

ТУНЕЛЬНІ ВКЛЮЧЕННЯ В КУСКОВО-ОДНОРІДНОМУ АНІЗОТРОПНОМУ ПРОСТОРИ

У просторі узагальнених функцій побудовано сингулярні інтегральні співвідношення, що зв'язують стрибки та суми зміщень і напружень у площині з'єднання двох різних анізотропних півпросторів, які знаходяться у двовимірному стані без наявності площин пружної симетрії. В результаті задачі про тунельні абсолютно жорсткі включення, які знаходяться в умовах повного зчеплення або гладкого контакту з різними анізотропними півпросторами, зведено до систем сингулярних інтегральних рівнянь. Одержано розв'язок вказаних систем у явному вигляді, що дозволило визначити поле напружень в околі включень. Досліджено залежність кута повороту включень від пружних властивостей півпросторів у найбільш загальному випадку анізотропії.

У роботі [6] запропоновано метод розв'язування задач про міжфазні дефекти типу тріщин або включень в неоднорідній анізотропній площині. В цій праці методику робіт [4, 6] узагальнено на випадок кусково-однорідного анізотропного простору, який знаходиться у двовимірному стані та містить тунельні міжфазні дефекти довільної природи. Як приклад одержано в замкнутому вигляді розв'язки задач про абсолютно жорсткі включення в найбільш загальному випадку анізотропії.

У плоскій постановці в останній час задачі про міжфазні дефекти різними методами розглядалися багатьма авторами (див., наприклад, [6, 10–13], але в найбільш загальному випадку (коли задача не розпадається на плоску й антиплоску) відомі лише якісні результати задачі про тріщину [8, 9].

1. Постановка задачі та зведення проблеми до матричної задачі Рімана в просторі $S'(\mathbb{R}^2)$ узагальнених функцій повільного зростання. Нехай простір, складений із двох різних анізотропних півпросторів, неповністю з'єднаних у площині $X = 0$, знаходиться в двовимірному стані, без наявності площин пружної симетрії, тобто в умовах узагальненої плоскої деформації [7]. У площині $X = 0$ містяться наскрізні, лінійні в розрізі, дефекти загальної природи (типу тріщин, відшарованих і невідшарованих включень), які займають r смуг:

$$\Pi_j = \{(y, z) \mid y \in \ell_j = (a_j, b_j), z \in (-\infty, \infty)\}, \\ a_1 < b_1 < \dots < a_r < b_r, \quad j = 1, \dots, r.$$

Позначимо

$$\chi^\pm = \{\chi_k^\pm(y)\}_{k=1}^6, \quad \chi_k^\pm(y) = \zeta_k^+(y) \pm \zeta_k^-(y), \quad y \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

$$\{\zeta_k^\pm\}_{k=1}^6 = \{v_1(\pm 0, y), v_3(\pm 0, y), v_4(\pm 0, y), \partial_2 v_6(\pm 0, y), \\ \partial_2 v_7(\pm 0, y), \partial_2 v_8(\pm 0, y)\},$$

$$\mathbf{v} = \{v_k(x, y)\}_{k=1}^8 = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}, u, v, w\},$$

$$\partial_1 \equiv \frac{\partial}{\partial x}, \quad \partial_2 \equiv \frac{\partial}{\partial y}.$$

Означимо $S'_p(\mathbb{R}^2)$ як підпростір узагальнених функцій $g(x, y) \in S'(\mathbb{R}^2)$, для яких $p \geq c_x(g)$, де $c_x(g)$ – порядок сингулярності за змінною x .

На основі рівнянь рівноваги та узагальненого закону Гука стосовно вектора \mathbf{v} у підпросторі $S'_p(\mathbb{R}^2)$ можна отримати крайову задачу. Ця зада-

ча в зображеннях Фур'є еквівалентна такому матричному рівнянню:

$$\mathbf{M}_*^+ \mathbf{V}^+(\alpha, \beta) - \mathbf{M}_*^- \mathbf{V}^-(\alpha, \beta) = \mathbf{f}_0, \quad \mathbf{V}^\pm = \{V_k^\pm\}_{k=1}^8, \quad (2)$$

де

$$\mathbf{M}_*^\pm = \pm \begin{pmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{O}_{3 \times 3} \\ \mathbf{B}^\pm & \mathbf{D}^\top \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = -i \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & \beta \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}^\pm = \{\beta_{kj}^\pm\}_{j,k=1}^5, \quad \mathbf{f}_0 = \{\chi_{*,1}^-, \chi_{*,2}^-, \chi_{*,3}^-, \chi_{*,4}^-, 0, \chi_{*,5}^-, \chi_{*,6}^-, 0\},$$

$$\chi_{*,k}^\pm(\beta) = F_2[\chi_k^\pm] \in S'(\mathbb{R}), \quad V_k^\pm(\alpha, \beta) = F[v_k^\pm] \in S'_\pm(\mathbb{R}^2),$$

$$S'_\pm(\mathbb{R}^2) = \{g^\pm \in S'(\mathbb{R}^2) \mid \text{supp } g_\pm = \mathbb{R}_\pm \times \mathbb{R}\},$$

F, F_2 – оператори перетворення Фур'є: відповідно двовимірний і за змінною y ; $\mathbf{O}_{k \times j}$ – нуль-матриця розмірності $k \times j$; β_{kj}^\pm – зведені коефіцієнти деформації для анізотропного середовища [7] відповідно для правого, $x > 0$, і лівого, $x < 0$, півпросторів.

