольованої тріщини в нескінченному матеріалі. Так, з табл. 1, у якій наведено значення  $K_I / K_I^\infty$  для різних величин  $\beta$ , видно, що, наприклад, для  $\lambda_1 = 0.999$  при  $h/a = 1/20$   $K_I$  більше від значення  $K_I^\infty$  у 18 разів.

Таблиця 1

$\lambda_1 \backslash \beta$	0.05	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
0.999	18.1290	5.9081	2.8549	2.0782	1.7321	1.5386
1.050	3.4969	2.5027	1.8148	1.5298	1.3752	1.2797
1.100	2.8803	2.1178	1.5996	1.3863	1.2703	1.1986

**Композит зі стохастичним армуванням у площині  $x_3 = \text{const}$  короткими волокнами еліпсоїдальної форми.** У макрооб'ємах такої композит моделюється трансверсально-ізотропним середовищем з площиною ізотропії  $x_3 = \text{const}$  [9].

На рис. 5, 6 наведено залежності  $K_I / K_I^\infty$  та  $K_{II} / K_I^\infty$  від параметра  $\lambda_1$  при значеннях  $\beta = 0.25$  (криві 1),  $\beta = 0.5$  (криві 2) та  $\beta = 1.0$  (криві 3) для армованого вуглецевими волокнами вуглепластика при концентрації волокон  $c_1 = 0.7$  та співвідношенні поздовжнього та поперечного розмірів волокон, що дорівнює 10. Макрохарактеристики композита взяті з роботи [7]. Як бачимо на рисунку, значення  $K_I / K_I^\infty$  та  $K_{II} / K_I^\infty$  асимптотично прямують до нескінченності при наближенні параметра  $\lambda_1$  до значень  $\lambda_1^*$ , що відповідають значенням критичних параметрів скорочення для задачі про стиснення композитного матеріалу з приповерхневою круговою тріщиною (табл. 2), які отримано за методикою, аналогічною до наведеної у [5].

Таблиця 2

$\beta$	0.25	0.5	1.0
$\lambda_1^*$	0.9721	0.9509	0.9343



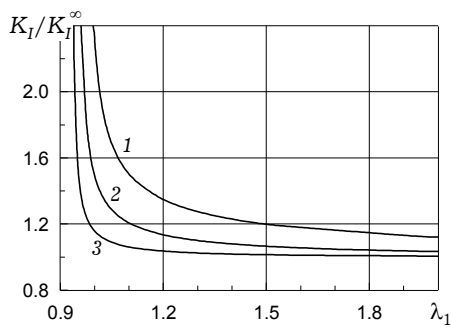


Рис. 5

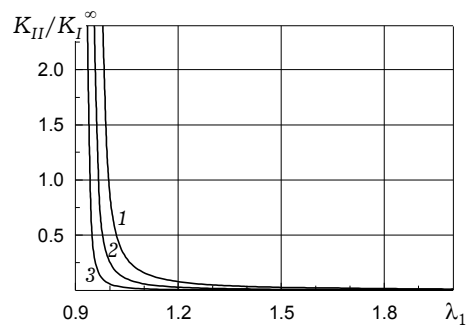


Рис. 6

**6. Висновки.** У роботі для випадку задачі про приповерхневу дископодібну тріщину нормального відриву в композитному матеріалі проаналізовано вплив на коефіцієнти інтенсивності напружень вільної поверхні матеріалу та початкових (залишкових) напружень, спрямованих уздовж площини тріщини. Отримані результати дозволяють зробити такі висновки:

- наявність вільної границі в тілі з початковими напруженнями якісним чином впливає на розподіл напружень в околі приповерхневої тріщини. А саме, у випадку приповерхневої тріщини нормального відриву вплив поверхні матеріалу призводить до ненульових значень коефіцієнта інтенсивності напружень  $K_{II}$  (для нескінченного тіла  $K_{II} = 0$ );

- кількісний вплив вільної поверхні матеріалу проявляється у значному зростанні значень коефіцієнта інтенсивності напружень при зменшенні відстані між тріщиною та границею півпростору. Так, для значень  $\beta \equiv h/a = 0.05$  значення  $K_I$  в околі приповерхневої тріщини на порядок вище від значення КІН  $K_I^\infty$  для тріщини в нескінченному тілі;

- при прямуванні величини відносної відстані  $\beta$  між тріщиною і границею півпростору до нескінченності коефіцієнти інтенсивності напружень прямують до відповідних значень, отриманих для випадку ізольованої тріщини в нескінченному матеріалі;

- характеристики композитного матеріалу (співвідношення між модулями пружності матеріалів шарів композита, значення коефіцієнтів Пуассона матеріалів, концентрація компонентів) досить суттєво впливають на коефіцієнти інтенсивності напружень;

- при наближенні величин початкових стискуючих напружень до значень, що відповідають локальній втраті стійкості матеріалу в задачі про стискання півпростору з тріщиною, спостерігається ефект різкого «резонансного» зростання значень коефіцієнтів інтенсивності напружень.