Нехай $H_m(\mathbb{R})$ – підпростір функцій $f_z(\beta) \in S'(\mathbb{R})$, аналітичних за параметром z у кожній точці комплексної площини, за винятком, можливо, лінії $\text{Im } z = 0$, і які задовольняють при $|\text{Im } z| > \varepsilon > 0$ та деякому цілому m умову

$$|f_z(\beta)| \leq A_\varepsilon (1 + |z|)^m, \quad A_\varepsilon < \infty.$$

Функція $f(\alpha, \beta) \in S'(\mathbb{R}^2)$ допускає аналітичне розвинення за α , якщо існує функція $f_z(\beta) \in H_m(\mathbb{R})$ така, що (за збіжністю в $S(\mathbb{R})$)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (f_{\alpha+i\varepsilon}(\beta) - f_{\alpha-i\varepsilon}(\beta)) = f_\alpha^+ - f_\alpha^- = f(\alpha, \beta).$$

Позначимо через $\Omega'_m(\mathbb{R}^2)$ підпростір узагальнених функцій $f \in S'(\mathbb{R}^2)$, для яких функції, що задають аналітичне розвинення за змінною α , належать підпростору $H_m(\mathbb{R})$. Нехай $\Omega'_{\pm, m_\pm}(\mathbb{R}^2)$ – підпростір функцій $f_\pm \in \Omega'_{m_\pm}(\mathbb{R}^2)$, для яких функції $f_z^\pm(\beta) \in H_{m_\pm}(\mathbb{R})$, що визначають аналітичне зображення відповідно при $\pm \text{Im } z < 0$, мають вигляд

$$f_z^\pm(\beta) = P_{m_\pm}, \quad P_m(z, \beta) = \sum_{k=0}^m z^k \zeta_k(\beta), \quad \zeta_k \in S'(\mathbb{R}),$$

$$P_m \equiv 0, \quad m < 0. \quad (3)$$

Справджуються такі твердження [3].

Теорема 1. Нехай $g(x, y) \in S'_p(\mathbb{R}^2)$, $g(x, y) = \partial_1^p \partial_2^{n_2} g_0(x, y)$, g_0 – неперервна функція повільного зростання, для якої має місце розвинення $g_0 = x^{n_0} g_*(x, y)$, $n_0 \geq 0$, $g_*(0, y) \neq 0$. Тоді $f = F[g] \in \Omega'_{p-n_0-1}(\mathbb{R}^2)$.

Теорема 2. Нехай $g_\pm \in S'_{\pm, p_\pm}(\mathbb{R}^2) = S'_\pm(\mathbb{R}^2) \cap S'_{p_\pm}(\mathbb{R}^2)$. Тоді $f_\pm = F[g_\pm] \in \Omega'_{\pm, m_\pm}(\mathbb{R}^2)$, $m_\pm = p_\pm - 1$.

З урахуванням цих теорем рівняння (1) можна розглядати як крайову умову матричної задачі Рімана в просторі $S'(\mathbb{R}^2)$ за параметром α для визначення вектор-функцій $\mathbf{V}^\pm = \{V_k^\pm\}_{k=1}^8$, $V_k^\pm \in \Omega'_{\pm, 0}(\mathbb{R}^2)$.

2. Про один спосіб розв'язування крайової задачі Рімана за однією змінною у просторі $S'(\mathbb{R}^2)$. У скалярній постановці крайова задача Рімана за однією змінною у просторі $S'(\mathbb{R}^2)$ полягає в наступному: потрібно знайти дві функції $f_{\pm} \in \Omega'_{\pm, m_{\pm}}(\mathbb{R}^2)$ такі, що

$$(f_{\pm}, \psi) = (f_{\pm}, G(\alpha, \beta)\psi) + (q, \psi), \quad q \in S'(\mathbb{R}^2), \quad \psi \in S(\mathbb{R}^2), \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad (4)$$

q, G – відомі функції; $g = F^{-1}[q] \in S'_n(\mathbb{R}^2)$; $G \in \Theta_{\mu}$, $G \neq 0$; Θ_{μ} – клас мультиплікаторів в $S(\mathbb{R}^2)$, гельдеровских за параметром α . Розв'язування задачі (4) проведемо з використанням наступних тверджень.

Теорема 3. Якщо $f(\alpha, \beta) \in \Omega'_p(\mathbb{R}^2)$, то має місце розвинення

$$f = f_+ - f_-, \quad f_{\pm} \in \Omega'_{\pm, p}(\mathbb{R}^2), \quad (5)$$

де f_{\pm} визначаються з точністю до функцій $P_p(\alpha, \beta)$ із рівності (3).

Д о в е д е н н я. Справджується розвинення [5]

$$g = g_+ - g_-, \quad g = F^{-1}[f] \in S'_{p+1}(\mathbb{R}^2), \quad g_{\pm} \in S'_{\pm, p+1}(\mathbb{R}^2), \quad (6)$$

де g_{\pm} визначаються з точністю до однієї і тієї ж функції вигляду

$$\eta_{p-1}(x, y) = \sum_{k=0}^{p-1} \delta^{(k)}(x) \zeta_k^0(y), \quad \zeta_k^0 \in S'(\mathbb{R}), \quad \eta_{\ell} \equiv 0, \quad \ell < 0, \quad (7)$$

а δ – функція Дірака. Застосувавши до (6) перетворення Фур'є, з урахуванням теореми 1 отримаємо (5). Функції f_{\pm} визначаються з точністю до перетворення Фур'є функції (7). Теорему доведено. \diamond

Теорема 4. Нехай $f_{\pm}(\alpha, \beta) \in \Omega'_{\pm, m_{\pm}}(\mathbb{R}^2)$. Тоді, якщо

$$(f_{\pm}, \psi) = (f_{\pm}, \psi), \quad \psi \in S(\mathbb{R}^2), \quad (8)$$

то $f_{\pm} = f_{\pm} = P_p(\alpha, \beta)$, $p \leq \min\{m_+, m_-\}$, $P_p(\alpha, \beta)$ – функція вигляду (3).

Д о в е д е н н я. Застосувавши обернене перетворення Фур'є до рівності (8), на підставі теореми 2 отримаємо співвідношення

$$(g_{\pm}, \varphi(x, y)) = (g_{\pm}, \varphi(x, y)), \quad g_{\pm} = F^{-1}[f_{\pm}] \in S'_{\pm}(\mathbb{R}^2), \quad \varphi \in S(\mathbb{R}^2). \quad (9)$$

Рівність (9) буде виконуватись, якщо функції g_{\pm} зосередженні на перетині носіїв функцій із підпросторів $S'_+(\mathbb{R}^2)$ і $S'_-(\mathbb{R}^2)$, тобто на лінії $x = 0$. Отже, при деякому цілому p мають місце рівності $g_+ = g_- = \eta_{p-1}$. Перетворення Фур'є останніх з урахуванням того, що $P_p = F[\eta_{p-1}]$, дає необхідне співвідношення. Оскільки $f_{\pm} \in \Omega'_{\pm, m_{\pm}}(\mathbb{R}^2)$, то p не повинно перевищувати $\min\{m_+, m_-\}$. Теорему доведено. \diamond

Нехай $\text{Ind}_{\alpha} G = k < \infty$, тоді згідно з [2] має місце розвинення

$$G(\alpha, \beta) = \left(\frac{\alpha - i}{\alpha + i} \right)^k \frac{X_+}{X_-}, \quad X_{\pm}(\alpha, \beta) = \lim_{z \rightarrow \alpha \pm i0} X(z, \beta), \quad (10)$$

$$X(z, \beta) = e^{K_{\beta}(z)}, \quad K_{\beta}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln \left[\left(\frac{\tau - i}{\tau + i} \right)^{-k} G(\tau, \beta) \right] \frac{d\tau}{\tau - z},$$

$X_{\pm} \in \Theta_{\mu}$ – крайові значення обмежених на нескінченності, аналітичних за

змінною α відповідно у верхній і нижній півплощині функцій. Розвинення (10), теореми 2, 3, а також те, що $(\alpha + i)^k \in \Theta_\mu$, дозволяють умову (4) подати як

$$(f_+^0, \psi) = (f_-^0, \psi), \quad f_\pm^0 = f_\pm(\alpha, \beta)(\alpha \pm i)^k X_\pm^{-1} - q_k^\pm, \quad \psi \in S(\mathbb{R}^2), \quad (11)$$

$$q_k = (\alpha + i)^k q X_+^{-1} = q_k^+ - q_k^-, \quad q_k^\pm \in \Omega'_{\pm, n+k-1}(\mathbb{R}^2).$$

Належність f_\pm^0 відповідно до підпросторів $\Omega'_\pm(\mathbb{R}^2)$ очевидна. Нехай $k \geq 0$, тоді, якщо $m \geq n-1$ (де $m = \min\{m_+, m_-\}$), то $f_\pm^0 \in \Omega'_{\pm, m+k}(\mathbb{R}^2)$ і, отже, згідно з теоремою 4 маємо, що $f_\pm^0 = P_{m+k}(\alpha, \beta)$, де P_{m+k} – функція вигляду (3). Розв'язком задачі (4) при цьому буде

$$f_\pm(\alpha, \beta) = (\alpha \pm i)^{-k} X_\pm(P_{m+k} + q_k^\pm) \in \Omega'_{\pm, m}(\mathbb{R}^2). \quad (12)$$

Якщо $m < n-1$, то згідно з теоремами 1 і 3 для існування розв'язку задачі (4) в підпросторах $\Omega'_{\pm, m}(\mathbb{R}^2)$ необхідно та достатньо, щоб функція g_0 з виразу $g_k = \partial_1^{k+n} \partial_2^{n_2} g_0$ (тут $g_k = F^{-1}[q_k]$) допускала розвинення

$$g_0(x, y) = x^{n_*} g_*(x, y), \quad g_*(0, y) \neq 0, \quad n_* = n - m - 1, \quad g_* \in S(\mathbb{R}^2). \quad (13)$$

Розв'язок задачі (4) у цьому випадку також подається формулами (12).

Отже, доведено таке твердження.

Теорема 5. *Нехай $\text{Ind}_\alpha G(\alpha, \beta) = k \geq 0$, $g = F^{-1}[q] \in S'_n(\mathbb{R}^2)$. Тоді, якщо $m \geq n-1$ (де $m = \min\{m_+, m_-\}$), то загальний розв'язок задачі (4) існує в підпросторах $\Omega'_{\pm, m}(\mathbb{R}^2)$ і подається формулами (12). Якщо $m < n-1$, то для існування розв'язків (12) в $\Omega'_{\pm, m}(\mathbb{R}^2)$ необхідно та достатньо, щоб виконувалась умова (13).*

На основі теорем 3, 4, 2 аналогічно доводиться наступне твердження.

Теорема 6. *Нехай $\text{Ind}_\alpha G(\alpha, \beta) = k < 0$. Тоді, якщо $m \geq n-1-k$ (де $m = \min\{m_+, m_-\}$), то загальний розв'язок задачі (4) існує в підпросторах $\Omega'_{\pm, m}(\mathbb{R}^2)$ і подається формулами (12). Якщо $m < n-k-1$, то для існування розв'язків (12) в $\Omega'_{\pm, m}(\mathbb{R}^2)$ необхідно та достатньо, щоб виконувалась умова (13), у якій $n_* = n - k - m - 1$.*

Наслідок. *Нехай $m = n-1$. Тоді, якщо $k \geq 0$, задача (1) має розв'язки в підпросторах $\Omega'_{\pm, m}(\mathbb{R}^2)$, а якщо $k < 0$, то задача (1) має розв'язки в $\Omega'_{\pm, m}(\mathbb{R}^2)$ при виконанні умови (13), у якій $n_* = -k$. Загальний розв'язок задачі (4) визначається формулами (12) і залежить від $m+k$ ($m+k > 0$) довільних функцій із простору $S'(\mathbb{R})$.*

3. Розв'язання крайової задачі та побудова інтегральних співвідношень. Одержані результати дозволяють перейти до розв'язування матричної задачі (2). Розглядаючи перші три зі співвідношень (2) як задачі про стрибок в $S'(\mathbb{R}^2)$ і використовуючи теореми 2, 3, неважко отримати подання

$$\begin{aligned} V_k^\pm &= i \alpha^{k-2} \beta^{1-k} (i \alpha^{k-1} \beta^{2-k} V_3^\pm + \chi_{0,k}^\pm), \quad k = 1, 2, \\ V_5^\pm &= i \beta^{-1} (i \alpha V_4^\pm + \chi_{0,3}^\pm), \quad 2\chi_{0,k}^\pm(\beta) = \chi_{*,k}^+ \pm \chi_{*,k}^-. \end{aligned} \quad (14)$$

З урахуванням (14) рівняння (2) набуде вигляду

$$\begin{pmatrix} P_4^+ & -\alpha P_3^+ \\ P_3^+ & -\alpha P_2^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_3^+ \\ V_4^+ \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} P_4^- & -\alpha P_3^- \\ P_3^- & -\alpha P_2^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_3^- \\ V_4^- \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \end{pmatrix}, \quad (15)$$