Слід також зазначити, що отримані в роботі результати можуть бути використані при аналізі аналогічної задачі класичної лінійної механіки руйнування, оскільки при  $\lambda_1 = 1.0$  наведені числові результати відповідають випадку відсутності в тілі початкових (залишкових) напружень.

1. Бабич В. М., Гузь А. Н., Назаренко В. М. Приповерхностная дискообразная трещина нормального отрыва в полубесконечном теле с начальными напряжениями // Прикл. механика. – 1991. – 27, № 7. – С. 18–25.
2. Богданов В. Л. Лінеаризована задача про руйнування напівскінченного пружного матеріалу з потенціалом гармонічного типу // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – 48, № 1. – С. 117–125.
3. Гузь А. Н. Хрупкое разрушение материалов с начальными напряжениями. – Киев: Наук. думка, 1991. – 288 с. – (Неклассические проблемы механики разрушения: В 4 т., 5 кн. – Т. 2.)

4. Гузь А. Н. Динамические задачи механики хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями для движущихся трещин. 1. Постановка задач, общие соотношения // Прикл. механика. – 1998. – **34**, № 12. – С. 3–15.
5. Гузь А. Н., Дышель М. Ш., Назаренко В. М. Разрушение и устойчивость материалов с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1992. – 456 с. – (Неклассические проблемы механики разрушения: В 4 т., 5 кн. – Т. 4; Кн. 1.)
6. Кит Г. С., Хай М. В. Метод потенциалов в трехмерных задачах термоупругости для тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1989. – 284 с.
7. Маслов Б. П. Исследование стохастических композитов с нелинейными и анизотропными свойствами компонентов: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – Киев, 1983. – 423 с.
8. Уфлянд Я. С. Метод парных уравнений в задачах математической физики. – Ленинград: Наука, 1977. – 220 с.
9. Хорошун Л. П., Маслов Б. П., Шижула Е. Н., Назаренко Л. В. Статистическая механика и эффективные свойства материалов. – Киев: Наук. думка, 1993. – 390 с. – (Механика композитов: В 12 т. – Т. 3.)
10. Шульга Н. А., Томашевский В. Т. Технологические напряжения и деформации в материалах. – Киев: «А. С. К.», 1997. – 394 с. – (Механика композитов: В 12 т. – Т. 6.)
11. Guz A. N. On the development of brittle-fracture mechanics of materials with initial stress // Int. Appl. Mech. – 1996. – **32**, No. 4. – P. 316–323.
12. Guz A. N. Fundamentals of the three-dimensional theory of stability of deformable bodies. – Berlin: Springer-Verlag, 1999. – 555 p.
13. Kassir M. K., Sih G. C. Mechanics of fracture. Three-dimensional crack problems. – Leyden: Netherlands Noordhoff Int. Publ., 1975. – Vol. 2. – 452 p.

**ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА О ПРИПОВЕРХНОСТНОЙ  
ТРЕЩИНЕ НОРМАЛЬНОГО ОТРЫВА В КОМПОЗИТНОМ МАТЕРИАЛЕ  
С ОСТАТОЧНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ**

*В рамках линеаризованной механики деформируемого твердого тела с использованием континуальной модели композита исследована задача о дискообразной трещине нормального отрыва в полубесконечном композитном материале с начальными (остаточными) напряжениями, действующими вдоль трещины. Приведены разрешающая система интегральных уравнений Фредгольма второго рода и выражения для коэффициентов интенсивности напряжений в окрестности трещины. Для двух типов композитов – слоистого композитного материала с изотропными слоями и композита со стохастическим армированием в плоскости изотропии короткими волокнами – получены численные зависимости коэффициентов интенсивности напряжений от начальных (остаточных) напряжений, физико-механических характеристик материала и геометрических параметров задачи.*

**AXISYMMETRIC PROBLEM ON NEAR-THE-SURFACE MODE-I  
CRACK IN COMPOSITE WITH RESIDUAL STRESSES**

*In this paper, the problem on a near-the-surface penny-shaped mode-I crack in semi-infinite composite with initial (residual) stresses is considered within the framework of the linearized mechanics of deformable solids. A continual model of composite is used. The analysis involves reducing the problem to a system of the Fredholm second kind integral equations. The representations of the stress intensity factors near the crack edges are obtained. The parameters of fracture for two types of composites (laminar composites with isotropic layers and composites with stochastic reinforcement by fibers of finite length) are obtained. The dependence of the stress intensity factors on the initial stresses, physical-mechanical parameters of composites and geometric parameters are investigated.*

Ин-т механіки ім. С. П. Тимошенка  
НАН України, Київ

Одержано  
23.04.07