де

$$\begin{aligned} G_k &= G_k^+ + G_k^-, & G_k^\pm &= i \sum_{n=1}^6 \ell_{kn}^\pm \lambda_{0,k}^\pm(\beta), & P_2^\pm &= \beta_{44}^\pm \beta^2 - 2\beta_{45}^\pm \alpha \beta + \beta_{55}^\pm \alpha^2, \\ P_3^\pm &= \beta_{14}^\pm \beta^3 - (\beta_{15}^\pm + \beta_{34}^\pm) \alpha \beta^2 + (\beta_{24}^\pm + \beta_{35}^\pm) \alpha^2 \beta - \beta_{25}^\pm \alpha^3, \\ P_4^\pm &= \beta_{11}^\pm \beta^4 - 2\beta_{13}^\pm \alpha \beta^3 + (\beta_{33}^\pm + 2\beta_{12}^\pm) \alpha^2 \beta^2 - 2\beta_{23}^\pm \alpha^3 \beta + \beta_{22}^\pm \alpha^4, \\ \ell_{16}^\pm &= \ell_{24}^\pm = \ell_{25}^\pm = 0, & \ell_{23}^\pm &= \alpha g_5^\pm, & \ell_{14}^\pm &= -\alpha \beta^2, & \ell_{15}^\pm &= \alpha^2 \beta, \\ \ell_{16}^\pm &= \alpha \beta, & \ell_{11}^\pm &= \beta \ell_1^\pm, & \ell_{12}^\pm &= \alpha \ell_2^\pm, & \ell_{21}^\pm &= \beta g_1^\pm, & \ell_{22}^\pm &= \alpha g_2^\pm, \\ \ell_{13}^\pm &= \alpha \ell_3^\pm, & g_k^\pm &= \beta_{4k}^\pm \beta - \beta_{5k}^\pm \alpha, \\ \ell_k^\pm &= \beta_{1k}^\pm \beta^2 - \beta_{3k}^\pm \alpha \beta + \beta_{2k}^\pm \alpha^2, & k &= 1, \dots, 5. \end{aligned}$$

Матричне рівняння (15) можна записати у вигляді

$$\Phi_k^+(\alpha) = \Phi_k^-(\alpha), \quad k = 1, 2.$$

$$\Phi_k^\pm(\alpha) = \pm (P_{5-k}^\pm V_3^\pm(\alpha, \beta) - \alpha P_{4-k}^\pm V_4^\pm(\alpha, \beta) - G_k^\pm).$$

Оскільки $V_k^\pm \in \Omega'_{\pm,0}(\mathbb{R}^2)$, то функції $\Phi_k^\pm(z)$ ($\text{Re } z = \alpha$) аналітичні відповідно у верхній ($\text{Im } z > 0$) і нижній ($\text{Im } z < 0$) півплощинах. Крім того, використовуючи теорему 2, отримаємо, що $\lim_{z \rightarrow \infty} \Phi_k^\pm(z) = 0$, $k = 1, 2$. Ці властивості та теорема 4 дозволяють записати рівність $\Phi_k^\pm(\alpha) = 0$, $k = 1, 2$. Звідси з урахуванням формул (14) неважко отримати вирази для трансформант розшуканих функцій:

$$\begin{aligned} V_k &= V_k^+ + V_k^-, & V_k &= (-i\beta)V_k, & k &= 6, 7, 8, \\ V_k^\pm &= i(P_6^\pm)^{-1} \sum_{j=1}^6 r_{k,j}^\pm \lambda_{0,j}^\pm, & k &= 1, \dots, 8, \end{aligned} \quad (16)$$

де

$$\begin{aligned} r_{k,j}^\pm &= h_j^\pm \lambda_{j,l}^\pm, & k &= 1, \dots, 5, & j &= 1, \dots, 6, & l &= \begin{cases} 1, & k = 1, 2, 3, \\ 2, & k = 4, 5, \end{cases} \\ r_{6,j}^\pm &= \beta \alpha^{-1} (\lambda_{j,1}^\pm \ell_1^\pm - \lambda_{j,2}^\pm g_1^\pm), & r_{7,j}^\pm &= \lambda_{j,1}^\pm \ell_2^\pm - \lambda_{j,2}^\pm g_2^\pm, \\ r_{8,j}^\pm &= \lambda_{j,1}^\pm \ell_5^\pm - \lambda_{j,2}^\pm g_5^\pm, & \lambda_{6,2}^\pm &= -P_4^\pm, & P_6^\pm &= (P_3^\pm)^2 - P_2^\pm P_4^\pm, \\ \lambda_{1,1}^\pm &= \alpha^{-1} (g_1^\pm P_3^\pm - \ell_1^\pm P_2^\pm), & \lambda_{2,1}^\pm &= \beta^{-1} (g_2^\pm P_3^\pm - \ell_2^\pm P_2^\pm), \\ \lambda_{3,1}^\pm &= \beta^{-1} (g_5^\pm P_3^\pm - \ell_5^\pm P_2^\pm), & \lambda_{4,1}^\pm &= \beta P_2^\pm, & \lambda_{5,1}^\pm &= -\alpha P_2^\pm, \\ \lambda_{6,1}^\pm &= -P_3^\pm, & \lambda_{1,2}^\pm &= \alpha^{-1} (g_1^\pm P_4^\pm - \ell_1^\pm P_3^\pm). \end{aligned}$$

Застосувавши обернене перетворення Фур'є до рівностей (16), одержимо вирази для компонент вектора \mathbf{v} :

$$\begin{aligned} v_k &= \partial_2 v_k, & k &= 6, 7, 8, \\ v_k &= -\frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^6 \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left(\zeta_p^+(t) \text{Im} \sum_{n=1}^3 \frac{\theta(x) R_{k,p,n}^+}{z_n^+ x + y - t} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \zeta_p^-(t) \text{Im} \sum_{n=1}^3 \frac{\theta(-x) R_{k,p,n}^-}{z_n^- x + y - t} \right) dt \right\}, & k &= 1, \dots, 8, \end{aligned} \quad (17)$$

де

$$R_{k,p,n}^{\pm} = \frac{r_{k,p}^{\pm}(z_n^{\pm}, 1)}{\beta_0^{\pm} q_n^{\pm}(z_n^{\pm}) \bar{q}_n^{\pm}(z_n^{\pm})}, \quad q_n^{\pm}(z_n^{\pm}) = \prod_{\ell=1}^3 (z_n^{\pm} - z_{\ell}^{\pm}), \quad \ell \neq n,$$

$$\bar{q}_n^{\pm}(z_n^{\pm}) = \prod_{\ell=1}^3 (z_n^{\pm} - \bar{z}_{\ell}^{\pm}), \quad P_6^{\pm}(z_n^{\pm}, 1) \equiv 0, \quad \beta_0^{\pm} = \beta_{22}^{\pm} \beta_{55}^{\pm} - (\beta_{25}^{\pm})^2,$$

$\theta(x)$ – функція Гевісайда.

Розв'язок (17) дає можливість отримати зв'язок між сумами та стрибками (1) у площині з'єднання півпросторів:

$$\boldsymbol{\chi}^+(y) = \mathbf{C} \boldsymbol{\chi}^-(y) + \mathbf{S} \Gamma_R[\boldsymbol{\chi}^-], \quad (18)$$

$$\Gamma_R[\boldsymbol{\chi}] \equiv \frac{1}{\pi} \int_R \frac{\boldsymbol{\chi}(t)}{t-y} dt, \quad \mathbf{C} = \{c_{kj}\}_{k,j=1}^6 = -\operatorname{Re} \{(\mathbf{A}_+ + i\mathbf{B}_-)^{-1}(\mathbf{A}_- + i\mathbf{B}_+)\},$$

$$\mathbf{S} = \{s_{kj}\}_{k,j=1}^6 = \operatorname{Im} \{(\mathbf{A}_+ + i\mathbf{B}_-)^{-1}(\mathbf{A}_- + i\mathbf{B}_+)\},$$

$$\mathbf{A}_{\pm} = \{a_{kj}^{\pm}\}_{k,j=1}^6 = 2^{-1} \operatorname{Re}(\mathbf{N}^+ \pm \mathbf{N}^-) + \mathbf{E}_6,$$

$$\mathbf{B}_{\pm} = \{b_{kj}^{\pm}\}_{k,j=1}^6 = 2^{-1} \operatorname{Im}(\mathbf{N}^+ \pm \mathbf{N}^-), \quad \mathbf{N}^{\pm} = \{N_{kj}^{\pm}\}_{k,j=1}^6,$$

$$N_{1j}^{\pm} = N_{1j}^{\pm,*}, \quad N_{2j}^{\pm} = N_{3j}^{\pm,*}, \quad N_{3j}^{\pm} = N_{4j}^{\pm,*},$$

$$N_{kj}^{\pm} = N_{k+2,j}^{\pm,*}, \quad k = 3, \dots, 6, \quad N_{kj}^{\pm,*} = \sum_{n=1}^3 R_{k,j,n}^{\pm},$$

\mathbf{E}_6 – одинична матриця шостого порядку.

Рівність (18) узагальнює співвідношення, отримані в роботі [6] для випадку плоскої деформації або плоского пружного стану, і дає можливість зводити до систем сингулярних інтегральних рівнянь різні задачі для кусково-однорідного анізотропного простору, що знаходиться в умовах узагальненої плоскої деформації та послабленого тунельними дефектами (тріщинами, включеннями) в площині з'єднання матеріалів.

4. Розв'язання задач про включення. Нехай, наприклад, r жорстких тунельних включень змінної товщини займають смуги Π_j , $j = 1, \dots, r$. До j -го включення прикладене довільне навантаження, яке зводиться до рівнодійної $\mathbf{Q}_j = (\mathbf{Q}_{1j}, \mathbf{Q}_{2j}, 0)$, забезпечує узагальнену плоску деформацію [7] і створює центральний момент M_j . Розміщення граней включення після деформації описується функціями

$$\xi_j^{\pm}(y) = \xi_j^0(y) + 2(g_j^+(y) \pm g_j^-(y)), \quad \xi_j^0(y) = \varepsilon_j + y\delta_j,$$

$$2g_j^{\pm}(y) = \xi_{j*}^+ \pm \xi_{j*}^-, \quad y \in \ell_j,$$

$\xi_{j*}^{\pm}(y)$ задають форму j -го включення відповідно при $x = \pm 0$. Враховуючи

умови $\chi_k^-(y) = 0$, $y \notin \ell_0$, $\ell_0 = \bigcup_{j=1}^r \ell_j$, $k = 1, \dots, 6$, що відображають факт з'єднання півпросторів поза включеннями, поставлена задача за допомогою співвідношень (18) може бути зведена до такого матричного СІР n -го порядку ($n \leq 6$) на ℓ_0 :

$$\mathbf{C}_* \boldsymbol{\eta}(y) + \mathbf{S}_* \Gamma_{\ell_0}[\boldsymbol{\eta}] = \mathbf{q}(y), \quad y \in \ell_0, \quad \boldsymbol{\eta} = \{\eta_k(y)\}_{k=1}^n, \quad \mathbf{q} = \{q_k(y)\}_{k=1}^n. \quad (19)$$

Систему (19) слід доповнити $n \times r$ умовами із таких $6 \times r$ співвідношень:

$$I_j[\chi_k^-(y)] \equiv \frac{1}{\pi} \int_{\ell_j} \chi_k^-(t) dt = \mathbf{Q}_{kj}, \quad j = 1, \dots, r, \quad (20)$$

причому $Q_{kj} = 0$, $k = 3, \dots, 6$. Умови (20) при $k = 1, 2, 3$ відображають умови рівноваги j -го включення, а при $k = 4, 5, 6$ – умови замкнутості j -ї тріщини. Для визначення невідомих кутів повороту включень δ_j , $j = 1, \dots, r$, використовують умови моментної рівноваги

$$I_j[y\chi_1^-(y)] = M_j, \quad j = 1, \dots, r. \quad (21)$$

Розмірність n матриць \mathbf{C}_* , \mathbf{S}_* та вектор-функцій $\boldsymbol{\eta}(y)$ і $\mathbf{q}(y)$ залежить від типу контактної взаємодії включень із середовищем.

Розглянемо деякі види контактної взаємодії абсолютно жорстких включень із середовищем.

Задача А. Включення зчеплені кожною гранню з півпросторами. Враховуючи умови

$$\chi_4^+(y) = 2g'_+(y) + 2\delta, \quad \chi_4^-(y) = 2g'_-(y), \quad y \in \ell_0, \quad (22)$$

$$\{g'_\pm(y), \delta\} = \left\{ \frac{d}{dy} g_j^\pm(y), \delta_j \right\}, \quad y \in \ell_j, \quad j = 1, \dots, r,$$

а також рівності $\chi_k^\pm(y) = 0$, $k = 5, 6$, $y \in \ell_0$, та скориставшись останніми трьома зі співвідношень (18), одержимо систему трьох рівнянь ($n = 3$) (19), у якій

$$\boldsymbol{\eta} = \{\eta_k\}_{k=1}^3 = \{\chi_k^-(y)\}_{k=1}^3, \quad \mathbf{C}_* = \{c_{kj}\}_{\substack{k=4,5,6, \\ j=1,2,3}}, \quad \mathbf{S}_* = \{s_{kj}\}_{\substack{k=4,5,6, \\ j=1,2,3}},$$

$$q_k = \delta_{1,k} \chi_4^+(y) - c_{3+k,4} \chi_4^- - s_{3+k,4} \Gamma_{\ell_0} [\chi_4^-]. \quad (23)$$

Систему (19) слід доповнити умовами (21) і (20) при $k = 1, 2, 3$.

Задача Б. Включення знаходяться в умовах гладкого контакту з півпросторами. Враховуючи (22), умови $\chi_k^\pm(y) = 0$, $k = 2, 3$, $y \in \ell_0$, та скориставшись другим, третім та четвертим із співвідношень (18), одержимо систему трьох рівнянь ($n = 3$) (19), у якій

$$\boldsymbol{\eta} = \{\eta_k\}_{k=1}^3 = \{\chi_k^-(y)\}_{k=1,5,6}, \quad \mathbf{C}_* = \{c_{kj}\}_{\substack{k=2,3,4, \\ j=1,5,6}}, \quad \mathbf{S}_* = \{s_{kj}\}_{\substack{k=2,3,4, \\ j=1,5,6}},$$

$$q_k = \delta_{3,k} \chi_4^+(y) - c_{1+k,4} \chi_4^- - s_{1+k,4} \Gamma_{\ell_0} [\chi_4^-]. \quad (24)$$

Застосувавши до розв'язання системи (19) метод, запропонований в [6], неважко отримати такі вирази для шуканих функцій:

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{T} \mathbf{t}, \quad \mathbf{t} = \{t_j\}_{j=1}^3, \quad t_j(y) = \omega_j^{-1} (\gamma_j (\lambda_j \omega_r g_j - \Gamma_{\ell_0} [\omega_r g_j]) + \mathcal{G}_j^r), \quad (25)$$

де

$$\omega_j(y) = \prod_{k=1}^r (b_k - y)^{\mu_j} (y - a_k)^{1-\mu_j}, \quad \gamma_j = \frac{1}{\mu_j^2 + 1},$$

$$\mathcal{G}_j^r(y) = \sum_{k=0}^{r-1} c_{jk}^0 y^k, \quad \mathbf{g} = \{g_j\}_{j=1}^3 = \mathbf{H} \mathbf{q}(y),$$

$$\mathbf{H} = \{h_{kj}\}_{k,j=1}^3 = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{S}_*^{-1}, \quad \mu_j = \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{\lambda_j + 1}{\lambda_j - 1},$$

$\mathbf{T} = \{t_{kj}\}_{k,j=1}^3$, λ_j , $j = 1, 2, 3$, – відповідно перетворююча матриця і власні числа матриці $\mathbf{S}_*^{-1} \mathbf{C}_*$. Сталі c_{jk}^0 визначаємо з умов (20).

Показники особливостей розв'язків у вершинах включень мають такий вигляд

для задачі А:

$$\mu_1 = \frac{1}{2}, \quad \mu_{2,3} = \frac{1}{2} \pm i\alpha_1, \quad \alpha_1 = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1+\alpha_0}{1-\alpha_0}, \quad \alpha_0 = \operatorname{Im} \lambda_2, \quad 0 < \alpha_0 < 1; \quad (26)$$

для задачі Б:

$$\mu_1 = \frac{1}{2}, \quad \mu_2 = \mu_0, \quad \mu_3 = 1 - \mu_0, \quad \mu_0 = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \lambda_2, \quad \operatorname{Im} \lambda_2 = 0. \quad (27)$$

Одержаний розв'язок (25) і показники (26), (27) узгоджуються з результатами роботи [6], отриманими для плоского випадку.

Розглянемо частковий випадок розглянутих задач. Нехай до одного, лінійного в розрізі, включення: $r = 1$, $\ell_0 = (-a, a)$, $\xi_{1*}^\pm(y) = 0$, прикладені навантаження з рівнодієюною $\mathbf{Q} = (Q_1, Q_2, 0)$ і центральним моментом M_1 .

Розв'язок (25) у цьому випадку для задачі А набуде такого вигляду:

$$\eta_j(y) = \frac{2\gamma_0}{\sqrt{a^2 - y^2}} \left(\frac{\omega_{0j}}{\gamma_0} + \omega_{1j} \cos \left(\alpha_1 \ln \left| \frac{a+y}{a-y} \right| \right) + \omega_{2j} \sin \left(\alpha_1 \ln \left| \frac{a+y}{a-y} \right| \right) \right),$$

де

$$\begin{aligned} \omega_{kj}(y) &= \delta(\xi_{k1j}y + a\xi_{k2j}) + \frac{1}{\pi} \xi_{k3j}, & \xi_{01j} &= t_{j1} \sum_{n=1}^3 s_{n1}^* t_{1n}^*, \\ \xi_{03j} &= \frac{t_{j1}}{2} \sum_{n=1}^2 Q_n t_{1n}^*, & \xi_{02j} &= 0, & \xi_{11j} &= 2 \sum_{n=1}^3 s_{n1}^* \operatorname{Re}(t_{j2} t_{2n}^*), \\ \xi_{12j} &= 2\alpha_1 \sum_{n=1}^3 s_{n1}^* \operatorname{Im}(t_{j2} t_{2n}^*), & \xi_{13j} &= \sum_{n=1}^2 Q_n \operatorname{Re}(t_{j2} t_{2n}^*), \\ \xi_{21j} &= -\xi_{12j} \alpha_1^{-1}, & \xi_{22j} &= \alpha_1 \xi_{11j}, & \xi_{23j} &= -\sum_{n=1}^2 Q_n \operatorname{Im}(t_{j2} t_{2n}^*), \\ \{s_{kj}^*\}_{k,j=1}^3 &= \mathbf{S}^{-1}, & \{t_{kj}^*\}_{k,j=1}^3 &= \mathbf{T}^{-1}, & \gamma_0 &= \frac{1}{1 - \alpha_0^2}. \end{aligned}$$

Поворот включення δ навколо осі OZ подається формулою

$$\delta = \frac{M_1 - 2\alpha_1 a \xi_{231}}{\pi a^2 (\xi_{011} - (1 + 4\alpha_1^2) \xi_{211})}.$$

Для задачі Б стрибки напружень (25) у цьому випадку набудуть такого вигляду:

$$\begin{aligned} \eta_j(y) &= \frac{\rho_{1j}(y)}{\sqrt{a^2 - y^2}} + \frac{\gamma_1 \rho_{2j}(y)}{(a-y)^{\mu_0} (a+y)^{1-\mu_0}} + \frac{\gamma_1 \rho_{3j}(y)}{(a-y)^{1-\mu_0} (a+y)^{\mu_0}}, \\ \rho_{kj}(y) &= \delta(\zeta_{k1j}y + a\zeta_{k2j}) + \frac{1}{\pi} \zeta_{k3j}, \\ \zeta_{11j} &= 2t_{j1} \sum_{n=1}^3 s_{n3}^* t_{1n}^*, & \zeta_{13j} &= t_{j1} \sum_{n=1}^2 Q_n t_{1n}^*, & \zeta_{12j} &= 0, \\ \zeta_{k1j} &= 2t_{jk} \sum_{n=1}^3 s_{n3}^* t_{kn}^*, & \zeta_{k2j} &= (-1)^k (1 - 2\mu_0) \zeta_{k1j}, \\ \zeta_{k3j} &= t_{jk} \sum_{n=1}^2 Q_n t_{kn}^*, & k &= 2, 3, & \gamma_1 &= \frac{1}{1 + \lambda_2^2}. \end{aligned}$$

Поворот включення δ визначається формулою

$$\delta = \frac{M_1 - (1 - 2\mu_0)a(\zeta_{231} - \zeta_{331})}{\pi a^2 (\zeta_{111} - 2\mu_0(1 - \mu_0)(\zeta_{211} + \zeta_{311}))}.$$

5. Числові результати та їх аналіз. Досліджено поведінку кута повороту δ включення при симетричному завантаженні: $\frac{Q_1}{a} = 10^4$, $Q_2 = 0$, $M_1 = 0$. Розрахунки проводились для комбінацій анізотропних матеріалів

- *моноклінної системи* [1] (13 незалежних пружних сталей): етілендіамітаратрат (ЕДТ) (матеріал $m1$), тригліцинсульфат (матеріал $m2$);
- *орторомбічної системи* [7] (9 незалежних пружних сталей): склопластик ортогонально ормований 2:1 (матеріал $m3$), склопластик АСТТ-С2-0 (матеріал $m4$).

На рис. 1 наведено значення δ для простору, складеного із матеріалу $m1$ ($x < 0$) і матеріалу $m1$ ($x > 0$) з ортогонально перетвореними на кут φ ($0 \leq \varphi \leq \pi$) головними осями анізотропії. На рис. 2 значення δ наведено для простору, складеного із матеріалу $m2$ ($x < 0$) з повернутими на кут $\frac{\pi}{3}$ головними осями анізотропії і матеріалу $m1$ ($x > 0$) з ортогонально перетвореними на кут φ ($0 \leq \varphi \leq \pi$) головними осями анізотропії. На рис. 3 значення δ наведено для простору, складеного із матеріалу $m4$ ($x < 0$) і матеріалу $m1$ ($x > 0$) з ортогонально перетвореними на кут φ ($0 \leq \varphi \leq \pi$) головними осями анізотропії. На рис. 4 значення δ наведено для простору, складеного із матеріалу $m4$ ($x < 0$) і матеріалу $m3$ ($x > 0$) з ортогонально перетвореними на кут φ ($0 \leq \varphi \leq \pi$) головними осями анізотропії. На всіх рисунках криві з індексом a відносяться до задачі А, з індексом b – до задачі Б. Поворот головних осей анізотропії на кут φ для верхнього півпростору ($x > 0$) (для кожної комбінації матеріалів) здійснювався одночасно навколо осей Ox , Oy (криві $2a$, $2b$) та одночасно навколо всіх осей (криві $3a$, $3b$). Для перших трьох комбінацій (рис. 1–3) для верхнього півпростору ($x > 0$) поворот головних осей анізотропії на кут φ здійснювався також навколо осі Ox (криві $1a$, $1b$), для четвертої (рис. 4) – навколо осі Oz (криві $4a$, $4b$).

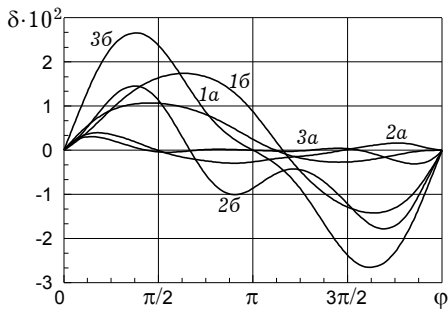


Рис. 1

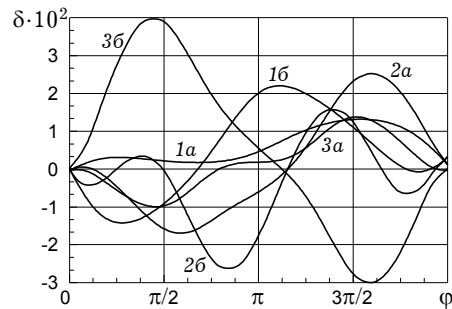


Рис. 2

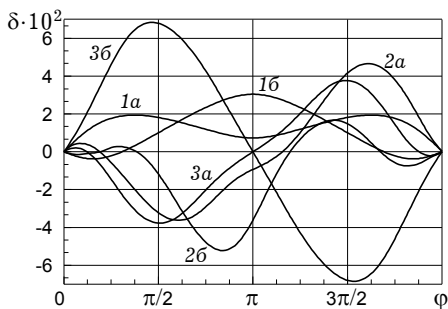


Рис. 3

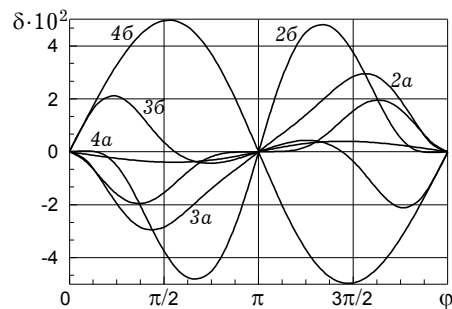


Рис. 4

Перетворення головних осей приводит до збільшення кількості ненульових пружних сталей (для матеріалів моноклінної системи їх кількість становить 21) і, як свідчать графіки, суттєво впливає на значення кута повороту включення δ . На це значення також суттєво впливає тип контактної взаємодії включення з півпросторами. Для всіх комбінацій матеріалів δ зазнає більших змін при зміні φ для включень, що знаходяться в умовах гладкого контакту (криві з індексом б), при цьому найбільшими є значення δ для комбінацій, що містять матеріали моноклінної системи при одночасному повороті всіх осей (криві 1б). Максимуми δ досягаються для кутів $\varphi \approx \frac{\pi}{4}$ і $\varphi \approx \frac{3\pi}{4}$ для всіх комбінацій матеріалів, а найбільшими є максимуми для комбінацій матеріалів різних систем симетрії (рис. 3). Слід відмітити, що тільки для комбінацій матеріалів орторомбічної системи (рис. 4) при будь-яких перетвореннях систем координат графіки мають спільну лінію симетрії $\varphi = \frac{\pi}{2}$, крім того, в цьому випадку при повороті головних осей анізотропії навколо осі Ox або Oy для задач А і Б повороту включення не відбувається: $\delta = 0$.

6. Висновки. Наведені результати показують, що урахування антиплоскої складової у двовимірних задачах анізотропної пружності суттєво впливає на значення кута повороту δ . Цей вплив особливо помітний для матеріалів моноклінної системи, для яких задачі не розпадаються на плоску та антиплоску при будь-якому розташуванні головних осей симетрії.

Аналогічно можуть бути розглянуті й інші види контактної взаємодії включень із півпросторами.

1. Александров К. С., Рыжова Т. В. Упругие свойства кристаллов. Обзор // Кристаллография. – 1961. – 6, вып. 2. – С. 289–314.
2. Гагов Ф. Д. Краевые задачи. – Москва: Наука, 1977. – 640 с.
3. Кривой А. Ф. Об одном способе решения задачи Римана по части переменных в пространстве обобщенных функций медленного роста / ОВИМУ. – Одесса, 1988. 19 с. – Деп. в ВИНТИ 24.10.88, № 7605-В88.
4. Кривой А. Ф. Произвольно ориентированные дефекты в составной анизотропной плоскости // Вісн. Одеськ. держ. ун-ту. Сер. Фіз.-мат. науки. – 2001. – 6, вип. 3. – С. 108–115.
5. Кривой А. Ф. Фундаментальное решение для четырехсоставной анизотропной плоскости // Вісн. Одеськ. держ. ун-ту. Сер. Фіз.-мат. науки. – 2003. – 8, вип. 2. – С. 140–149.
6. Кривой А. Ф., Радиолло М. В. Особенности поля напряжений в составной анизотропной плоскости // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1984. – № 3. – С. 84–92.
7. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. – Москва: Наука, 1977. – 415 с.
8. Назаров С. А. Трещина на стыке анизотропных тел. Сингулярности напряжений и инвариантные интегралы // Прикл. математика и механика. – 1998. – 62, № 5. С. 957–962.
9. Назаров С. А. Трещина на стыке анизотропных тел. Сингулярности упругих полей и критерии разрушения при контакте берегов // Прикл. математика и механика. – 2005. – 69, № 3. – С. 520–532.
10. Herrmann K. P., Loboda V. V. On interface crack models with contact zones situated in an anisotropic bimaterial // Arch. Appl. Mech. – 1999. – 69. – P. 317–335.
11. Poonssawat P., Wijeyewickrema A. C., Karasudhi P. Stress singularity analysis of a crack terminating at the interface of an anisotropic layered composite // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. – 1998. – 65, No. 4. – P. 829–836.
12. Suo Z. Singularities, interfaces and cracks in dissimilar anisotropic media // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. – 1990. – 427, No. 1873. – P. 331–358.
13. Wu K. C. Stress intensity factor and energy release rate for interfacial cracks between dissimilar anisotropic materials // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. – 1990. – 57, No 4. – P. 882–886.

ТУННЕЛЬНЫЕ ВКЛЮЧЕНИЯ В КУСОЧНО-ОДНОРОДНОМ АНИЗОТРОПНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В пространстве обобщенных функций построены сингулярные интегральные соотношения, связывающие скачки и суммы напряжений и смещений в плоскости соединения двух различных анизотропных полупространств, которые находятся в двумерном состоянии без наличия плоскостей упругой симметрии. В результате задачи о туннельных абсолютно жестких включениях, находящихся в условиях полного сцепления или гладкого контакта с различными анизотропными полупространствами, сведены к системам сингулярных интегральных уравнений. Получено решение указанных систем в явном виде, что позволило определить поля напряжений в окрестности включений. Исследована зависимость угла поворота включений от упругих свойств полупространств в самом общем случае анизотропии.

TUNNEL INCLUSIONS IN PIECEWISE-HOMOGENEOUS ANISOTROPIC SPACE

The integral singular equalities are constructed in the space of generalized functions. These equalities connect jumps and sums of stresses and displacements in the plane of connection of two different anisotropic half-spaces which are in the bi-directional condition without the planes of elastic symmetry. As result, the problems regarding interface absolutely rigid tunnel inclusions which are in conditions of full cohesion or smooth contact with various anisotropic half-spaces are reduces to the systems of integral singular equations. The exact solution of indicated systems is obtained, what allows us to determine the fields of stresses in vicinity of inclusions. We have analyzed the dependence of angle of rotation of inclusions on elastic properties of half-spaces in the most general case of anisotropy.

Одеська нац. морська акад., Одеса

Одержано
30.01.07